

А. М. Елизаров¹, В. Д. Слабнов²

¹ *Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского) федерального университета
ул. Кремлевская, 35, Казань, 420008, Россия*

² *Институт экономики, управления и права
ул. Московская, 42, Казань, 420111, Россия*

amelizarov@gmail.com, slabnov@ieml.ru

ФИКТИВНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПРОНИЦАЕМОСТИ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РЕГУЛИРОВАНИЯ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ*

С учетом гипотез о распределении воды по вертикали в трехмерном слоистом пласте, предложенных Р. А. Султановым, и изменения абсолютной проницаемости по толщине пласта на основе двух вероятностных законов распределения (равномерного и логарифмически-нормального) предложен способ построения фиктивных фазовых проницаемостей для численного решения задачи регулирования вытеснения нефти водой. Процесс вытеснения нефти в слоистом пласте описан 3D-моделью двухфазной фильтрации по схеме Баклея – Леверетта. Параметры пласта могут изменяться вдоль всех координатных осей.

Ключевые слова: фиктивные фазовые проницаемости, задача регулирования, двухфазная фильтрация.

Введение

Моделирование вытеснения нефти водой из слоистых пластов с учетом различных упрощений и предположений проводилось в работах [1–9]¹. Наличие массообмена между гидродинамически связанными слоями нефтяного пласта с разными значениями абсолютной проницаемости значительно усложняет исследование фильтрации многофазной жидкости. Условно можно выделить три подхода к решению такого класса задач. Первый основан на решении системы трехмерных уравнений двухфазной фильтрации относительно давления и насыщенности с разрывным коэффициентом проницаемости [9]. Второй подход предполагает решение систем двумерных уравнений двухфазной фильтрации в каждом слое, а перетоки между слоями учитывать дополнительными членами, входящими в уравнения [4; 5]. Третий подход основан на моделях, которые используют схему «струй» [1–3; 7; 8], в основе которой лежит следующая гипотеза о распределении воды по вертикали: вода вытесняет нефть в первую очередь из пропластков (слоев) с наибольшим значением абсолютной проницаемости; вытеснение в каждом слое происходит поршневым образом до остаточной нефти, а абсолютная проницаемость – случайная величина с известным законом распределения.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-07-05380, 15-47-02343 р_поволжье).

¹ *Зиновьев С. М.* Фильтрация двухфазной жидкости в слоистых пластах: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1977. 140 с.; *Слабнов В. Д.* Гидродинамическое исследование способов регулирования процессов нефтедобычи из неоднородных пластов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Казань, 1994. 196 с.

Для реализации схемы «струй» вводят различные допущения, например, считают, что пласт состоит из пропластков, между которыми отсутствуют перетоки жидкости. Это возможно в случаях изолированности пропластков [7; 8]²; наличия сообщающихся между собой пропластков, когда давление по вертикали считается одинаковым [4; 5]; или когда составляющие градиента давления не зависят от вертикальной координаты [8]. Все упомянутые работы объединяет то, что система уравнений двухфазной фильтрации усредняется по толщине пласта, т. е. трехмерная модель сводится к двумерной. При этом вводят «фиктивные» фазовые проницаемости (иногда используют другие названия этих величин – модифицированные [7] или псевдофазовые³ проницаемости), учитывающие разброс абсолютной проницаемости по толщине пласта.

В данной работе предложена математическая модель процесса вытеснения нефти водой из слоистых пластов, в которых абсолютная проницаемость может изменяться не только по толщине пласта, но и по простиранию пропластков. Считается, что абсолютная проницаемость – случайная величина с известным непрерывным или дискретным законом распределения, характеризующим изменение абсолютной проницаемости по толщине пласта. Использование абсолютной проницаемости как случайной величины обусловлено тем, что количество слоев может быть значительно большим, чем в описанных выше первом и втором подходах, когда их два или три. Поэтому расположение слоев относительно кровли и подошвы пласта не учитывается, а производится только выборка значений абсолютной проницаемости по толщине пласта. После группировки данных получается либо ступенчатая функция распределения, либо гистограмма [10]. Это дает основание считать абсолютную проницаемость случайной величиной. Далее гистограмма аппроксимируется непрерывной функцией, которая соответствует известной плотности вероятностей.

Цель работы – построение фиктивных фазовых проницаемостей для численного решения задач регулирования вытеснения нефти водой с учетом гипотез распределения воды по вертикали в трехмерном пласте, предложенных Р. А. Султановым, и изменения абсолютной проницаемости по толщине пласта как случайной величины на основе двух вероятностных законов распределения (нормального и логарифмически-нормального).

Математическая 3D-модель процесса двухфазной фильтрации в слоистых пластах

Рассмотрим нефтяной пласт, в котором происходит вытеснение нефти водой. Кровлю и подошву пласта будем считать непроницаемыми. Введем прямоугольную декартовую систему координат (x, y, z) и выделим элементарный объем в виде столбца, ограниченного сверху кровлей, а снизу – подошвой. Его основанием служит элементарная площадка dx, dy , а высотой – толщина пласта H . Будем считать, что пласт неоднороден по абсолютной проницаемости, которая изменяется как по толщине (вертикали), так и по простиранию (горизонтали) пласта. Изменение это носит хаотичный характер, и можно считать, что пласт представляет собой n_k сред с различными значениями абсолютной проницаемости. Поэтому j -й средой на произвольно выбранной вертикали пласта будем называть среду, содержащую все те пропластки этой вертикали, которые имеют абсолютную проницаемость $k_{a(j)}$. Будем полагать, что составляющие градиента давления $\partial p / \partial x, \partial p / \partial y$ постоянны по вертикали и, в частности, не зависят от j . Абсолютную проницаемость будем задавать с помощью гистограммы или ряда распределения, приведенного в табл. 1, где β_j – вероятность того, что абсолютная проницаемость примет значение $k_{a(j)}$.

² Зиновьев С. М. Указ. соч.; Слабнов В. Д. Указ. соч.

³ см. Зиновьев С. М. Указ. соч.

Таблица 1

$k_{a(j)}$	$k_{a(1)}$	$k_{a(2)}$	$k_{a(3)}$...	$k_{a(n_k)}$
β_j	β_1	β_2	β_3	...	β_{n_k}

Оценим потоки, проходящие через грани элементарного столбца. Пусть V_i^x, V_i^y, V_i^z – проекции средней скорости фильтрации i -й жидкости на оси OX, OY, OZ. Тогда расходы i -й жидкости, втекающей в элементарный столбец в направлении осей OX, OY через грани площадью Hdy и Hdx за время dt , равны $V_i^x Hdydt$ и $V_i^y Hdxdt$ соответственно. Расходы же вытекающей жидкости за тот же период составляют

$$\left[V_i^x Hdy + \partial(V_i^x H) / \partial x dx dy \right] dt, \left[V_i^y Hdx + \partial(V_i^y H) / \partial y dy dx \right] dt.$$

Так как кровля и подошва пласта непроницаемы, расходы i -й жидкости через нижнюю и верхнюю грани столбца равны нулю ($V_i^z = 0$). Изменение объема i -й жидкости в элементар-

ном столбце пористой среды за время dt есть $dx dy H m \frac{\partial s_i}{\partial t} dt$. Составим уравнение материального баланса для i -й жидкости, исходя из величин, приведенных выше, и получим

$$\frac{\partial(V_i^x H)}{\partial x} + \frac{\partial(V_i^y H)}{\partial y} = -mH \frac{\partial s_i}{\partial t} \quad (i = \text{в}, \text{н}). \quad (1)$$

Здесь буквенный индекс в относится к водной, н – к нефтяной фазам.

Сделаем еще ряд предположений относительно механизма вытеснения нефти водой в столбце с целью определения величин V_i^x, V_i^y . Пусть каждая j -я среда с абсолютной проницаемостью $k_{a(j)}$ имеет свои остаточную нефтенасыщенность $s_{*н(j)}$ и долю связанной воды $s_{*в(j)}$, которые считаем известными. В этом случае максимальные значения водо- и нефтенасыщенности j -й среды в каждом элементарном столбце имеют вид

$$s_{i(j)}^* = 1 - s_{*i(j)}, \quad i = \text{в}, \text{н}.$$

В общем случае j -я среда может состоять из отдельных частей, которые могут быть расположены в разных местах элементарного столбца.

Пусть $s_{в(j)}, s_{н(j)}$ – водо- и нефтенасыщенность j -й среды. Если принять поровый объем j -й среды за единицу, то поровые объемы среды, занятые водой и нефтью, совпадут с величинами $s_{в(j)}, s_{н(j)}$, а поровые объемы, которые максимально (минимально) заполнены водой или нефтью, будут равны $s_{в(j)}^* (s_{*в(j)})$ или $s_{н(j)}^* (s_{*н(j)})$. Определим активные нефте- и водонасыщенность j -й среды как

$$\theta_j = \frac{s_{н(j)} - s_{*н(j)}}{s_{н(j)}^* - s_{*н(j)}}, \quad 1 - \theta_j = \frac{s_{в(j)} - s_{*в(j)}}{s_{в(j)}^* - s_{*в(j)}}. \quad (2)$$

В силу (2) нефте- и водонасыщенность j -й среды можно представить в виде

$$s_{н(j)} = s_{*н(j)} (1 - \theta_j) + s_{н(j)}^* \theta_j, \quad s_{в(j)} = s_{*в(j)} (1 - \theta_j) + s_{в(j)}^* \theta_j. \quad (3)$$

Если поровый объем элементарного столбца принять за единицу, то поровый объем j -й среды будет равен β_j .

Обозначим через s_i, s_i^*, s_{*i} насыщенность, а также максимальную и минимальную насыщенности элементарного столбца i -й фазой. При этом поровые объемы, занятые водой и неф-

тью, равны s_{ϵ}, s_H , а поровые объемы, которые заняты максимально (минимально) водой или нефтью, равны s_{ϵ}^* ($s_{* \epsilon}$) или s_H^* ($s_{* H}$). В этом случае активные водо- или нефтенасыщенность элементарного столбца имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n_k} (1 - \theta_j) \beta_j = \frac{s_{\epsilon} - s_{* \epsilon}}{s_{\epsilon}^* - s_{* \epsilon}}, \quad \sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j = \frac{s_H - s_{* H}}{s_H^* - s_{* H}}. \quad (4)$$

Величины s_i^* , $s_{* i}$ определяются как средневзвешенные по толщинам j -х сред: $s_i^* = \sum_{j=1}^{n_k} s_{i(j)}^* \beta_j$, $s_{* i} = \sum_{j=1}^{n_k} s_{* i(j)} \beta_j$, $i = \epsilon, H$. Тогда водо- или нефтенасыщенность элементарного столбца по аналогии с (4) и с учетом (3) можно представить как средневзвешенные по толщинам j -х сред:

$$s_{\epsilon} = \sum_{j=1}^{n_k} s_{* \epsilon(j)} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} s_{\epsilon(j)}^* (1 - \theta_j) \beta_j, \quad s_H = \sum_{j=1}^{n_k} s_{* H(j)} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} s_H^* (1 - \theta_j) \beta_j. \quad (5)$$

Очевидно, что $\sum_{j=1}^{n_k} \theta_j \beta_j + \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \theta_j) \beta_j = 1$.

Пусть $k_{\epsilon(j)}(s_{\epsilon})$ и $k_{H(j)}(s_H)$ – относительные фазовые проницаемости воды и нефти в j -й среде. В силу (5) они будут зависеть от величин θ_j . Относительная фазовая проницаемость воды в процессе фильтрации будет изменяться от 0 до $k_{\epsilon}^* = k_{\epsilon(j)}(s_{\epsilon}^*)$, а относительная фазовая проницаемость нефти – от $k_H^* = k_{H(j)}(s_H^*)$ до 0. Из закона Дарси значения скорости фильтрации воды или нефти через грани dyH и dxH для j -й среды можно определить как

$$V_{\epsilon(j)}^x = -\sigma_{\epsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V_{\epsilon(j)}^y = -\sigma_{\epsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (6)$$

$$V_{H(j)}^x = -\sigma_{H(j)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad V_{H(j)}^y = -\sigma_{H(j)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad (7)$$

где $\sigma_{\epsilon(j)} = k_{a(j)} k_{\epsilon(j)} / \mu_{\epsilon}$, $\sigma_{H(j)} = k_{a(j)} k_{H(j)} / \mu_H$ – проводимость каждой из фаз в j -й среде. Тогда значения составляющих осредненной по толщине пласта скорости фильтрации воды или нефти можно определить в виде

$$V_{\epsilon}^x = \sum_{j=1}^{n_k} V_{\epsilon(j)}^x \beta_j, \quad V_{\epsilon}^y = \sum_{j=1}^{n_k} V_{\epsilon(j)}^y \beta_j, \quad (8)$$

$$V_H^x = \sum_{j=1}^{n_k} V_{H(j)}^x \beta_j, \quad V_H^y = \sum_{j=1}^{n_k} V_{H(j)}^y \beta_j. \quad (9)$$

Подставим (6) в (8), (7) в (9), а затем с учетом знака полученных выражений подставим их в (1). Окончательно получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{\epsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial x} \beta_j H \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{\epsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial y} \beta_j H \right] = -mH \frac{\partial s_{\epsilon}}{\partial t}, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{H(j)} \frac{\partial p}{\partial x} \beta_j H \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{H(j)} \frac{\partial p}{\partial y} \beta_j H \right] = -mH \frac{\partial s_H}{\partial t}. \quad (11)$$

Уравнения неразрывности (10), (11) можно преобразовать к более простому виду с учетом того, что проекции горизонтальных составляющих скоростей фильтрации постоянны по вертикали, так как постоянны их градиенты давления. Тогда уравнение (10) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{H}{\mu_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{\varepsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{H}{\mu_\varepsilon} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{\varepsilon(j)} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = -mH \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial t}. \quad (12)$$

Умножим и разделим левую часть (12) на осредненное по толщине пласта значение абсолютной проницаемости $\tilde{k}_a = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)}$. Получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{H \tilde{k}_a k_\varepsilon^\phi}{\mu_\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{H \tilde{k}_a k_\varepsilon^\phi}{\mu_\varepsilon} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = -mH \frac{\partial s_\varepsilon}{\partial t}, \quad (13)$$

где

$$k_\varepsilon^\phi(s_\varepsilon) = (\tilde{k}_a)^{-1} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{\varepsilon(j)}(s_\varepsilon) \quad (14)$$

По аналогии с (10) уравнение (11) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{H \tilde{k}_a k_n^\phi}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{H \tilde{k}_a k_n^\phi}{\mu_n} \frac{\partial p}{\partial y} \right] = -mH \frac{\partial s_n}{\partial t}, \quad (15)$$

где

$$k_n^\phi(s_n) = (\tilde{k}_a)^{-1} \sum_{j=1}^{n_k} \beta_j k_{a(j)} k_{n(j)}(s_n) \quad (16)$$

Уравнения (13), (15) являются уравнениями неразрывности каждой из фаз и описывают процесс двухфазной фильтрации в горизонтальной плоскости, а «фиктивные» относительные фазовые проницаемости $k_i^\phi(s_i)$ ($i = \varepsilon, n$) будут построены на основе известных максимальных значений относительных фазовых проницаемостей, активных насыщенных сред и вероятностного закона распределения абсолютной проницаемости по толщине пласта.

Таким образом, математическая модель вытеснения нефти из пласта толщины H , в котором абсолютная проницаемость изменяется по вертикали и горизонтали, при указанных допущениях сводится к математическому моделированию процесса фильтрации в некотором пласте с абсолютной проницаемостью, равной среднему значению абсолютной проницаемости по толщине пласта с учетом «фиктивных» относительных фазовых проницаемостей, которые зависят от значений абсолютной проницаемости пласта как по толщине, так и по простиранию. Отметим, что размерность задачи при этом снижается на единицу, так как исключается вертикальная координата z .

Аналогом фиктивного пласта в гидрогеологии можно считать приведенную плоскость, которая используется при проектировании нефтяных месторождений. Поэтому давление, которое рассчитывается в результате вычислительного эксперимента на основе данной математической модели, можно считать приведенным.

Систему уравнений (13), (15) после несложных преобразований с использованием закона Дарси можно привести к системе уравнений относительно усредненной скорости фильтрации \vec{V} и нефтенасыщенности s

$$\operatorname{div}(\vec{V}H) = 0, \operatorname{div}(\vec{V}H\tilde{F}(s)) = mH \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (17)$$

где $\vec{V} = -\tilde{\sigma} \vec{V}(s) \operatorname{grad} p$ – суммарная усредненная скорость фильтрации нефти и воды;

$\tilde{\sigma}(s) = \tilde{k}_a \left[k_n^\phi(s) / \mu_n + k_\varepsilon^\phi(s) / \mu_\varepsilon \right]$ – суммарная усредненная проводимость в слоистом пласте; $\tilde{F}(s) = \tilde{k}_a k_n^\phi(s) / (\mu_n \tilde{\sigma}(s))$ – усредненная доля нефти в потоке жидкости. Для решения системы уравнений (17) требуется знать вид (14), (16) «фиктивных» относительных фазовых проницаемостей, распределенных по некоторому вероятностному закону распределения случайной величины, или гистограмму распределения абсолютной проницаемости

в каждой точке слоистого пласта. Для их вычисления необходимо в свою очередь знать $\theta_j, j = \overline{1, n_k}$.

Построение фиктивных фазовых проницаемостей на основе непрерывных и дискретных аналогов равномерного и логарифмически-нормального законов распределения абсолютной проницаемости по толщине пласта

Существует два подхода к построению фиктивных фазовых проницаемостей в усредненной математической модели: использование непрерывной функции распределения случайной величины или дискретного ее аналога, т. е. ряда распределения. Первый подход используется при построении так называемой непрерывной (эталонной) модели. Второй подход применяется при построении дискретной (приближенной) модели, более предпочтительной при моделировании реальных нефтяных пластов.

В [11]⁴ приведен следующий численный алгоритм построения фиктивных фазовых проницаемостей для первого подхода:

- задать минимальное значение нефтенасыщенности s из интервала $s^* \leq s \leq s^*$;
- вычислить подвижную нефтенасыщенность $\theta = (s - s^*) / (s^* - s^*)$;
- найти пороговое (нефть – вода) значение проницаемости $\bar{k}_a(\theta)$ как корень трансцендентного уравнения $\theta - F(\bar{k}_a) = 0$, где $F(\bar{k}_a) = \int_a^{\bar{k}_a} f(k_a) dk_a$ – функция распределения случайной величины (абсолютной проницаемости k_a) по толщине пласта, $f(k_a)$ – плотность вероятностей закона распределения $F(\bar{k}_a)$;

- вычислить интеграл $J(\bar{k}_a) = \int_a^{\bar{k}_a} k_a f(k_a) dk_a$;

- найти фиктивные относительные фазовые проницаемости $k_H^\phi(s), k_B^\phi(s)$ для заданного значения нефтенасыщенности s по формулам:

а) в линейном случае, когда относительные фазовые проницаемости нефти и воды физической модели $k_H(s) = k_H^* \theta, k_B(s) = k_B^* (1 - \theta)$, где k_H^*, k_B^* – максимальные значения исходных относительных фазовых проницаемостей нефти и воды, полученных из опыта, имеем $k_H^\phi(s) = k_H^* J(\bar{k}_a) \theta / \bar{k}_a, k_B^\phi(s) = k_B^* [\bar{k}_a - J(\bar{k}_a)] (1 - \theta) / \bar{k}_a$, где \bar{k}_a – среднее значение абсолютной проницаемости по толщине пласта математической модели;

б) в нелинейном случае, когда относительные фазовые проницаемости нефти и воды физической модели $k_H(s) = k_H^* \theta^{n_H}, k_B(s) = k_B^* (1 - \theta)^{n_B}$, где $n_H, n_B = 2, 3$, получим

$$k_H^\phi(s) = k_H(s) J(\bar{k}_a) \theta^{n_H} / \bar{k}_a, k_B^\phi(s) = k_B(s) (\bar{k}_a - J(\bar{k}_a)) (1 - \theta)^{n_B} / \bar{k}_a; \quad (18)$$

- вычислить новое значение нефтенасыщенности $s = s + \Delta s$;
- если $s \leq s^*$, перейти ко второму пункту; в противном случае фиктивные относительные фазовые проницаемости построены.

Описанный алгоритм позволяет численно определить вид фиктивных относительных проницаемостей для нефти и воды в усредненной математической модели, когда абсолютная проницаемость в слоистом пласте является случайной величиной и распределена по какому-либо вероятностному закону распределения. Отметим, что фиктивные фазовые проницаемости можно построить до проведения вычислительного эксперимента или в его процессе.

⁴ Зиновьев С. М. Указ. соч.

В некоторых случаях для простейших видов плотности вероятностей $f(k_a)$ закона распределения $F(\bar{k}_a)$ удается получить аналитический вид фиктивных относительных проницаемостей для нефти и воды в усредненной математической модели. Рассмотрим равномерный закон распределения

$$\bar{s}_H = \theta = H_H / H = \int_a^{\bar{k}_a} f(k) dk = \int_a^{\bar{k}_a} (b-a)^{-1} dk = (\bar{k}_a - a) / (b-a) - \text{подвижная нефтена-}$$

сыщенность в элементарном столбце слоистого пласта;

$$\bar{s}_G = 1 - \theta = H_G / H = \int_{\bar{k}_a}^b f(k) dk = \int_{\bar{k}_a}^b (b-a)^{-1} dk = (b - \bar{k}_a) / (b-a) - \text{подвижная}$$

водонасыщенность в элементарном столбце слоистого пласта. Отсюда

$$\bar{k}_a = a + \theta(b-a) = b - (1-\theta)(b-a), \quad (19)$$

$$J_H = \int_a^{\bar{k}_a} k_a f(k_a) dk_a = \left(\frac{\bar{k}_a^2 - a^2}{2} \right) / [2(b-a)],$$

$$J_G = \int_{\bar{k}_a}^b k_a f(k_a) dk_a = \left(\frac{b^2 - \bar{k}_a^2}{2} \right) / [2(b-a)],$$

причем $J_H + J_G = \tilde{k} = M$, где M – математическое ожидание. Значит,

$$a = \tilde{k}_a (1 - v\sqrt{3}), \quad b = \tilde{k}_a (1 + v\sqrt{3}), \quad (20)$$

где v – коэффициент вариации. Выразим J_H, J_G через $\bar{s}_H = \theta, \bar{s}_G = 1 - \theta$ с учетом (19):

$$J_H = [a + \theta(b-a) / 2] \theta, \quad J_G = [b - (1-\theta)(b-a) / 2] (1-\theta).$$

Используя (20) и равенство $\bar{s}_H + \bar{s}_G = 1$, окончательно получим

$$J_H = \theta \tilde{k}_a [1 - v\sqrt{3}(1-\theta)], \quad J_G = (1-\theta) \tilde{k}_a (1 + v\sqrt{3} \theta),$$

где $\bar{s}_H = \theta = (\tilde{s} - s^*) / (s^* - s^*)$, $\bar{s}_G = 1 - \theta = (s^* - \tilde{s}) / (s^* - s^*)$. Тогда фиктивные относительные фазовые проницаемости для линейного случая относительных фазовых проницаемостей физической модели примут вид

$$k_H^\phi(\theta) = k_H^* J_H / \tilde{k}_a = k_H^* \theta [1 - v\sqrt{3}(1-\theta)],$$

$$k_G^\phi(\theta) = k_G^* J_G / \tilde{k}_a = k_G^* (1-\theta) (1 + v\sqrt{3} \theta).$$

Построим фиктивные фазовые проницаемости, используя второй подход, т. е. на основе дискретного аналога функции распределения случайной величины – ряда распределения. Так как для равномерного и логарифмически-нормального законов распределения случайной величины основными параметрами являются математическое ожидание m и дисперсия σ , то необходимо построить ряд распределения так, чтобы он учитывал эти два параметра. Ниже приведен численный алгоритм построения данного ряда распределения по известным параметрам m и σ .

Пусть задан ряд распределения, который является дискретным аналогом некоторого вероятностного закона распределения случайной величины, например, абсолютной проницаемости, по толщине пласта, представленный в табл. 1. Тогда с учетом заданных m и σ запишем следующую систему уравнений для этого ряда:

$$\sum_{i=1}^n \beta_i k_a(i) = m, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i k_a^2(i) = m^2 + \sigma. \quad (21)$$

Пусть $k_a(1)$, $k_a(n)$ (или $k_a(1)$, Δk_a) – входные параметры ряда распределения (гистограммы) заданного закона распределения случайной величины, где

$$\Delta k_a = [k_a(n) - k_a(1)] / (n - 1).$$

Тогда

$$k_a(1) = k_a(1) + 0 \cdot \Delta k_a, \quad k_a(2) = k_a(1) + 1 \cdot \Delta k_a, \quad k_a(i) = k_a(1) + (i - 1) \Delta k_a, \dots \\ k_a(n) = k_a(1) + (n - 1) \Delta k_a.$$

Перепишем первое уравнение системы (21) в виде

$$k_a(1) + \Delta k_a \sum_{i=1}^n \beta_i (i - 1) = m,$$

так как $\sum_{i=1}^n \beta_i = 1$. Значит,

$$k_a(1) = m - \Delta k_a \sum_{j=1}^n \beta_j (j - 1) > 0, \quad (22)$$

т. е. $k_a(1)$ из физических соображений должна быть положительной величиной или должно выполняться условие

$$m / \sum_{j=1}^n \beta_j (j - 1) > \Delta k_a. \quad (23)$$

Перепишем второе уравнение системы (21) в виде

$$\sum_{i=1}^n \beta_i \left[k_a^2(1) + 2(i - 1)k_a(1)\Delta k_a + (i - 1)^2 \Delta k_a^2 \right] = m^2 + \sigma.$$

Подставив вместо $k_a(1)$ выражение (22), раскрыв скобки и предварительно возведя в квадрат, получим

$$A \Delta k_a^2 + B \Delta k_a + C = 0, \quad (24)$$

где $A = \sum_{i=1}^n \beta_i (R - i + 1)^2$, $B = -2m \sum_{i=1}^n \beta_i (R - i + 1)$, $C = -\sigma$, $R = \sum_{j=1}^n \beta_j (j - 1)$.

Алгоритм построения ряда распределения

1. По заданным m , σ определить коэффициенты A , B , C .
2. Решить уравнение (24) и вычислить значение Δk_a .
3. Проверить условие (23). Если оно выполнено, перейти к пункту 4. В противном случае задать новое значение m и перейти к пункту 1.
4. Вычислить значение $k_a(1)$ по формуле (22).

Вычислительные эксперименты

Используем следующие гипотезы о характере распределения воды по толщине пласта для определения параметра θ_j , предложенные Р. А. Султановым [8].

1. Вода начинает заполнять слои с наибольшей абсолютной проницаемостью (в водной зоне нефтенасыщенность предполагается остаточной, в нефтяной зоне – максимальной). Разделение на две зоны определяется найденным значением абсолютной проницаемости, кото-

рое будем называть пороговым значением. Эта гипотеза является классической и была использована многими исследователями [3; 11–14]⁵. В этом случае $\theta_j = 0$ при

$$P_j = \beta_j \left(\frac{s_B^* - s_{*B}}{s_B - s_{*B}} \right), \quad j = \overline{j+1, n_k}; \quad \theta_j = 1 \text{ при } P_j = 0, \quad j = \overline{1, j}.$$

2. Вода распределяется по средам пропорционально только долям сред в объеме элементарного столбца. В этом случае $\theta_j = (s_H - s_{*H}) / (s_H^* - s_{*H})$ при $P_j = \beta_j$, $j = \overline{1, n_k}$.

3. Вода распределяется по средам пропорционально произведению доли β_j на значение абсолютной проницаемости в объеме элементарного столбца. В этом случае

$$\theta_j = 1 - k_a(j) \left[\frac{(s_{\theta} - s_{*\theta}) / (s_{\theta}^* - s_{*\theta})}{\sum_{i=1}^{n_k} \beta_j k_a(i)} \right]$$

при $P_j = \beta_j k_a(j) / \sum_{i=1}^{n_k} \beta_j k_a(i)$, $j = \overline{1, n_k}$.

4. Вода распределяется по средам пропорционально подвижности воды в объеме элементарного столбца. В этом случае

$$\theta_j = 1 - k_a(j) k_{\theta} \left(s_H(j) \right) \left[\frac{(s_{\theta} - s_{*\theta}) / (s_{\theta}^* - s_{*\theta})}{\sum_{i=1}^{n_k} \beta_j k_a(i) k_{\theta} \left(s_H(i) \right)} \right]$$

при $P_j = \beta_j k_a(j) k_{\theta} \left(s_H^*(j) \right) / \sum_{i=1}^{n_k} \beta_j k_a(i) k_{\theta} \left(s_H(i) \right)$, $j = \overline{1, n_k}$.

Гипотезы 2–4 предложены для случая, когда абсолютная проницаемость k_a изменяется в слоистом пласте по толщине и простираюнию, причем в каждом слое пласта по-своему. Отметим, что фазовые проницаемости для элементарного столбца будут определены, если известны фазовые проницаемости каждой среды, активные насыщенности сред и вероятностный закон распределения абсолютной проницаемости по толщине столбца.

В табл. 2, 3 приведены равномерное и неравномерное распределения с математическим ожиданием m и средним квадратическим отклонением σ^2 .

Фиктивные фазовые проницаемости k_H^{ϕ} , k_{θ}^{ϕ} будем строить с использованием формулы (20). В этом случае для равномерного распределения предположим, что остаточная нефтенасыщенность и доля связанной воды равномерно распределены и одинаковы во всех n_k средах.

Пусть $KH = k_{H(j)}^{\phi}$, $KV = k_{\theta(j)}^{\phi}$ зависят от параметра θ_j в j -й среде по формуле (18).

Параметр θ_j определим по формуле (2). Построим фиктивные фазовые проницаемости с учетом их различного вида в каждой из j -х сред для приведенных выше гипотез 1–4. Используем следующие значения параметров: $s_H^* = 0,26$, $s_H = 0,8$, $k_H^* = 1$, $k_{\theta}^* = 1$.

На рис. 1 показаны графики фиктивных фазовых проницаемостей для линейного случая зависимости KH и KV от $s_{H(j)}$ ($n_H(j) = 1$, $n_{\theta}(j) = 1$). Распределение абсолютной проницаемости $k_a(j)$ соответствует варианту $m = 0,5$; $\sigma^2 = 0,083$ (см. табл. 2); нумерация графиков соответствует нумерации гипотез.

⁵ Зиновьев С. М. Указ. соч.

Таблица 2

Значения ряда для равномерного закона распределения с различными параметрами m, σ^2

$m = 0,5;$ $\sigma^2 = 0,083$	Равномерный закон									
$\tilde{k}_{a(j)}$	0,05	0,15	0,25	0,35	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85	0,95
β_j	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1
$m = 0,5;$ $\sigma^2 = 0,021$	Равномерный закон									
$\tilde{k}_{a(j)}$	0,257	0,327	0,377	0,427	0,477	0,527	0,577	0,627	0,677	0,727
β_j	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1

Таблица 3

Значения ряда для логарифмически-нормального закона распределения

$m = 0,25;$ $\sigma^2 = 0,118$	Логарифмически-нормальный закон									
$\tilde{k}_{a(j)}$	0,03	0,13	0,23	0,33	0,43	0,53	0,64	0,73	0,83	0,93
β_j	0,020	0,600	0,100	0,070	0,060	0,060	0,040	0,030	0,020	0,010

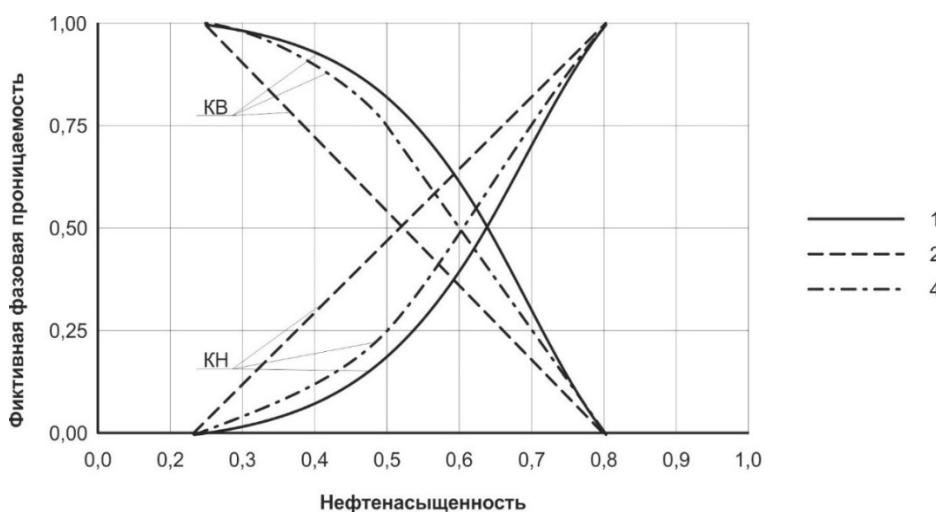


Рис. 1. Графики линейной зависимости фиктивных фазовых проницаемостей КН и КВ от нефтенасыщенности для гипотез 1–4 ($m = 0,5; \sigma^2 = 0,083$)

С целью оценки полученных результатов был также рассмотрен однородный пласт, значение абсолютной проницаемости которого во всех средах равно $m = 0,5$. Для него графики относительных фазовых проницаемостей обозначены цифрой 1. Как видно из рис. 1, графики КН и КВ, построенные на основе второй гипотезы, совпадают с графиками КН и КВ для однородного пласта. Для равномерного закона распределения и линейного вида фиктивных фазовых проницаемостей графики КН и КВ, построенные на основе третьей и четвертой гипотез, также почти совпали, причем графики КВ для третьей и четвертой гипотез находятся

между графиками КВ для второй и первой гипотез. Данный факт можно объяснить тем, что для одинаковых значений β_j , $j = \overline{1, n_k}$, гипотеза 4 становится гипотезой 3.

На рис. 2 показаны графики фиктивных фазовых проницаемостей для линейного случая зависимости КН и КВ от $s_{н(j)} \left(n_{н(j)} = 1, n_{в(j)} = 1 \right)$. Распределение абсолютной проницаемости $k_a(j)$ соответствует варианту $m = 0,25$; $\sigma^2 = 0,118$ (см. табл. 3). Нумерация графиков соответствует нумерации гипотез. Как видим, графики КН и КВ, построенные на основе третьей и четвертой гипотез, не совпадают. Как и в случае равномерного распределения абсолютной проницаемости, графики КВ для третьей и четвертой гипотез находятся между графиками КВ для второй и первой гипотез.

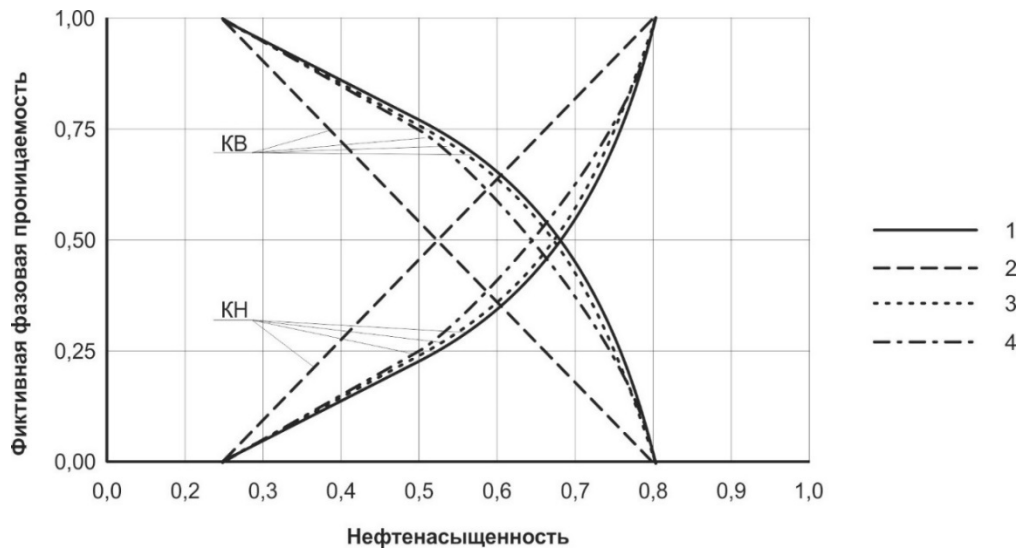


Рис. 2. Графики линейной зависимости фиктивных фазовых проницаемостей КН и КВ от нефтенасыщенности для гипотез 1–4 ($m = 0,25$; $\sigma^2 = 0,118$)

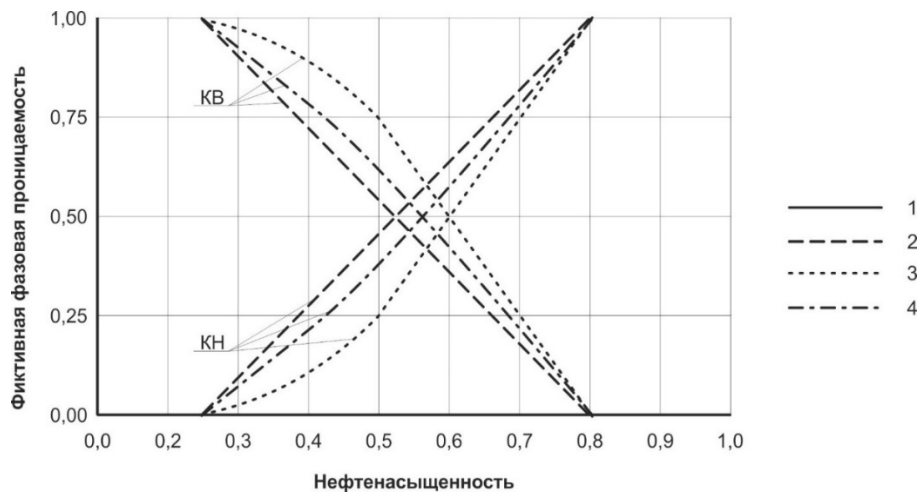


Рис. 3. Графики линейной зависимости фиктивных фазовых проницаемостей КН и КВ от нефтенасыщенности для гипотез 1–4 ($m = 0,5$; $\sigma^2 = 0,021$)

На рис. 3 показаны графики фиктивных фазовых проницаемостей для линейного случая зависимости КН и КВ от $s_{H(j)} \left(n_H(j) = 1, n_B(j) = 1 \right)$. Распределение абсолютной проницаемости $k_a(j)$ соответствует варианту $m = 0,5$; $\sigma^2 = 0,021$ (см. табл. 2). Нумерация графиков соответствует нумерации вариантов 1, 2 табл. 2 для четвертой гипотезы. Данные варианты ряда распределения имеют одинаковые значения математического ожидания, но разные значения среднего квадратического отклонения. Нумерация 3 соответствует случаю, когда значение дисперсии равно нулю.

При анализе рис. 3 можно отметить, что с увеличением значения дисперсии при прочих равных условиях графики КН расположены ниже графика КН для предельного случая ($\sigma = 0$) и, наоборот, графики КВ – выше графика КВ для предельного случая ($\sigma = 0$) разброса абсолютной проницаемости относительного математического ожидания.

Заключение

Для равномерного и логарифмически-нормального законов распределения абсолютной проницаемости в слоистом пласте предложен способ построения фиктивных фазовых проницаемостей. Дискретный аналог вероятностного закона распределения для предложенных гипотез использует два основных параметра: математическое ожидание и дисперсию. Создан вычислительный алгоритм, позволяющий автоматизировать построение ряда распределения для любого вероятностного закона и двух указанных основных параметров. В случае равномерного закона распределения описан аналитический метод построения фиктивных фазовых проницаемостей в зависимости от коэффициента вариации.

Список литературы

1. Булыгин В. Я. Движение двух жидкостных систем в неоднородных пластах // Теоретические и экспериментальные вопросы рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1969. С. 76–85.
2. Hearn C. L. Simulation of stratified water-flooding by pseudorelative permeability curves // J. Petr. Technol. 1971. P. 805–813.
3. Курбанов А. Л. К вопросу о вытеснении нефти водой из неоднородного пласта // Нефть и газ Тюмени. 1972. № 12. С. 36–38.
4. Чекалин А. Н., Шевченко В. А. Исследование фильтрации двух жидкостей в пропластках, разделенных слабопроницаемой перемычкой // Прикладная математика и ЭВМ. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. С. 21–28.
5. Королев А. В., Шалимов В. В., Швидлер М. И. О некоторых разностных схемах для численного решения задачи Баклея – Леверетта // Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975. С. 137–154.
6. Берлин А. В., Сургучев М. Л. О факторах, влияющих на фазовые проницаемости для нефти и воды // Тр. ВНИИ. М.: Недра, 1983. Вып. 87. С. 33–40.
7. Елисеенков В. В., Плохотников С. П. Исследование модифицированных относительных проницаемостей при проведении гидродинамических расчетов в слоистых нефтяных пластах // Инж.-физич. журнал. 2002. Т. 75, № 2. С. 81–84.
8. Султанов Р. А., Слабнов В. Д., Фукин И. А., Скворцов В. В. К проблеме оптимального регулирования процесса извлечения нефти с учетом вероятностного закона распределения некоторого параметра слоистого пласта // Проблемы управления. 2009. № 6. С. 28–34.
9. Видякин В. В., Волков В. М., Воронков Д. Н., Галактионов В. А., Клевченя А. А., Шевченко Д. Е. О моделировании процесса разработки нефтяного месторождения // Математическое моделирование. 2011. Т. 23, № 1. С. 19–28.
10. Крамер Г. Математические методы статистики. М.: Мир. 1975. 648 с.
11. Плохотников С. П., Фатыхов Р. Х. Математическое моделирование фильтрации в слоистых пластах. Казань: Изд-во Казан. гос. технол. ун-та. 2006. 192 с.

12. Слабнов В. Д., Султанов Р. А. К задаче регулирования текущей нефтеотдачи в слоевом пласте // Вопросы математического моделирования процессов фильтрации и рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань: Казан. физ.-техн. ин-т, 1989. С. 44–48.

13. Каневская Р. Д. Математическое моделирование процессов разработки месторождений углеводородов. М.-Ижевск: Изд-во компьютерных исследований, 2003. 206 с.

14. Breitenbach B. A., Thurnau D. H., van Poolen H. K. Solution of immiscible fluid flow simulation equations // Soc. of Pet. Eng. J. 1969. V. 9, Iss. 2. P. 155–169.

Материал поступил в редколлегию 06.03.2015

A. M. Elizarov¹, V. D. Slabnov²

¹ *Kazan (Volga region) Federal University
35, Kremlyovskaya Str., Kazan, 420008, Russian Federation*

² *Institute of Economy, Management and Law (Kazan)
42, Moskovskaya Str., Kazan, 420111, Russian Federation*

amelizarov@gmail.com, slabnov@ieml.ru

FICTIVE PHASE PERMEABILITIES FOR NUMERICAL SOLUTION OF REGULATION PROCESS BY THE WATER-OIL DISPLACEMENT

Considering the new hypotheses proposed by R. A. Sultanov on vertical water distribution in three-dimensional laminated layer, and absolute permeability changes in thickness of the layer based on the two laws of probability distribution (uniform and log-normal) is suggested a method for constructing fictive permeabilities for the numerical solution to the problem by adjusting the water-oil displacement. The 3D model by Buckley – Leverett scheme describes water-oil displacement in laminated layer. Reservoir characteristics can change along OX, OY, OZ axes.

Keywords: fictive phase permeability, regulation problem, two-phase filtration.