УДК 910.26:528

А. Н. Паршуков

Тюменский индустриальный университет
ул. Володарского, 38, Тюмень, 625000, Россия

anparshukov@mail.ru

МЕТОД ВЫДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ «СТРУКТУРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ» В ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Разработана методика факторизации (выделения) операторов «структурных возмущений» из общей передаточной функции объекта управления таких, что для замкнутой системы гарантированно не нарушают робастную устойчивость и качество управления. Выделение операторов «структурных возмущений» может быть полезно как для синтеза регулятора пониженного порядка, так и для синтеза робастного регулятора. Полученные в работе результаты могут быть реализованы на ЭВМ.

Ключевые слова: робастность, модальный регулятор, структурно-параметрическая неопределенность.

1. Введение

Классическая постановка задачи синтеза модального регулятора может быть сформулирована следующим образом. Линейный одномерный динамический объект управления P назначается дифференциальным уравнением n-го порядка, записанным в операторной форме:

$$a\ (n, p)\, y(t) = b(m, p)\, u(t), \quad a_n = 1, \quad n > m\,, \tag{1.1}$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, t – непрерывное время; $a\ (n, p)$ и $b\ (m, p)$ – дифференциальные операторы.

Здесь и далее под записью $f(l, p)$ понимается полиномиальный оператор степени l:

$$f\,(l,p) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot p^i\,,$$

где f_i ($i \in \overline{0,l}$) – постоянные коэффициенты, p^i – оператор дифференцирования по времени: $p^i \equiv d^i / d\,t^i$. Полиномиальному оператору $f(l, p)$ соответствует алгебраический полином $f\,(l, s)$:

$$f\,(l,s) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot s^i\,,$$

где s – переменная преобразования Лапласа.

Качество управления назначается односвязной областью $\boldsymbol{S}$, определяющей допустимое расположение полюсов передаточной функции (ПФ) на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}^1$. В техно-

Паршуков А. Н. Метод выделения операторов «структурных возмущений» в передаточной функции объекта управления // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, № 2. С. 100–109.

ISSN 1818-7900. Вестник НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Том 14, № 2

логии синтеза модального регулятора (описанной в работе [1]) регулятор R ищется в виде динамического звена k-го порядка:

$$\beta(k,p)u(t)=\alpha(k,p)\,y(t)+\chi(k,p)g(t)\,, \tag{1.2}$$

здесь $g(t)$ – заданный эталонный сигнал. В результате ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W^{ç.ñ.}(s)=\frac{b(m,s)\cdot\chi(k,s)}{a(n,s)\cdot\beta(k,s)-b(m,s)\cdot\alpha(k,s)}\,.$$

Известно, что для объекта управления, заданного дифференциальным уравнением n-го порядка, любое наперед заданное расположение полюсов ПФ замкнутой системы возможно обеспечить динамическим регулятором (1.2) порядка n – 1 (и выше) [2]. При этом настройки регулятора находятся из условия

$$a^{ý}(2n-1,s)=a(n,s)\cdot\beta(n-1,s)-b(m,s)\cdot\alpha(n-1,s)\,, \tag{1.3}$$

где за $a^{э}$ $(2n-1,\ s)$ обозначен характеристический полином эталонной системы. Полином $a^{э}$ $(2n-1,\ s)$ выбирается произвольным образом при условии, что все множество его корней:

$$\mathbf{\Lambda}(a^{э})=\{\lambda : a^{э}(2n-1,\lambda)=0\}\subset \boldsymbol{C}^{1}\,,$$

лежит внутри области $\boldsymbol{S}$, т. е. выполняется

$$\mathbf{\Lambda}(a^{э})\subset \operatorname{int}\boldsymbol{S}\,, \tag{1.4}$$

здесь за int $\boldsymbol{S}$ обозначена внутренняя часть области $\boldsymbol{S}$.

Подобная задача усложняется, если в описании объекта присутствует неопределенность. Будем выделять неопределенность объекта, связанную с неопределенностью коэффициентов дифференциального уравнения (1.1) (параметрическая неопределенность), и неопределенность, связанную с неточностью задания порядка дифференциального уравнения («структурная» неопределенность). Проблема синтеза регулятора и последующего анализа качества управления в условиях как параметрической так и структурной неопределенностей описания в объекте P достаточно широко представлена в литературе (см.: [2–4] и др.). В основу значительной части статьи на эту тему положены результаты работы Я. З. Цыпкина и Б. Т. Поляка [4], где был сформулирован общий критерий исследования робастной устойчивости и робастного качества управления.

2. Постановка задачи

Пусть объект управления P задан в виде:

$$\mathrm{e}''(l,p)\cdot a(n,p)\,y(t)=\mathbf{e}'(l,p)\cdot b(m,p)u(t),\quad a_n=1,\quad n>m\,, \tag{2.1}$$

причем операторы $P_0=\{\,a(n,p),\quad b(m,p)\,\}$

так называемые «точечные» (т. е. в пространстве коэффициентов операторов соответствующей размерности данным операторам будут соответствовать точки), а оператор $\mathbf{e}'$ $(l,\ p)$ задан семейством операторов:

$$\mathbf{e}'(l,p)=\{\,e_0{}''+\sum_{i=1}^{l}(e_i{}''+x_i)\cdot p^i : \vec{X}=col\,(x_1,\quad x_2,\quad \cdots,\quad x_l\,)\in \boldsymbol{E}\,\}\,, \tag{2.2}$$

здесь e_i'' ($i \in \overline{0,l}$) – коэффициенты «точечного» оператора

$$\text{e}''(l,p) = e_0'' + \sum_{i=1}^{l} e_i'' \cdot p^i ,$$

а $\boldsymbol{E}$ – область пространства коэффициентов, заданная в виде

$$\boldsymbol{E} = \{ \vec{X} : \vec{X}^{\mathrm{T}} Q \vec{X} \le \rho^2 \} \subset \mathbf{R}^l , \qquad (2.3)$$

при этом Q – положительно определенная симметричная диагональная матрица:

$$Q = diag\,(q_1^2, \quad q_2^2, \quad \cdots, \quad q_l^2) .$$

Пару операторов P_0 будем именовать «основной динамикой», а пару операторов

$$P_{\mathrm{e}} = \{ \text{e}''(l,p), \quad \boldsymbol{e}'(l,p) \} \qquad (2.4)$$

назовем «структурными возмущениями».

Факторизация (т. е. выделение) операторов «структурных возмущений» в операторах объекта управления (2.1) связана с тем, что часть полюсов (и нулей) ПФ объекта управления уже могут быть локализованы в левой части комплексной плоскости, внутри заданной области ($\boldsymbol{S} \subset \boldsymbol{C}^1$). Поэтому примем, что для операторов (2.4) выполняются условия:

$$\boldsymbol{\Lambda}(e'') \subset \operatorname{int} \boldsymbol{S} , \qquad (2.5)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{e}') \subset \operatorname{int} \boldsymbol{S} , \qquad (2.6)$$

здесь за $\boldsymbol{\Lambda}(e'')$ и $\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{e}')$ обозначены множества корней полиномов $e''(l,s)$ и $\boldsymbol{e}'(l,s)$ соответственно.

Критерии проверки принадлежности (всего) множества корней для семейства полиномов вида (2.2) – (2.3) некоторой заданной области $\boldsymbol{S}$ на комплексной плоскости изучены во многих работах; так, в частности, если область $\boldsymbol{S}$ совпадает со всей левой полуплоскостью $\boldsymbol{C}^1$, то такой критерий проверки сформулирован в работе [4].

В силу условий (2.5) – (2.6), накладываемых на операторы объекта, регулятор (1.2) будем рассчитывать только по «основной динамике» объекта.
Характеристический полином замкнутой системы принимает вид

$$\boldsymbol{a}^{\text{з.с.}}(2n+l-1,s) = e''(l,s)\cdot a(n,s)\cdot \beta(n-1,s) - \boldsymbol{e}'(l,s)\cdot b(m,s)\cdot \alpha(n-1,s) ,$$

или, окончательно,

$$\boldsymbol{a}^{\text{з.с.}}(2n+l-1,s) = e''(l,s)\cdot a^{\text{э}}(2n-1,s) - \Delta\boldsymbol{e}'(l,s)\cdot b(m,s)\cdot \alpha(n-1,s) , \qquad (2.7)$$

здесь введено обозначение

$$\Delta\boldsymbol{e}'(l,s) = \{ \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot s^i : \vec{X} \in \boldsymbol{E} \} . \qquad (2.8)$$

В данной работе *исследуется вопрос*: при каких значениях параметра ρ, определяющего величину эллипсоида $\boldsymbol{E}$ (2.3), множество корней семейства характеристических полиномов (2.7) – (2.8) принадлежит области $\boldsymbol{S}$, т. е. выполняется условие

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{a}^{\text{з.с.}}) \subset \boldsymbol{S} . \qquad (2.9)$$

Необходимо отметить, что при $\rho = 0$ в (2.3) для характеристического полинома (2.7)–(2.8) гарантированно выполняется целевое условие (2.9). Докажем данное утверждение. При $\rho = 0$ в (2.3) из формул (2.2)–(2.3) получаем

$$e''(l, p) \equiv e'(l, p)\,.$$

После сокращения динамического порядка в объекте (2.1) остается только так называемая «основная динамика» P_0, для которой регулятор R (рассчитанный по формулам (1.3), (1.4)) гарантированно обеспечивает заданное качество управления:

$$a^{\text{ç.ñ.}}(2n-1, s) = a^{\acute{y}}(2n-1, s)\,,$$

откуда следует, что

$$\boldsymbol{\Lambda}(a^{\text{ç.ñ.}}) = \boldsymbol{\Lambda}(a^{\acute{y}})\,, \qquad \boldsymbol{\Lambda}(a^{э}) \subset \operatorname{int}\boldsymbol{S}\,,$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, поставленный вопрос можно сформулировать в виде следующей задачи.

Задача 1. Требуется найти такое (максимально возможное) значение параметра ρ (обозначим его за ρ_+), что для любых значений ρ, удовлетворяющих

$$\rho \le \rho_+\,,$$

для семейства характеристических полиномов замкнутой системы, определенного формулами (2.7), (2.8) и (2.3), выполняется условие (2.9).

3. Основные результаты

Рассмотрим семейство полиномов замкнутой системы (2.7)–(2.8). Отметим следующие свойства (2.7)–(2.8):

1) коэффициенты полиномов (2.7)–(2.8) непрерывно зависят от вектора $\vec{X}$;
2) область $\boldsymbol{E}$ коэффициентов односвязная;
3) при всех $\vec{X}$ из заданной области $\boldsymbol{E}$ все полиномы семейства сохраняют порядок $n + l$ (в силу условия $n > m$).

Для точки s ($s \in \partial\boldsymbol{S}$) семейство полиномов (2.7)–(2.8) отображается в виде односвязной области (будем обозначать ее за $\mathbf{A}^{\text{ç.ñ.}}(2n+l-1, s)$) на $\boldsymbol{C}^1$:

$$\mathbf{A}^{\text{з.с.}}(2n+l-1, s) = e''(l, s)\cdot a^{э}(2n-1, s) - b(m, s)\cdot\alpha(n-1, s)\cdot\Delta E'(l, s) \subset \boldsymbol{C}^1\,, \tag{3.1}$$

где

$$\Delta\boldsymbol{E}'(l, s) = \{\sum_{i=1}^{l} x_i\cdot s^i : \overline{X} \in \boldsymbol{E}\} \subset \boldsymbol{C}^1 \; - \tag{3.2}$$

область, являющаяся отображением семейства полиномов $\Delta\boldsymbol{e}'(l, s)$.

Область (3.1) называется областью значений полиномиального семейства (2.7)–(2.8).

Применительно к поставленной задаче на основе принципа исключения нуля [5–6] может быть сформулировано следующее утверждение.

Утверждение 1. Чтобы для семейства полиномов (2.7)–(2.8) выполнялось

$$\mathbf{\Lambda}(\boldsymbol{a}^{\text{з.с.}}) \subset \operatorname{int} \boldsymbol{S},$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$0 \notin \mathbf{A}^{\text{ç.ñ.}}(2n + l - 1, s), \quad \forall s : s \in \partial \mathbf{S}, \tag{3.3}$$

здесь за $\partial \mathbf{S}$ обозначена граница области $\boldsymbol{S}$ [1].

Если $\exists s$ ($s \in \partial \mathbf{S}$) такая, что выполняется

$$0 \in \mathbf{A}^{\text{ç.ñ.}}(2n + l - 1, s), \tag{3.4}$$

то это означает, что в данной точке s находится корень одного полинома из семейства (2.7)–(2.8). С учетом формулы (3.1) и обозначения (3.2) выражение (3.4) может быть записано в виде

$$\exists\ \vec{X} : \vec{X} \in \boldsymbol{E},$$

что выполняются

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \cdots + c_{1i}x_i + \cdots + c_{1l}x_l - d_1 = 0, \\ c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \cdots + c_{2i}x_i + \cdots + c_{2l}x_l - d_2 = 0, \end{cases} \tag{3.5}$$

где введены обозначения

$$c_{1i} = \operatorname{Re}[b(m,s) \cdot \alpha(n-1,s) \cdot s^i], \qquad c_{2i} = \operatorname{Im}[b(m,s) \cdot \alpha(n-1,s) \cdot s^i], \ i = \overline{1,l},$$

$$d_1 = \operatorname{Re}[\text{e}''(l,s) \cdot a^{\text{э}}(2n-1,s)], \ d_2 = \operatorname{Im}[\text{e}''(l,s) \cdot a^{\text{э}}(2n-1,s)].$$

Первое и второе уравнения системы (3.5) соответствуют обращению в ноль, соответственно, для вещественной и мнимой частей области (3.1).

Необходимо отметить, что коэффициенты системы уравнений (3.5) зависят от точки s ($s \in \partial \mathbf{S}$); в записи (3.5) эта зависимость опущена для того, чтобы не загромождать данную (и последующие) формулы.

Поставим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2. Для (каждой) точки s ($s \in \partial \mathbf{S}$) требуется минимизировать квадратичную функцию

$$\rho^2(s) = \vec{X}^{\mathrm{T}} Q \vec{X} = \sum_{i=1}^{l} q_{ii}^2 x_i^2 \to \min_{\vec{X} \in \boldsymbol{E}}, \tag{3.6}$$

при ограничениях (3.5).

Задача (3.5)–(3.6) представляет собой хорошо изученную задачу минимизации квадратичной функции при ограничениях типа системы линейных уравнений на переменные x_i ($i = \overline{1,l}$). Под решением такой задачи будем понимать как вектор

$$\vec{X}_+ = col\,(\,x_1^+, \quad x_2^+, \quad \ldots, \quad x_l^+\,)\,,$$

удовлетворяющий условиям (3.5)–(3.6), так и значение квадратичной функции (3.6) (обозначим его за $\rho_+^2(s)$), полученное при подстановке вектора $\vec{X}_+$ в (3.6), т. е.

$$\rho_+^2(s) = \vec{X}_+^{\mathrm{T}} Q \vec{X}_+. \tag{3.7}$$

[1] Доказательство утверждения приведено в Приложении.

Очевидно, что решение поставленной задачи для каждой точки s ($s \in \partial \mathbf{S}$) существует (в силу односвязности, выпуклости и непрерывной зависимости области (3.1) от параметра ρ^2), а значение $\rho_+^2(s)$ – единственно.

Обратимся к решению вспомогательной задачи (3.5)– (3.6). Решение задачи (3.5)–(3.6) сводится к рассмотрению следующих случаев:

1) система уравнений (3.5) совместна; в (3.5) нельзя уменьшить число уравнений;
2) в системе уравнений (3.5) можно уменьшить число уравнений до одного (такая ситуация возникает, когда одно из уравнений системы эквивалентно другому либо одно из уравнений системы тождественно равно нулю);
3) в системе (3.5) оба уравнения тождественно равны нулю.

Рассмотрим 1-й случай. Обозначим за N индексное множество переменных x_i задачи (3.5)–(3.6):

$$N = \{1, 2, ..., l\}.$$

Обозначим за I_1 такое подмножество из N, из которого исключены все индексы i, такие, что в системе уравнений (3.5) все коэффициенты при переменных x_i обращаются в ноль, т. е.

$$I_1 = \{i : i \in N, c_{1i} \neq 0, \ \text{или} \ c_{2i} \neq 0\} \qquad (I_1 \subset N).$$

Систему уравнений (3.5) можно решить относительно любых выбранных переменных x_i и x_r только в том случае, когда матрица

$$C_1 = \begin{pmatrix} c_{1i} & c_{1r} \\ c_{2i} & c_{2r} \end{pmatrix},$$

составленная из коэффициентов при переменных x_i и x_r, будет иметь определитель, отличный от нуля:

$$\det C_1 \neq 0.$$

Обозначим за I_2 такое подмножество I_1, из которого исключены выбранные индексы i и r, т. е.

$$I_2 = I_1 / \{i, r\}.$$

При этом условии решение системы уравнений (3.5) запишется в виде

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_r \end{pmatrix} = C_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_1 - \sum\limits_{j \in I_2} c_{1j} \cdot x_j \\ d_2 - \sum\limits_{j \in I_2} c_{2j} \cdot x_j \end{pmatrix}.$$

Матрица C_1^{-1}:

$$C_1^{-1} = \frac{1}{\det C_1} \cdot \begin{pmatrix} c_{2r} & -c_{1r} \\ -c_{2i} & c_{1i} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$x_i = \frac{1}{\det C_1} \cdot ((c_{2r} \cdot d_1 - c_{1r} \cdot d_2) - \sum_{j \in I_2} (c_{1j} \cdot c_{2r} - c_{2j} \cdot c_{1r}) \cdot x_j), \qquad (3.8)$$

$$x_r = -\frac{1}{\det C_1} \cdot ((c_{2i} \cdot d_1 - c_{1i} \cdot d_2) - \sum_{j \in I_2} (c_{1j} \cdot c_{2i} - c_{2j} \cdot c_{1i}) \cdot x_j) . \quad (3.9)$$

С учетом выражений (3.8) и (3.9) квадратичная функция (3.6) принимает вид

$$\rho^2(s) = \sum_{j \in I_2} q_{jj}^2 \cdot x_j^2 + q_{ii}^2 \cdot x_i^2 + q_{rr}^2 \cdot x_r^2 \to \min_{x_j,\, j \in I_2} , \quad (3.10)$$

где переменные x_i и x_r выражаются через остальные по формулам (3.8) и (3.9).

Необходимое условие экстремума функции (3.10):

$$\frac{d\,\rho^2(x_k)}{d\,x_k} = 0 , \quad \forall k : k \in I_2 .$$

Находя производные функции (3.10) по переменным x_k (с учетом формул (3.8) и (3.9)) и приводя подобные, получаем систему уравнений:

$$\sum_{j \in I_2} (q_{ii}^2 \cdot \vartheta_j - q_{rr}^2 \cdot \theta_j) \cdot x_j + q_{kk}^2 \cdot \det C_1 \cdot x_k + q_{rr}^2 \cdot v_{1k} - q_{ii}^2 \cdot v_{2k} = 0 , \quad (3.11)$$

для всех x_k ($\forall k : k \in I_2$); здесь введены следующие обозначения:

$$v_{1k} = (c_{2i} \cdot d_1 - c_{1i} \cdot d_2) \cdot (c_{1k} \cdot c_{2i} - c_{2k} \cdot c_{1i}) ,\ v_{2k} = (c_{2r} \cdot d_1 - c_{1r} \cdot d_2) \cdot (c_{1k} \cdot c_{2r} - c_{2k} \cdot c_{1r}) ,$$

$$\theta_j = (c_{1j} \cdot c_{2i} - c_{2j} \cdot c_{1i}) \cdot (c_{1k} \cdot c_{2i} - c_{2k} \cdot c_{1i}) , \qquad x_i = c_{ri}^{-1} \cdot (d_r - \sum_{j \in I_4} c_{rj} \cdot x_j) .$$

Решением $\vec{X}_+$ задачи (3.5)–(3.6) будет вектор

$$\vec{X}_+ = col\,(\, x_1^+, \quad x_2^+, \quad \ldots, \quad x_l^+ \,) ,$$

коэффициенты x_k ($k \in I_2$) которого составлены из решений системы уравнений (3.11), коэффициенты x_i и x_r находятся по формулам (3.8), (3.9), а остальные коэффициенты равны нулю. Значение $\rho_+^2(s)$ находится подстановкой вектора $\vec{X}_+$ в (3.7).

Рассмотрим 2-й случай. Тогда в системе (3.5) остается только одно уравнение. Пусть за r ($r = 1$ или 2) обозначены первые индексы коэффициентов оставшегося уравнения. Обозначим за I_3 такое подмножество из N, из которого исключены все индексы i такие, что

$$c_{ri} = 0, \text{ т. е.}$$

$$I_3 = \{ i : i \in N, c_{ri} \neq 0 \} .$$

Тогда единственное уравнение системы (3.5)

$$c_{r1} x_1 + c_{r2} x_2 + \cdots + c_{ri} x_i + \cdots + c_{rl} x_l - d_r = 0$$

можно решить относительно произвольно выбранной переменной x_i ($i \in I_3$):

$$x_i = c_{ri}^{-1} \cdot (d_r - \sum_{j \in I_4} c_{rj} \cdot x_j) , \quad (3.12)$$

здесь введено обозначение

$$I_4 = I_3 / i\,.$$

С учетом выражения (3.12) квадратичная функция (3.6) принимает вид

$$\rho^2(s) = \sum_{j\,\in\, I_4} q_{jj}^2 \cdot x_j^2 + \frac{q_{ii}^2}{c_{ri}^2} \cdot (d_r - \sum_{j\,\in\, I_4} c_{rj} \cdot x_j)^2 \to \min_{x_j,\; j\,\in\, I_4}\,. \qquad (3.13)$$

Необходимое условие экстремума функции (3.13):

$$\frac{d\,\rho^2(x_k)}{d\,x_k} = 0\,, \quad \forall k : k \in I_4\,.$$

Находя производные функции (3.13) по переменным x_k и приводя подобные, получаем систему уравнений:

$$q_{kk}^2 \cdot c_{ri}^2 \cdot x_k + c_{rk} \cdot \sum_{j\,\in\, I_4} c_{rj} \cdot x_j - c_{rk} \cdot d_r = 0\,, \qquad (\forall k : k \in I_4). \qquad (3.14)$$

Решением $\vec{X}_+$ задачи (3.5) – (3.6) будет вектор

$$\vec{X}_+ = col\,(\,x_1^+,\quad x_2^+,\quad \ldots,\quad x_l^+\,)\,,$$

коэффициенты x_k ($k \in I_4$) которого составлены из решений системы уравнений (3.14), коэффициент x_i находится по формуле (3.12), а остальные коэффициенты равны нулю. Значение $\rho_+^2(s)$ находится подстановкой вектора $\vec{X}_+$ в (3.7).

Рассмотрим 3-й случай. Данная ситуация исключена постановкой задачи. Действительно, чтобы для какой-либо точки s ($s \in \partial\mathbf{S}$) оба уравнения системы (3.5) были тождественно равны нулю, необходимо, чтобы выполнялось

$$d_1 = d_2 = 0$$

в этой точке s, или (возвращаясь к исходным обозначениям):

$$\mathrm{Re}[\,e''(l,s) \cdot a^э(2n-1,s)] = \mathrm{Im}[\,e''(l,s) \cdot a^э(2n-1,s)\,] = 0\,,$$

что невозможно по постановке исходной задачи (см., например, условия (1.4) и (2.5)).

Таким образом, вспомогательная задача (3.5)–(3.6) решена.

Введем обозначение:

$$\rho_+ = \min_{s\,\in\,\partial\mathbf{S}} \sqrt{\rho_+^2(s)}\,, \qquad (3.15)$$

где значение $\rho_+^2(s)$ является решением вспомогательной задачи (3.5)–(3.6). Значение ρ_+ – это такое минимальное значение параметра ρ в (2.3), при котором множество корней семейства характеристических полиномов (2.7)–(2.8), находясь внутри заданной области ***S***, касается границы этой области в одной или нескольких точках s. Таким образом, ρ_+ есть решение задачи 1.

С учетом всего вышесказанного можем сформулировать следующее утверждение.

Утверждение 2. Для всех значений ρ в (2.3) таких, что выполнено

$$\rho \le \rho_+$$

для семейства характеристических полиномов замкнутой системы, определенного формулами (2.7), (2.8) и (2.3), гарантированно выполнено условие (2.9).

При заданном значении параметра ρ в (2.3) утверждение 2 позволяет проверить, не нарушено ли целевое условие (2.9). Кроме того, по формуле (3.15) определяется минимальное значение параметра ρ, при котором условие (2.9) впервые будет нарушено.

4. Заключение

Сформулированные в статье задачи и утверждения можно рассматривать как методику факторизации (выделения) операторов «структурных возмущений» из общей передаточной функции объекта управления таких, что для замкнутой системы гарантированно не нарушаются робастная устойчивость и качество управления. Данная методика может быть реализована на ЭВМ. Применение утверждения 2 в данной работе видится в двух направлениях.

1. Для объектов высокого динамического порядка изложенная в работе технология может рассматриваться в качестве методики (обоснованного) последовательного редуцирования динамического порядка объекта (и, как следствие, понижения динамического порядка регулятора).

2. Для объектов управления, заданных семейством моделей разных динамических порядков, в котором можно выделить общую «основную динамику» объекта, а остальные особенности поведения рассматривать в качестве операторов так называемых «структурных возмущений». Для таких объектов управления изложенная в статье методика может рассматриваться в качестве обоснования использования одного регулятора, гарантированно обеспечивающего заданное качество управления.

Приложение

Доказательство утверждения 1. Изменение количества корней, принадлежащих внутренней части области $\boldsymbol{S}$ (при изменении параметра $\vec{X} \in \mathbf{E}$) может произойти только если (хотя бы) один из них пересечет границу области $\boldsymbol{S}$ и условие (3.3) нарушится. Что и требовалось доказать.

Список литературы

1. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.
2. *Соловьёв И. Г.* Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск: ВО «Наука». Сиб. изд. фирма, 1992.
3. *Паршуков А. Н.* Вычислительная технология анализа робастного качества управления в условиях структурно-параметрической неопределенности описания в объекте // Тр. VI Междунар. конф. «Идентификация систем и задачи управления» SICPRO'07 (Москва, 29 янв. – 1 фев. 2007 г.). М.: Ин-т проблем управления им. В. А. Трапезникова, 2007. С. 123–131.
4. *Поляк Б. Т., Цыпкин Я. З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–55.
5. *Ackermann J.* Robust control: systems with uncertain physical parameters. London: Springer, 1993.
6. *Barmish B. R.* New tools for robustness of linear systems. New York: MacMillan, 1994.

Материал поступил в редколлегию 15.03.2016

A. N. Parshukov

Tyumen Industrial University
38 Volodarskij Str., Tyumen, 625000, Russian Federation

anparshukov@mail.ru

THE NEW METHOD OF FACTORIZATION OF OPERATORS STRUCTURAL DISTURBANCE INTO TRANSFER FUNCTION OF OBJECT CONTROL

This paper presents a new method factorization of transfer function. Transfer function factorization on 'main dynamic' and 'structural disturbance' operators. The method factorization of 'structural disturbance' operators assurance robust stability and performance. Factorization 'structural disturbance' operators can use as for design reduced regulator as for design robust regulator. The results may be realized on computer.

Keywords: robustness, modal regulator, structural uncertainty.

References

1. Kuzovkov N. T. Modalnoye upravlenie i nablyudayushie ustroistva. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 184 p. (In Russ.)

2. Solovev I. G. Metody majorizatchii v analize i sinteze adaptivnyh sistem. Novosibirsk, Nauka, Sibirskaya izdatelskaya firma, 1992, 188 p. (In Russ.)

3. Parshukov A. N. Vichislitelnaya tehnologiya analiza robastnogo kachestva upravleniya v usloviyah strukturno-parametricheskoi neopredelennosti opisaniya v obekte. *Works VI Intern. conf.* «*Inentification systems and problems of control*» *SICPRO'07* (Moscow, 29 jan. – 1 feb. 2007g.). Moscow, Institute of Control Sciences, 2007, p. 123–131. (In Russ.)

4. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Chastotnye criterii robastnoy ustoichivosti i aperiodichnosti lineinyh sistem. *AiT*, 1990, no. 9, p. 45–55. (In Russ.)

5. Ackermann J. et al. Robust control: systems with uncertain physical parameters. London, Springer, 1993, 413 p.

6. Barmish B. R. New tools for robustness of linear systems. New York, MacMillan, 1994, 394 p.