УДК 004

А. Н. Паршуков

Тюменский индустриальный университет
ул. Володарского, 38, Тюмень, 625000, Россия

anparshukov@mail.ru

КРИТЕРИЙ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМОЙ В УСЛОВИЯХ СТРУКТУРНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ОПИСАНИЯ В ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

В развитие принципа исключения нуля сформулирован критерий робастного качества управления для линейных систем, построенных на основе объекта управления со структурно-параметрической неопределенностью описания и модального регулятора. Обоснована мера робастных свойств для указанных систем. Предложенный критерий может быть реализован на ЭВМ.

Ключевые слова: робастность, модальный регулятор, структурно-параметрическая неопределенность.

Предварительные сведения

Для удобства изложения сформулируем основные понятия и обозначения, используемые в тексте данной работы. Обозначим:

$\boldsymbol{R}^n$ – пространство n-мерных вещественных векторов;

$\boldsymbol{C}^1$ – комплексную плоскость.

Под *полиномиальным оператором* степени l будем понимать дифференциальный оператор вида:

$$f(l,p) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot p^i \ , \tag{1}$$

где f_i – постоянные коэффициенты ($i \in \overline{0,l}$); p^i – оператор дифференцирования по времени $p^i \doteq d^i / d\,t^i$.

В изображениях по Лапласу полиномиальному оператору (1) соответствует алгебраический полином:

$$f(l,s) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot s^i \ ,$$

определенный на комплексной плоскости $\boldsymbol{C}^1$, здесь за s принята переменная преобразования Лапласа.

Семейство полиномиальных операторов степени l будем задавать в одном из двух представлений. В виде

$$F(l,p) \doteq \{ f(l,\vec{X}) = \left(f_0 + x_0\right) + \sum_{i=1}^{l} (f_i + x_i) \cdot p^i : \vec{X} \in \boldsymbol{E} \} \tag{2}$$

Паршуков А. Н. Критерий робастной устойчивости и качества управления линейной замкнутой системой в условиях структурно-параметрической неопределённости описания в передаточной функции объекта управления // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2017. Т. 15, № 1. С. 59–69.

здесь введено обозначение

$$\vec{X} \doteq col(x_0, x_1, \cdots, x_l),$$

а $\boldsymbol{E}$ – односвязная область допустимых значений вектора параметров $\vec{X}$ семейства (2).

Будем предполагать, что область $\boldsymbol{E}$ такова, что выполняется

$$x_l \neq f_l, \qquad \forall \vec{X} \in \boldsymbol{E}. \tag{3}$$

Очевидно, семейство операторов (2) также может быть записано в виде

$$F(l,p) = f(l,p) + \Delta F(l,p), \tag{4}$$

где $f(l,p)$ – полиномиальный оператор

$$f(l,p) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot p^i, \qquad \vec{X}_0 \doteq col(f_0, f_1, \cdots, f_l), \tag{5}$$

а $\Delta F(l,p)$ – семейство операторов

$$\Delta F(l,p) \doteq \{\Delta f(l,\vec{X}) = x_0 + \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot p^i : \vec{X} \in \boldsymbol{E}\}.$$

Семейству полиномиальных операторов (4) в изображениях по Лапласу соответствует семейство алгебраических полиномов вида

$$F(l,s) = f(l,s) + \Delta F(l,s), \tag{6}$$

где $f(l,s)$ – полином

$$f(l,s) = f_0 + \sum_{i=1}^{l} f_i \cdot s^i, \tag{7}$$

а $\Delta F(l,s)$ – семейство полиномов

$$\Delta F(l,s) \doteq \{\Delta f(l,\vec{X}) = x_0 + \sum_{i=1}^{l} x_i \cdot s^i : \vec{X} \in \boldsymbol{E}\}. \tag{8}$$

Отметим следующие свойства семейства полиномов вида (6):

1) коэффициенты полиномов в (6) непрерывно зависят от вектора $\vec{X}$;
2) область $\boldsymbol{E}$ допустимых значений параметров односвязна;
3) из условия (3) следует, что старший коэффициент полиномов в (6) не обращается в ноль; таким образом, при всех $\vec{X}$ из заданной области $\boldsymbol{E}$ полиномы семейства сохраняют порядок l.

Для точки s ($s \in \boldsymbol{C}^1$) полиномиальное семейство (6) представляет собой область на комплексной плоскости (будем обозначать ее как $\boldsymbol{F}(s)$). Данная область называется *областью значений* полиномиального семейства (6); это двумерный образ множества $\boldsymbol{E}$ при преобразовании $F(l, s)$. Для полинома (5) множество значений $f(s)$ представляет собой точку на комплексной плоскости. С учетом представления (6)–(8) область значений $\boldsymbol{F}(s)$ может быть записана в виде

$$\boldsymbol{F}(s) = f(s) + \Delta \boldsymbol{F}(s),$$

причем $f(s)$ – точка, а $\Delta \boldsymbol{F}(s)$ – область на $\boldsymbol{C}^1$.

Актуальность темы

Классическая постановка задачи синтеза модального регулятора может быть сформулирована следующим образом. Линейный одномерный динамический объект управления P назначается дифференциальным уравнением n_1-го порядка, записанным в операторной форме:

$$a(n_1,p)\,y(t) = b(n_2,p)\,u(t), \quad a_{n_1} = 1, \quad n_1 > n_2, \tag{9}$$

здесь u – входной (управляющий) сигнал, y – выходной (управляемый) сигнал, t – непрерывное время; $a(n_1, p)$ и $b(n_2, p)$ – дифференциальные операторы.

В технологии синтеза модального регулятора (описанной в работе [1]) регулятор R ищется в виде динамического звена l-го порядка:

$$\beta(l,p)\,u(t) = \alpha(l,p)\,y(t) + \chi(l,p)g(t), \qquad \beta_l = 1, \tag{10}$$

здесь $g(t)$ – заданный эталонный сигнал. В результате передаточная функция (ПФ) замкнутой системы принимает вид

$$W^{cl.}(s)=\frac{b(n_2,s)\cdot\chi(l,s)}{a(n_1,s)\cdot\beta(l,s)-b(n_2,s)\cdot\alpha(l,s)}, \tag{11}$$

при этом характеристический полином замкнутой системы

$$a^{cl.}(n_1+l,s)=a(n_1,s)\cdot\beta(l,s)-b(n_2,s)\cdot\alpha(l,s). \tag{12}$$

Качество управления замкнутой системой назначается в виде *ограниченной односвязной замкнутой* области $\boldsymbol{S}$, определяющей допустимое расположение полюсов ПФ замкнутой системы на $\boldsymbol{C}^1$.

Известно, что любое заданное расположение полюсов ПФ замкнутой системы (11) можно обеспечить динамическим регулятором порядка $l = n_1 - 1$ (и выше) [2]. При этом коэффициенты регулятора (10) находятся из условия

$$a^{et.}(n_1+l,s)=a(n_1,s)\cdot\beta(l,s)-b(n_2,s)\cdot\alpha(l,s), \qquad a^{et.}_{n_1+l}=1 \tag{13}$$

где за $a^{et.}(n_1+l,s)$ обозначен характеристический полином эталонной системы. Полином $a^{et.}(n_1+l,s)$ выбирается произвольным образом при условии, что все множество его корней

$$\boldsymbol{\Lambda}(a^{et.})=\{\lambda : a^{et.}(n_1+l,\lambda)=0\}\subset\boldsymbol{C}^1$$

лежит внутри заданной области $\boldsymbol{S}$, т. е. выполняется

$$\boldsymbol{\Lambda}(a^{et.})\subset \operatorname{int}\boldsymbol{S}, \tag{14}$$

здесь за $\operatorname{int}\boldsymbol{S}$ обозначена внутренняя часть области $\boldsymbol{S}$.

Решение уравнения (13) сводится к решению следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$C\cdot\vec{R}=\vec{D},$$

где C – матрица

$$C=\left\{c_{i,j}\right\},\qquad i\in\overline{1,n_1+l},\qquad j\in\overline{1,\,2l+1},$$

составленная из коэффициентов полиномов a и b объекта (9) по правилу

$$c_{i,j}=\begin{cases}0,\ i<j,\\ a_{i-j},\ i\in\overline{j,\,n_1+j},\\ 0,\ i>n_1+j,\end{cases}$$

при $i\in\overline{1,n_1+l}$, $j\in\overline{1,l}$, и

$$c_{i,j}=\begin{cases}0,\ i<j-l,\\ -b_{l+i-j},\ i\in\overline{j-l,\,n_2+j-l},\\ 0,\ i>n_2+j-l,\end{cases}$$

при $i\in\overline{1,n_1+l}$, $j\in\overline{l+1,\,2l+1}$; $\vec{R}$ – вектор коэффициентов регулятора (10):

$$\vec{R}=col(r_1,\ldots,r_{2l+1}),$$

$$r_j=\begin{cases}\beta_{j-1},\quad j\in\overline{1,l},\\ \alpha_{j-l-1},\quad j\in\overline{l+1,\,2l+1};\end{cases}$$

$\vec{D}$ – вектор, составленный из коэффициентов полиномов $a^{et.}$ и a:

$$\vec{D}=col\left(d_1,\ldots,d_{n_1+l}\right),$$

$$d_j=\begin{cases}a^{et.}_{j-1},\quad j\in\overline{1,l},\\ a^{et.}_{j-1}-a_{j-l-1},\quad j\in\overline{l+1,\,n_1+l}.\end{cases}$$

Отметим, что функции $W^{cl.}$ и $a^{cl.}$ относятся к классу *мероморфных*.

Проверка принадлежности полюсов ПФ замкнутой системы заданной области $\boldsymbol{S}$ может выполняться с помощью следующей теоремы, известной как «принцип аргумента».

Теорема 1 [3]. Если функция $W^{cl.}(s)$ мероморфна в некоторой ограниченной односвязной замкнутой области $\boldsymbol{S}$ с границей $\partial\boldsymbol{S}$ и не имеет на ее границе ни нулей, ни полюсов, то справедлива следующая формула:

$$\Delta_{\partial S} \arg W^{cl.} = 2\pi(N - P),$$

где N и P – соответственно количества нулей и полюсов функции $W^{cl.}$ в $\boldsymbol{S}$, учтенных каждый с его кратностью, а $\Delta_{\partial S} \arg W^{cl.}$ – изменение аргумента $W^{cl.}(s)$ при обходе вдоль контура области $\boldsymbol{S}$ (ориентация контура стандартная).

На практике чаще используется очевидное следствие из приведенного «принципа аргумента».

Следствие 1.1. Для того чтобы все $n_1 + l$ корней полинома (12) лежали внутри области $\boldsymbol{S}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\Delta_{\partial S} \arg a^{cl.} = 2\pi(n_1 + l).$$

Доказательство следствия 1.1

Полином (12) не имеет полюсов. Если выполняется

$$\Delta_{\partial S} \arg a^{cl.} \neq 2\pi(n_1 + l),$$

то согласно принципу аргумента хотя бы один корень из $n_1 + l$ находится либо на границе области $\boldsymbol{S}$, либо вне области $\boldsymbol{S}$. Что и требовалось доказать.

Подобная задача синтеза регулятора и последующего анализа качества управления усложняется, если в описании объекта присутствует неопределенность. Будем выделять неопределенность объекта, связанную с неопределенностью коэффициентов дифференциального уравнения (9) (параметрическая неопределенность), и неопределенность, связанную с неточностью задания порядка дифференциального уравнения («структурная» неопределенность). Проблема синтеза регулятора и анализа качества управления в условиях как параметрической, так и структурной неопределенности описания в объекте P достаточно широко представлена в литературе. Можно выделить два главных направления, в рамках которых решается такая задача:

1) принцип исключения нуля;
2) методы теории H^∞.

Принцип исключения нуля впервые сформулирован в работах [4; 5]. Обобщениям принципа исключения нуля на различные случаи, а также разработке на их основе вычислительных методик проверки робастной устойчивости и качества управления посвящено большое количество статей, из которых можно отметить, например, работы [6–10].

Следует отметить, что критерии, предложенные в перечисленных работах, требуют, чтобы количество нулей и полюсов в ПФ замкнутой системы было конечно, и более того, заранее известно, что делает данные критерии пригодными для исследования в условиях параметрической неопределенности, но противоречит понятию структурной неопределенности.

Методы теории H^∞, представленные в работах [11–14] и др., позволяют формулировать достаточное условие робастной устойчивости при наличии как параметрической, так и структурной неопределенности описания. Однако существенным недостатком таких критериев является использование H^∞ метрики операторов, что сильно ограничивает классы операторов, для которых выполняются условия этих критериев.

В настоящей работе на основе принципа исключения нуля разрабатывается критерий робастной устойчивости и робастного качества управления для линейной замкнутой системы при наличии как параметрической, так и структурной неопределенности описания в объекте управления.

Постановка задачи

Объект управления P со структурно-параметрической неопределенностью будем задавать в виде

$$E'(m_1, p)\cdot A(n_1, p)\, y(t) = E''(m_2, p)\cdot B(n_2, p)\, u(t), \tag{15}$$

где семейства операторов

$$A(n_1, p) \dot{=} \{a(n_1, \vec{X}_1) = (a_0 + \delta a_0) + \sum_{i=1}^{n_1-1} (a_i + \delta a_i) \cdot p^i + p^{n_1} : \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n_1}} \},$$

$$B(n_2, p) \dot{=} \{b(n_2, \vec{X}_2) = (b_0 + \delta b_0) + \sum_{i=1}^{n_2} (b_i + \delta b_i) \cdot p^i : \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n_2}+1} \}, \tag{16}$$

$$n_1 > n_2,$$

здесь введены обозначения

$$\vec{X}_3 \dot{=} col(\delta a_0, \delta a_1, \cdots, \delta a_{n_1-1}), \qquad \vec{X}_4 \dot{=} col(\delta b_0, \delta b_1, \cdots, \delta b_{n_2}),$$

будем называть операторами «основной динамики» объекта; а семейства операторов

$$E'(m_1, p) \dot{=} \{e'(m_1, \vec{X}_3) = 1 + \sum_{i=1}^{m_1} (e'_i + \delta e'_i) \cdot p^i : \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1 \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{m_1}} \},$$

$$E''(m_2, p) \dot{=} \{e''(m_2, \vec{X}_4) = 1 + \sum_{i=1}^{m_2} (e''_i + \delta e''_i) \cdot p^i : \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2 \subset \boldsymbol{R}^{m_2} \}, \tag{17}$$

$$m_1 \geq m_2,$$

здесь введены обозначения

$$\vec{X}_3 \dot{=} col(\delta e'_1, \cdots, \delta e'_{m_1}), \qquad \vec{X}_4 \dot{=} col(\delta e''_1, \cdots, \delta e''_{m_2}),$$

будем называть «структурными возмущениями».

Пусть семейства полиномов (16) и (17) такие, что:

1) коэффициенты полиномов $a(n_1, \vec{X}_1)$, $b(n_2, \vec{X}_2)$, $e'(m_1, \vec{X}_3)$ и $e''(m_2, \vec{X}_4)$ непрерывно зависят от векторов $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{X}_4$ их параметров;

2) области $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ односвязны;

3) области $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ таковы, что выполняются

$$\delta e'_{m_1} \neq -e'_{m_1}, \quad \forall \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1, \qquad \delta e''_{m_2} \neq -e''_{m_2}, \quad \forall \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2;$$

4) все множество нулей семейства полиномов E' находится внутри области $\boldsymbol{S}$; т. е. выполняется

$$\Lambda(E') \subset \operatorname{int} \boldsymbol{S}. \tag{18}$$

Все полиномы семейств $A(n_1, p)$, $E'(m_1, p)$ и $E''(m_2, p)$ имеют одинаковые порядки (n_1, m_1 и m_2 соответственно); данный вывод является следствием того, что их коэффициенты при старших степенях не обращаются в ноль.

В дальнейшем для удобства изложения операторы $A(n_1, p)$ и $B(n_2, p)$ будем представлять в следующем виде:

$$A(n_1, p) = a_0(n_1, p) + \Delta A(n_1 - 1, p),$$
$$B(n_2, p) = b_0(n_2, p) + \Delta B(n_2, p),$$

где

$$a_0(n_1, p) = a_0 + \sum_{i=1}^{n_1-1} a_i \cdot p^i + p^{n_1},$$

$$\Delta A(n_1 - 1, p) \dot{=} \{\delta a(n_1 - 1, \vec{X}_1) \dot{=} \delta a_0 + \sum_{i=1}^{n_1-1} \delta a_i \cdot p^i : \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n_1}} \},$$

$$b_0(n_2, p) = b_0 + \sum_{i=1}^{n_2} b_i \cdot p^i,$$

$$\Delta B(n_2, p) \dot{=} \{\delta b(n_2, \vec{X}_2) \dot{=} \delta b_0 + \sum_{i=1}^{n_2} \delta b_i \cdot p^i : \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B} \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{n_2}+1} \}.$$

Регулятор (10) l-го порядка будем рассчитывать по «основной динамике» объекта P, т. е. из условия

$$a^{et.}(n_1 + l, s) = a_0(n_1, s) \cdot \beta(l, s) - b_0(n_2, s) \cdot \alpha(l, s), \qquad a^{et.}_{n_1+l} = 1, \tag{19}$$

причем

$$\mathbf{\Lambda}(a^{et.}) \subset \operatorname{int}\mathbf{S}\,. \tag{20}$$

В результате передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$W^{cl.}(s) = \frac{E''(m_2,s)\cdot B(n_2,s)\cdot \chi(h,s)}{E'(m_1,s)\cdot A(n_1,s)\cdot \beta(l,s) - E''(m_2,s)\cdot B(n_2,s)\cdot \alpha(l,s)}\,.$$

При этом характеристический полином замкнутой системы

$$A^{cl.}(n_1+m_1+l,s) = E'(m_1,s)\cdot A(n_1,s)\cdot \beta(l,s) - E''(m_2,s)\cdot B(n_2,s)\cdot \alpha(l,s)\,,$$

или окончательно

$$\begin{gathered} A^{cl.}(n_1+m_1+l,s) = \{a^{cl.}(n_1+m_1+l,s) \doteq \mathrm{e}'(m_1,\vec{X}_3)\cdot a^{et.}(n_1+l,s) + \delta a(n_1-1,\vec{X}_1)\cdot \beta(l,s) - \\ -\delta b(n_2,\vec{X}_2)\cdot \alpha(l,s) + (\mathrm{e}'(m_1,\vec{X}_3) - \mathrm{e}''(m_2,\vec{X}_4))\cdot b(n_2,s)\cdot \alpha(l,s) : \forall \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A}, \\ \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B}, \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1, \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2\}\,. \end{gathered} \tag{21}$$

Обозначим за $\boldsymbol{A}^{cl.}(s)$ область значений функции (21) на комплексной плоскости:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{A}^{cl.}(s) = \{\mathrm{e}'(m_1,\vec{X}_3)\cdot a^{et.}(n_1+l,s) + \delta a(n_1-1,\vec{X}_1)\cdot \beta(l,s) - \delta b(n_2,\vec{X}_2)\cdot \alpha(l,s) + \\ +(\mathrm{e}'(m_1,\vec{X}_3) - \mathrm{e}''(m_2,\vec{X}_4))\cdot b(n_2,s)\cdot \alpha(l,s) : \forall \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A}, \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B}, \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1, \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2\}\,. \end{gathered} \tag{22}$$

Проверить робастное качество управления для характеристического полинома (21) можно при помощи следующей теоремы.

Теорема 2. Пусть семейство полиномов (21) содержит хотя бы один полином такой, что все его корни лежат внутри ограниченной односвязной замкнутой области $\boldsymbol{S}$. Тогда, для того чтобы все множество корней семейства (21) лежало внутри области $\boldsymbol{S}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$0 \notin \boldsymbol{A}^{cl.}(s)\,,\quad \forall s \in \partial \boldsymbol{S}\,, \tag{23}$$

здесь за $\partial\boldsymbol{S}$ обозначена граница области $\boldsymbol{S}$.

В данной теореме требуется, чтобы ноль был исключен из множества значений (22) при всех s ($s \in \partial\boldsymbol{S}$).

Следует отметить, что теорема 2 обобщает классическую формулировку принципа исключения нуля (см. работы [4; 5]), в котором рассматривается задача исследования робастной устойчивости (а следовательно, область $\boldsymbol{S}$ совпадает со всей левой полуплоскостью комплексной плоскости).

Доказательство теоремы 2

Изменение количества нулей функции (21), принадлежащих внутренней части области $\boldsymbol{S}$ (при изменениях параметров $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{X}_4$), может произойти, только если (хотя бы) один из них пересечет границу области $\boldsymbol{S}$ и условие (23) нарушится. Что и требовалось доказать.

Основную сложность использования теоремы 2 в проверке робастного качества управления мы видим в необходимости строить область (22) для каждой точки s контура $\partial\boldsymbol{S}$. В случае *выпуклых* областей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}_1$ и $\boldsymbol{E}_2$ такая область, по свойству конформности отображения, будет представлять выпуклую область на комплексной плоскости. Так, например, в случае интервальных ограничений на параметры полиномов в (21) можно доказать (см., работу [7]), что область (22) будет представлять выпуклый симметричный многоугольник с числом вершин вдвое большим, чем число варьируемых параметров полиномов. Следовательно, с возрастанием порядков m_1 и m_2 семейств операторов структурных возмущений соответственно возрастает и сложность построения такой области.

В случае невыпуклых областей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ методика построения области (22) не разработана.

В настоящей работе поставим следующую задачу: на основе теоремы 2 разработать критерий исследования робастной устойчивости и качества управления, пригодный для реализации на ЭВМ.

Основной результат
Критерий робастного качества управления

Рассмотрим новое множество функций, определенных следующим образом. Каждый элемент $a^{cl.}$ множества (21) разделим на полином $e'(m_1, \vec{X}_3)$, получим новый элемент

$$\tilde{a}^{cl.}(n_1 + l, s) \doteq \frac{a^{cl.}(n_1 + m_1 + l, s)}{e'(m_1, \vec{X}_3)},$$

или, в развернутом виде,

$$\tilde{a}^{cl.}(n_1 + l, s) = a^{et.}(n_1 + l, s) + \delta a(n_1 - 1, \vec{X}_1) \cdot \beta(l, s) -$$
$$- \delta b(n_2, \vec{X}_2) \cdot \alpha(l, s) + \left(1 - \frac{e''(m_2, \vec{X}_4)}{e'(m_1, \vec{X}_3)}\right) \cdot b(n_2, s) \cdot \alpha(l, s).$$

Множество элементов $\tilde{a}^{cl.}$ обозначим за $\tilde{A}^{cl.}$, таким образом:

$$\tilde{A}^{cl.}(n_1 + l, s) \doteq \{\tilde{a}^{cl.}(n_1 + l, s) \doteq a^{et.}(n_1 + l, s) + \delta a(n_1 - 1, \vec{X}_1) \cdot \beta(l, s) - \delta b(n_2, \vec{X}_2) \cdot \alpha(l, s) +$$
$$+ \left(1 - \frac{e''(m_2, \vec{X}_4)}{e'(m_1, \vec{X}_3)}\right) \cdot b(n_2, s) \cdot \alpha(l, s) : \forall \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A}, \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B}, \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1, \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2\}. \quad (24)$$

Как следует из определения (24), функция $\tilde{A}^{cl.}$ представляет собой множество дробных функций $\tilde{a}^{cl.}$, каждая из которых имеет (в общем случае) $n_1 + m_1 + l$ нулей и m_1 полюсов. В этом смысле будем говорить, что функция $\tilde{A}^{cl.}$ имеет $n_1 + m_1 + l$ нулей и m_1 полюсов. В соответствии с условием (18) все полюса дробных функций $\tilde{a}^{cl.}$ лежат внутри области $\boldsymbol{S}$.

Пусть из множества функций $\tilde{A}^{cl.}$ найдется хотя бы одна такая, что все ее нули лежат внутри области $\boldsymbol{S}$. Потеря количества нулей функции $\tilde{a}^{cl.}$ может происходить в одном из двух случаев:

1) при вариациях $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{X}_4$ часть нулей и полюсов функции $\tilde{a}^{cl.}$ в (24) совпадает; а поскольку совпадающие нули и полюса находятся внутри области $\boldsymbol{S}$, то их сокращение не повлияет на вариацию аргумента функции $\tilde{a}^{cl.}$;

2) при переходе (хотя бы) одного нуля функции $\tilde{a}^{cl.}$ через границу области $\boldsymbol{S}$.

Обозначим за $\tilde{\boldsymbol{A}}^{cl.}(s)$ область значений функции (24):

$$\tilde{\boldsymbol{A}}^{cl.}(s) = \{a^{et.}(n_1 + l, s) + \delta a(n_1 - 1, \vec{X}_1) \cdot \beta(l, s) - \delta b(n_2, \vec{X}_2) \cdot \alpha(l, s) +$$
$$+ \left(1 - \frac{\mathrm{e}''(m_2, \vec{X}_4)}{\mathrm{e}'(m_1, \vec{X}_3)}\right) \cdot b(n_2, s) \cdot \alpha(l, s) : \forall \vec{X}_1 \in \boldsymbol{A}, \vec{X}_2 \in \boldsymbol{B}, \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1, \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2\}. \quad (25)$$

В силу непрерывной зависимости коэффициентов дробной функции $\tilde{a}^{cl.}$ от векторов параметров $\vec{X}_1$, $\vec{X}_2$, $\vec{X}_3$, $\vec{X}_4$, а также односвязности областей $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{E}_2$ область значений $\tilde{\boldsymbol{A}}^{cl.}(s)$ тоже будет односвязной (возможно, невыпуклой). Тогда, на основе принципа исключения нуля можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть:

1) все множество нулей семейства полиномов E' лежит внутри ограниченной односвязной замкнутой области $\boldsymbol{S}$;

2) семейство функций (24) содержит хотя бы одну такую, что все ее нули лежат внутри области $\boldsymbol{S}$.

Тогда, для того чтобы (все) множество нулей семейства функций (24) лежало внутри области $\boldsymbol{S}$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$0 \notin \tilde{\boldsymbol{A}}^{cl.}(s), \quad \forall s \in \partial \boldsymbol{S}, \quad (26)$$

здесь за $\partial \boldsymbol{S}$ обозначена граница области $\boldsymbol{S}$.

Доказательство теоремы 3

Теорема 3 доказывается аналогично теореме 2.

С учетом выражения (25) условие (26) для точки s ($s \in \partial\boldsymbol{S}$) можно записать в виде

$$| a^{et\cdot}(n_1+l,s)+\delta a(n_1-1,\vec{X}_1)\cdot\beta(l,s)-\delta b(n_2,\vec{X}_2)\cdot\alpha(l,s)+(1-\frac{e''(m_2,\vec{X}_4)}{e'(m_1,\vec{X}_3)})\cdot b(n_2,s)\cdot\alpha(l,s)|>0\,,$$

$$\forall\vec{X}_1\in\boldsymbol{A},\ \vec{X}_2\in\boldsymbol{B},\ \vec{X}_3\in\boldsymbol{E}_1,\ \vec{X}_4\in\boldsymbol{E}_2\,. \qquad (27)$$

Воспользуемся существующими оценками для модуля суммы и модуля разности двух комплексных чисел. Для любой пары комплексных чисел a и b справедливо [3]:

$$|a+b|\le|a|+|b|,\qquad |a+b|\ge|a|-|b|,$$

$$|a-b|\le|a|+|b|,\qquad |a-b|\ge|a|-|b|. \qquad (28)$$

Пусть комплексные числа a и b принадлежат соответственно множествам $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$:

$$a\in\boldsymbol{A}\,,\ \ b\in\boldsymbol{B}\,.$$

Обозначим

$$a_+=\max_{\forall a\in\boldsymbol{A}}|a|,\qquad a_-=\min_{\forall a\in\boldsymbol{A}}|a|,\qquad b_+=\max_{\forall b\in\boldsymbol{B}}|b|,\qquad b_-=\min_{\forall b\in\boldsymbol{B}}|b|. \qquad (29)$$

Тогда выполняются

$$|a+b|\le|a|+|b|\le a_++b_+,\qquad |a+b|\ge|a|-|b|\ge a_--b_+\,,\qquad \forall\, a\in\boldsymbol{A},b\in\boldsymbol{B}\,, \qquad (30)$$

Справедливость соотношений (30) непосредственно следует из (28) и определений (29).

На основании формулы (27) с учетом соотношений (30) можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 4. Пусть:

1) все множество нулей семейства полиномов E' лежит внутри области $\boldsymbol{S}$;

2) семейство функций (24) содержит хотя бы одну, такую, что все ее нули лежат внутри $\boldsymbol{S}$.

Тогда, для того чтобы (все) множество нулей функций (24) лежало внутри области $\boldsymbol{S}$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\rho_->0\,,$$

где

$$\rho_-=\min_{\forall s\in\partial\boldsymbol{S}}\rho(s), \qquad (31)$$

$$\rho(s)=\rho_1(s)-\rho_2(s),$$

$$\rho_1(s)=\min_{\forall\vec{X}_1\in\boldsymbol{A},\,\vec{X}_2\in\boldsymbol{B}}\left|a^{et\cdot}(n_1+l,s)+\delta a(n_1-1,\vec{X}_1)\cdot\beta(l,s)-\delta b(n_2,\vec{X}_2)\cdot\alpha(l,s)\right|,$$

$$\rho_2(s)=\mu(s)\cdot b_+(s)\cdot|\alpha(l,s)|,$$

здесь

$$\mu(s)=\max_{\forall\vec{X}_3\in\boldsymbol{E}_1,\ \vec{X}_4\in\boldsymbol{E}_2}\left|1-\frac{e''(m_2,\vec{X}_4)}{e'(m_1,\vec{X}_3)}\right|,$$

$$b_+(s)=\max_{\forall\vec{X}_2\in\boldsymbol{B}}\left|b_0(n_2,s)+\delta b(n_2,\vec{X}_2)\right|\,.$$

Доказательство теоремы 4

Теорема 4 непосредственно получается из теоремы 3 с применением в (26) формулы (27) и с использованием оценок (30).

Определим на контуре $\partial\boldsymbol{S}$ функцию

$$\eta(s)=\begin{cases}\dfrac{\min\limits_{\forall\vec{X}_1\in\boldsymbol{A},\,\forall\vec{X}_2\in\boldsymbol{B}}\left|a^{et\cdot}(n_1+l,s)+\delta a(n_1-1,\vec{X}_1)\cdot\beta(l,s)-\delta b(n_2,\vec{X}_2)\cdot\alpha(l,s)\right|}{b_+(s)\cdot|\alpha(l,s)|}, & \\ \quad if\ b_+(s)\ne0,\ and\ \ \alpha(l,s)\ne0, & \\ +\infty,\quad if\quad b_+(s)=0,\quad or\quad \alpha(l,s)=0. & \end{cases} \qquad (32)$$

Функция η (s) в точке s определяет такие предельно допустимые вариации векторов $\vec{X}_3$ и $\vec{X}_4$ в (17), при которых функция ρ (s) в этой точке становится равной нулю (за исключением случая, когда в этой точке s хотя бы один из полиномов $B(n_2, s)$ и $\alpha(l, s)$ имеет ноль). Тогда теорему 4 можно переформулировать в следующем виде.

Следствие 4.1. Пусть:

1) все множество нулей семейства полиномов E' лежит внутри области $\boldsymbol{S}$;

2) семейство функций (24) содержит хотя бы одну такую, что все ее нули лежат внутри $\boldsymbol{S}$.

Тогда, для того чтобы (все) множество нулей функций (24) лежало внутри области $\boldsymbol{S}$, достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\max_{\forall \vec{X}_3 \in \boldsymbol{E}_1,\ \vec{X}_4 \in \boldsymbol{E}_2} \left| 1 - \frac{\mathrm{e}''(m_2, \vec{X}_4)}{\mathrm{e}'(m_1, \vec{X}_3)} \right| < \eta(s) \tag{33}$$

для всех s, принадлежащих контуру $\partial\boldsymbol{S}$.

Теоремы 2 и 4 представляют основной результат данной статьи.

Следует отметить, что результат теоремы 4, на наш взгляд, более интересен, чем «принцип исключения нуля» (т. е. теорема 2), поскольку:

1) не требует построения областей на комплексной плоскости для проверки робастного качества управления;

2) не требует точного знания семейств операторов структурных возмущений E' и E'' (и даже их порядков m_1 и m_2); условие (33) позволяет формировать границы параметров одного семейства полиномов структурных возмущений в зависимости от другого семейства;

3) основным преимуществом данного критерия является введение функции (31), позволяющей оценивать степень удаленности характеристического полинома (21) от границы потери робастного качества управления; таким образом, функция (31) может использоваться для сравнения между собой различных пар операторов E' и E'' (при неизменных прочих условиях);

4) для каждой точки s контура $\partial\boldsymbol{S}$ расчет функции (32), участвующей в проверке робастного качества управления, (33) сводится к решению задачи поиска экстремумов функций с ограничениями на векторы варьируемых параметров, заданных областями $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Данная задача относится к хорошо изученным задачам поиска условного экстремума функции и решается методом неопределенных множителей Лагранжа [15].

Кроме того, функция (31) может быть использована при вариациях коэффициентов полинома эталона (19) с целью повысить уровень робастного качества управления для характеристического полинома замкнутой системы (21).

Теорема 4 в сравнении с теоремой 2 (принципом исключения нуля) формулирует только достаточные условия робастных свойств.

Непосредственно сравнивать критерии робастности, полученные в теореме 4, и на основе методов теории H^∞ не удается, поскольку возникает необходимость в огрублении результатов теорем.

Заключение

В настоящей работе на основе принципа исключения нуля получен новый критерий робастного качества управления. Данный критерий позволяет исследовать робастное качество управления при заданных операторах структурных возмущений, а также формировать семейства операторов структурных возмущений, удовлетворяющих заданному качеству управления.

Введенная функция (31) позволяет оценивать степень робастного качества управления замкнутой системы.

Список литературы

1. *Кузовков Н. Т.* Модальное управление и наблюдающие устройства. М.: Машиностроение, 1976.

2. *Соловьев И. Г.* Методы мажоризации в анализе и синтезе адаптивных систем. Новосибирск: Наука, 1992.

3. *Лаврентьев М. А.*, *Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. 4-е изд., испр. М.: Наука, 1973. 736 с.

4. *Ackermann J.* Robust control: systems with uncertain physical parameters. London: Springer, 1993.

5. *Barmish B. R.* New tools for robustness of linear systems. New York: MacMillan, 1994.

6. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. 1990. № 9. С. 45–55.

7. *Киселев О. Н.*, *Поляк Б. Т.* Критический коэффициент усиления для последовательности неопределенных звеньев // АиТ. 1995. № 9. С. 93–104.

8. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Устойчивость и робастная устойчивость однотипных систем // АиТ. 1996. № 11. С. 91–104.

9. *Шарый С. П.* Новые характеризации множества решений для интервальных систем линейных уравнений // Вычислительные технологии. 2016. Т. 21, № 5. С. 111–118.

10. *Паршуков А. Н.* Метод выделения операторов «структурных возмущений» в передаточной функции объекта управления // Вестн. НГУ. Серия: Информационные технологии. 2016. Т. 14, № 2. С. 100–109.

11. *Francis B. A.* A course in H^∞ control theory. Lect. Notes Control Inf. Sci., V. 88, Berlin: Springer, 1987.

12. *Doyle J. C.*, *Francis B. A.*, *Tannenbaum A.* Feedback control theory. New York: MacMillan, 1992.

13. *Поляк Б. Т.*, *Цыпкин Я. З.* Робастный критерий Найквиста // АиТ. 1992. № 3. С. 25–31.

14. *Киселев О. Н.*, *Поляк Б. Т.* Синтез регуляторов низкого порядка по критерию H^∞ и по критерию максимальной робастности // АиТ. 1999. № 3. С. 119–130.

15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. М.: Физматлит, 2001. Т. 1. 616 с.

Материал поступил в редколлегию 25.02.2017

A. N. Parshukov

Tyumen Industrial University
38 Volodarskiy Str., Tyumen, 625000, Russian Federation

anparshukov@mail.ru

NEW ROBUST STABILITY AND ROBUST PERFORMANCE CRITERION FOR LINEAR CLOSED-LOOP SYSTEMS WITH INDETERMINACY OF STRUCTURE AND PARAMETRIC UNCERTAINTY INTO TRANSFER FUNCTION OF OBJECT CONTROL

This paper presents a new criterion of robust performance for linear closed-loop systems with indeterminacy of structure and parametric uncertainty into transfer function of object control. Established measure of robustness for linear systems with uncertainty. The results may be realized on computer.

Keywords: robustness, indeterminacy of structure, parametric uncertainty.

References

1. Kuzovkov N. T. Modalnoye upravlenie i nablyudayushie ustroistva. Moscow, Mashinostroenie, 1976, 184 p. (in Russ.)

2. Solovev I. G. Metody majorizatchii v analize i sinteze adaptivnyh sistem. Novosibirsk, izd-vo VO Nauka, Sibirskaya izdatelskaya firma, 1992, 188 p. (in Russ.)

3. Lavrent'ev M. A., Shabat B. V. Metody teorii funktshiy compleksnogo peremennogo. Izd. Moscow, Glavnaya redaktchiya fiziko-matematicheskoy literatury izdatelstva 'Nauka', 1973, 736 p. (in Russ.)

4. Ackermann J. et al. Robust control: systems with uncertain physical parameters. London, Springer, 1993, 413 p.

5. Barmish B. R. New tools for robustness of linear systems. New York, MacMillan, 1994, 394 p.

6. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Chastotnye criterii robastnoy ustoichivosti i aperiodichnosti lineinyh sistem. *AiT*, 1990, № 9, p. 45–55. (in Russ.)

7. Kiselev O. N., Polyak B. T. Kriticheskii koeffitchient usileniya dlya posledovatelnosti neopredelennih zven'ev. *AiT*, 1995, № 9, p. 93–104. (in Russ.)

8. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Ustoichivost' i robastnaya ustoichivost odnotipnih sistem. *AiT*, 1996, № 11, p. 91–104. (in Russ.)

9. Sharii S. P. Novie harakterizatchii mnozhestva reshenii dlya intervalnih sistem lineinih uravnenyi. Vichislitel'nye tehnologii, 2016, vol. 21, № 5, p. 111–118. (in Russ.)

10. Parshukov A. N. Metod vydeleniya operatorov 'strukturnyh vozmushenyi' v peredatochnoy funktchii ob'ekta upravleniya. *Vestnik NGU. Seriya: Informatchionnye tehnologii*, 2016, № 2, p. 100–109. (in Russ.)

11. Francis B. A. A course in H^{∞} control theory. Lect. Notes Control Inf. Sci., V. 88, Berlin, Springer, 1987.

12. Doyle J. C., Francis B. A., Tannenbaum A. Feedback control theory. New York, MacMillan, 1992.

13. Polyak B. T., Tchipkin Ya. Z. Robastnyi kriterii Nyquist'a. *AiT*, 1992, № 3, p. 25–31. (in Russ.)

14. Kiselev O. N., Polyak B. T. Sintez regulyatorov nizkogo poryadka po kriteriy H^{∞} i po kriteriy maksimal'noy robastnosti. *AiT*, 1999, № 3, p. 119–130. (in Russ.)

15. Fihtengol'tch G. M. Kurs differentchial'nogo i integral'nogo ischisleniya. Moscow, Fizmatlit, 2001, vol. 1, 616 p. (in Russ.)

For citation:

Parshukov A. N. New Robust Stability and Robust Performance Criterion for Linear Closed-Loop Systems with Indeterminacy of Structure and Parametric Uncertainty into Transfer Function of Object Control. *Vestnik NSU. Series*: *Information Technologies*, 2017, vol. 15, no. 1, p. 59–69. (in Russ.)