УДК 519.87
JEL A 13

Е. А. Галькова [1], Л. С. Маергойз [2]

[1] *Красноярский институт железнодорожного транспорта*
ул. Ладо Кецховели, 89, Красноярск, 660028, Россия

[2] *Институт экономики и управления бизнес-процессами*
Сибирского федерального университета
пр. Свободный, 82, Красноярск, 660041, Россия

resurs7777@yandex.ru, bear.lion@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К МНОГОЭТАПНОМУ РАСПРЕДЕЛЕНИЮ СОЦИАЛЬНО ЗНАЧИМОГО РЕСУРСА ПРИ НАЛИЧИИ РЕЙТИНГА ПОТРЕБИТЕЛЕЙ *

Дано описание математического подхода к распределению ограниченного ресурса социально экономического содержания между группами людей, находящимися в дифференцированных условиях, в случае, когда оно происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. Этот подход базируется на разработанном ранее математическом алгоритме однократного справедливого распределения ограниченного социально значимого ресурса при наличии двухуровневой шкалы: рейтинга его потребителей (групп людей) и числовой шкалы, отражающей объем их потребностей. Дана численная реализация алгоритма на примере решения задачи управления коллективным инвестированием долгосрочного строительства объекта недвижимости, когда инвесторы вносят денежные вклады фирме-застройщику в несколько этапов. Кроме этого, в связи с денежным характером ресурса представлена математическая модель «рационального» взаимодействия инвесторов как внутри каждой из групп, так и между группами, с целью своевременного инвестирования фирмы-застройщика на каждом этапе финансирования. Приведена численная иллюстрация этой модели на том же примере.

Ключевые слова: математическая модель, математический алгоритм, принципы справедливого распределения ограниченного ресурса, рейтинг потребителей, многоэтапное распределение социально значимого ресурса, управление коллективным инвестированием.

Введение

Данная статья непосредственно примыкает к циклу работ [1–5], посвященных разработке математических алгоритмов *справедливого* распределения ограниченного социально значимого ресурса между группами людей, находящимися в дифференцированных условиях. Это означает, что распределение ресурса, пропорциональное, например, числу участников «дележа» ресурса, не является «справедливым». В этих исследованиях рассматривался случай «одномоментного» распределения имеющегося в наличии ресурса. При этом система потребителей ресурса характеризовалась *двухуровневой* шкалой: определенным рейтингом их «престижности» и числовой шкалой, отражающей объем потребностей этих групп людей.

* Авторы признательны профессору Р. Г. Хлебопросу за ценные замечания, высказанные при обсуждении результатов этой работы.

Галькова Е. А., *Маергойз Л. С.* Математический подход к многоэтапному распределению социально значимого ресурса при наличии рейтинга потребителей // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2015. Т. 15, вып. 1. С. 13–22.

В связи с этим рассматриваемое в работе распределение ресурса условно называется *двухуровневым.*

Однако на практике нередко возникают ситуации, когда ресурс поступает к потребителям поэтапно. Например, в случае стихийного бедствия в той или иной стране туда поступают гуманитарные грузы близкого содержания из разных стран в течение некоторого промежутка времени. Возникает проблема их «справедливого» распределения среди пострадавших районов. Подобная ситуация встречается и в случае долгосрочного строительства объекта недвижимости, когда инвесторы вносят денежные вклады фирме-застройщику в несколько этапов.

Цель статьи − разработка математического подхода к двухуровневому. распределению ограниченного ресурса социально-экономического содержания между группами людей на принципах справедливости для случая, когда оно происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. Сначала излагаются сведения из [1–6] о структуре оптимизационной математической модели «одномоментного» распределения ограниченного ресурса между группами людей (в переработанном виде, с дополнительными комментариями), которые понадобятся для изложения основного содержания статьи – математического алгоритма *справедливого* двухуровневого распределения ограниченного ресурса между группами людей, когда оно происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. При этом рассматривается вариант распределения, при котором этапы связаны между собой наличием *одинакового* рейтинга потребителей ресурса и *общего* для этих этапов «принципа управления». Найденный алгоритм поэтапного оптимального распределения ресурса иллюстрируется на конкретном примере решения задачи управления коллективным инвестированием в случае долгосрочного строительства недвижимости. В связи с денежным характером ресурса при наличии многоэтапного его распределения возникает проблема «рационального» взаимодействия инвесторов как внутри каждой из групп, так и между группами, с целью своевременного инвестирования фирмы-застройщика на каждом этапе финансирования. Разработана математическая модель этого процесса и дана ее численная реализация. Результаты работы частично докладывались на конференциях по математическим методам в экономике в Уфе (см. [6–7]).

Математический подход к решению проблемы при одноэтапном распределении ресурса

Математическая модель. Пусть N $(N > 2)$ – количество потребителей рассматриваемого ресурса, система которых характеризуется числовой шкалой в условных единицах (называемых в дальнейшем *баллами*), содержащая значения количественного признака, характерного для всех групп, их «веса» (например, численность групп, число квадратных метров недвижимости, на которое они претендуют и проч.). Пусть C – количество ресурса (в соответствующих единицах). С математической точки зрения распределение ресурса означает разбиение на сумму величины

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i, \tag{1}$$

где C_i – количество ресурса, предназначенное для группы с номером i. Пусть S_i – число баллов у группы с номером i, $i = 1, 2, ..., N$; $S = \sum_{i=1}^{N} S_i$ – общее количество баллов у всех групп; $s_i = S_i / S$ – доля баллов для группы с номером i.

Математическую модель распределения ресурса удобно описать, используя безразмерные величины. Полагаем, $c = C/S$ – средняя плотность ресурса (на 1 балл); $c_i = C_i / S_i$ – плотность ресурса для i-й группы; $\lambda_i = c_i / c$ – безразмерный коэффициент пропорциональности для i-й группы, где $i = 1, ..., N$. Эти коэффициенты нельзя выбирать произвольно. Описание множества их допустимых значений при распределении ресурса между потребителями дает следующее предложение.

Предложение 1. В указанных обозначениях количество ресурса C_i, предназначенное для группы с номером i, *определяется равенством*

$$C_i = c\lambda_i S_i = \lambda_i s_i C, \; i = 1,2,...,N, \tag{2}$$

где значения коэффициентов λ_i *удовлетворяют соотношению*

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i s_i = 1, \; \sum_{i=1}^{N} s_i = 1 \; (s_i > 0). \tag{3}$$

Принципы «справедливого» распределения ограниченного ресурса. Если в выделенную группу входит несколько человек, считаем ее однородной по своему составу. Поэтому естественным является следующий принцип распределения.

Внутри любой группы каждый участник получает количество ресурса, пропорциональное соответствующему числу его баллов (принцип пропорциональности внутри группы).

Пусть S_i – число баллов у группы с номером *i*, где $i \in \{1,2,...,N\}$, а C_i – количество ресурса, предназначенное для той же группы. Это означает, что если группа состоит из $n > 1$ человек, то $S_i = \sum_{m=1}^{n} S_{im}$, $C_i = \sum_{m=1}^{n} C_i^{(m)}$, где S_{im} – число баллов участника группы с номером *m*, $C_i^{(m)}$ – количество распределяемого ему ресурса, $m = 1,2,...,n.$ Из принципа пропорциональности и формулы (2) вытекает следующее предложение.

Предложение 2. В принятых обозначениях справедливо равенство

$$C_i^{(m)} = c_i S_{im} = \lambda_i c S_{im}, \; C_i = c_i S_i, \; m = 1,2,...,n, \; i = 1,2,...,N, \tag{4}$$

где c_i – плотность ресурса для i-й группы.

Учитывая наличие рейтинга потребителей (групп людей) при распределении ресурса, их нумерацию произведем в направлении возрастания плотностей ресурса (см. (4)) этих групп, т. е. $0 < c_1 < c_2 < ... < c_N$. Например, рейтинг пострадавших районов в чрезвычайной ситуации определялся возрастанием степени нуждаемости в гуманитарном ресурсе [5]. При формализации модели воспользуемся безразмерными коэффициентами пропорциональности $\lambda_i = c_i / c$, $i = 1,2,...,N,$ удовлетворяющими соответственно неравенству

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_N, \tag{5}$$

причем, как следует из (3), $\lambda_1 < 1$, $\lambda_N \in (1, 1/s_N)$.

Для оптимизации параметров модели понадобится следующий принцип.

Вектор $(c_2 - c_1, c_3 - c_2, ..., c_N - c_{N-1})$, *координаты которого характеризуют разности плотностей ресурса для групп со смежными номерами, имеет наименьшую длину* (принцип оптимальности).

Ассоциируем с принципом оптимальности целевой функционал

$$\Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^{N-1} (\lambda_{i+1} - \lambda_i)^2 = c^{-2} \sum_{i=1}^{N-1} (c_{i+1} - c_i)^2, \tag{6}$$

который в зависимости от содержания ресурса может быть назван функционалом «справедливости» или функционалом «компромисса» (см. [1–5]). Минимум такого функционала при условии (3) равен 0 и достигается при $\lambda_i = 1$, $i = 1,2,...,N,$ что соответствует пропорциональному распределению среди всех потребителей ресурса.

Для оптимизации параметров модели при условии (5) (при наличии рейтинга «престижности» среди потребителей ресурса) понадобится «принцип управления».

Введение дополнительного линейного соотношения между параметрами модели

$$\sum_{i=1}^{N} d_i \lambda_i = b. \tag{7}$$

Здесь $d_1, ..., d_n, b$ – фиксированные числа такие, что система уравнений (3), (7) совместная и имеет ранг 2. Условие (7) играет роль управляющего фактора процесса распределения ресурса. В конкретной ситуации можно выбрать наиболее востребованное ограничение такого вида, например, $\lambda_1 / \lambda_N = c_1 / c_N = \gamma$ или $\lambda_N = \gamma$, где γ – некоторое заданное число.

Оптимизационная математическая модель.

Задача А. Пусть $N > 2$. В обозначениях формулы (8) найти допустимые значения параметров $d_1, d_2, \ldots, d_N$, b и (единственные) значения коэффициентов пропорциональности $\lambda_1 = \lambda_1^*$, …, $\lambda_N = \lambda_N^*$, при которых достигается минимум функционала Ф (см. (6)) при выполнении соотношений (3), (5), (7). Ее решение дает следующую теорему.

Теорема 1. Пусть в обозначениях формул (3), (7)

$$D = \sum_{i=1}^{N} d_i, \;\; R_j = \sum_{i=j+1}^{N} d_i, \;\; P_j = \sum_{i=j+1}^{N} s_i, \;\; j = 1, \ldots, N-1,$$

а также

$$A_j = \frac{P_j D - R_j}{D - b}, \;\; j = 1, \ldots, N-1, \;\; \|A\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} A_j^2.$$

Решение задачи А *существует тогда и только тогда, когда выполняются условия*

$$D - b \neq 0, \;\; A_j > 0, \;\; j = 1, \ldots, N-1, \;\; \sum_{j=1}^{N-1} A_j P_j < \|A\|^2. \tag{8}$$

При этом функционал $\Phi(\lambda)$ (см. (6)) *достигает минимума при следующих единственных значениях коэффициентов пропорциональности*

$$\lambda_1^* = 1 - \sum_{j=1}^{N-1} \frac{A_j P_j}{\|A\|^2}, \;\; \lambda_k^* = \lambda_1^* + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{A_j}{\|A\|^2}, \;\; k = 2, \ldots, N, \tag{9}$$

а величина этого минимума m *определяется по формуле*

$$m = \frac{1}{\|A\|^2} = \frac{(D-b)^2}{\sum_{i=1}^{N-1} (P_i D - R_i)^2}.$$

Замечание. Близкий результат в существенно менее общей форме был найден в [1].

Теорема 1 и предложение 1 позволяют определить оптимальные параметры математической модели распределения ограниченного ресурса между потребителями, система которых характеризуется рассмотренной двухуровневой шкалой.

Следствие 1. В обозначениях формул (1), (2) *количество* C_i *ресурса, предназначенное для группы с номером i, определяется равенством*

$$C_i = c_i S_i = c\lambda_i^* S_i = \lambda_i^* s_i C, \;\; i = 1, 2, \ldots, N, \tag{10}$$

где значения коэффициентов пропорциональности определяются формулой (9).

Проиллюстрируем изложенные результаты в используемом далее случае, когда принцип управления реализуется в следующей конкретной форме.

Следствие 2. Пусть условие (7) *имеет вид* $\lambda_1 - \gamma\lambda_N = 0$, *где* γ − *фиксированное число из интервала* (0, 1). *Полагаем в обозначениях формулы* (3) $P_j = \sum_{i=j+1}^{N} s_i$, $Q_j = \sum_{i=1}^{j} s_i$, $j = 1, \ldots, N-1$.

Тогда в (10) *коэффициенты* $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*$ *определяются соответственно по формулам*

$$\lambda_1^* = \gamma \sum_{j=1}^{N-1} \frac{K_j}{\|K\|^2}, \;\; \lambda_k^* = \lambda_1^* + (1-\gamma) \sum_{j=1}^{k-1} \frac{K_j}{\|K\|^2}, \;\; k = 2, \ldots, N, \tag{11}$$

где $K_j = P_j + \gamma Q_j$, $j = 1, \ldots, N-1$; $\|K\|^2 = \sum_{j=1}^{N-1} K_j^2$. *Причем минимум* ***m*** *функционала* Ф (см. (6)) *равен* $m = (1-\gamma)^2 / \| K \|^2$.

Следствие 3. В предыдущих обозначениях (см., например, (10)) *оптимальные безразмерные плотности ресурса потребителей* $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_N^*$ *не зависят от объема распределяемого ресурса.*

Случай поэтапного распределения ресурса

Рассмотрим модификацию изложенного выше математического подхода к решению проблемы распределения ресурса при единственном дополнительном условии: оно происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени.

Модификация оптимизационной математической модели. Пусть N ($N > 2$) – число потребителей рассматриваемого ресурса, k – число этапов ($k > 1$). Допустим, что на этапе с номером j, где $j = 1, ..., k$, распределяется количество ресурса L_j в некоторых единицах. Тогда

$$C = \sum_{j=1}^{k} L_j \ – \tag{12}$$

весь объем поэтапно распределяемого ресурса. При многоэтапном распределении ресурса заранее может быть не известен ни его объем C, ни число этапов, как, например, при поступлении в страну бедствия гуманитарных грузов из других стран. Поэтому возникает проблема распределения его объема L_j на этапе с номером j, $j = 1,...,k$, между потребителями. Это означает, что при любых $j \in \{1, ..., k\}$, $i \in \{1, 2, ..., N\}$ верны равенства

$$L_j = \sum_{i=1}^{N} M_{ij}, \quad C_i = \sum_{j=1}^{k} M_{ij}, \tag{13}$$

где $\{M_{ij},\ i = 1, 2, ..., N\}$ − ресурсы для всех групп на этапе с номером j; C_i – количество ресурса, предназначенное для группы с номером i. Полагаем, что $r_j = L_j / S$ – средняя плотность ресурса на этапе с номером j; $c_{ij} = M_{ij} / S_i$ – плотность ресурса для группы с номером i на том же этапе ($i = 1, 2, ..., N$).

Предложение 3. Пусть при решении задачи А (см. выше) *на каждом этапе условный рейтинг потребителей и выбор соотношения* (7) *не зависят от номера этапа. Тогда в предыдущих обозначениях* 1) *безразмерные коэффициенты пропорциональности* $\lambda_{ij} = c_{ij} / r_j$, $i = 1, 2, ..., N$ *на этапе с номером* j, *являющиеся решением задачи А*, *одни и те же для каждого этапа распределения ресурса*, *т. е.* $\lambda_{ij} = \lambda_i^*$, $i = 1, 2, ..., N$, $1 \le j \le k$ (см. (9)); 2) *справедливы равенства*

$$c = \sum_{j=1}^{k} r_j, \quad c_i = \sum_{j=1}^{k} c_{ij}, \quad i = 1, 2, ..., N, \tag{14}$$

где $c = C/S$ *– средняя плотность ресурса,* $c_i = C_i / S_i$ *– плотность ресурса для группы с номером* i, $i = 1, 2, ..., N$ *в течение всего периода его распределения*; 3) *оптимальные размеры распределяемых ресурсов для всех групп имеют вид*

$$M_{ij} = \lambda_i^* S_i r_j, \quad i = 1, 2, ..., N, \quad j = 1,\ 2, ..., k. \tag{15}$$

Доказательство. Согласно следствию 3 оптимальные значения безразмерных коэффициентов пропорциональности $\lambda_1, ..., \lambda_N$ *не зависят от размера распределяемого ресурса*. Поэтому в условиях и обозначениях предложения 3 они не зависят от номера этапа, т. е. $\lambda_i = \lambda_{ij}$, $i = 1, 2, ..., N$, $j = 1,\ 2, ..., k$. Итак, утверждение 1 доказано. Равенства в соотношении (14) непосредственно вытекают из формул в (12). Соотношение (15), в обозначениях которого параметры λ_i^*, $i = 1, 2, ..., N$ определяются равенствами (9), вытекает теперь из следствия 1. ■

Соотношение (15) определяет *алгоритм оптимального многоэтапного распределения ресурса* при наличии двух упомянутых выше шкал, ассоциированных с потребителями ресурса.

Алгоритм оптимального распределения ресурса внутри группы. Отметим влияние описанного алгоритма на распределение ресурса внутри любой группы, в которую входит несколько человек. Пусть в группу с номером *i*, где $i \in \{1, 2, ..., N\}$, входит $n > 1$ человек, претендующих соответственно на $S_{i1}, ..., S_{in}$ баллов, причем $S_i = \sum_{m=1}^{n} S_{im}$ – общее число баллов у всех представителей группы. Согласно алгоритму оптимального многоэтапного распределения ресурса вся группа на этапе с номером *j*, где $j = 1,\ 2, ..., k$, получит количество ресурса M_{ij}, определяемое формулой (15). Требуется произвести разбиение $M_{ij} = \sum_{m=1}^{n} M_{ij}^{(m)}$, где $M_{ij}^{(1)}, ..., M_{ij}^{(n)}$ – размеры ресурса участников группы на этапе с номером *j*. Из предложений 2 и 3 (см. (4), (14), (15)) вытекает следующее.

Следствие 4. В предыдущих обозначениях оптимальные размеры $C_i^{(1)}, ..., C_i^{(n)}$, *распределяемые для участников группы с номером i, где* $i \in \{1, 2, ..., N\}$, *в течение всех этапов определяются равенствами*

$$C_i^{(m)} = \sum_{j=1}^{k} M_{ij}^{(m)} = c\lambda_i^* S_{im},\quad M_{ij}^{(m)} = \lambda_i^* S_{im} r_j,\quad m = 1, 2, ..., n,\ j = 1,\ 2, ..., k, \tag{16}$$

где значение λ_i^* *коэффициента пропорциональности задано формулой* (9), $c = C/S$ *– средняя плотность ресурса.*

Вычислительная реализация алгоритма оптимального распределения ресурса

Задача. В долевом строительстве жилого дома принимают участие 12 различных групп инвесторов, с одинаковыми «льготами» в оплате за 1 кв. м внутри каждой из них. Суммарная жилплощадь дома составляет S = 1610,31 кв. м. Средняя стоимость c = 1 000 руб. за 1 кв. м [1]. По соглашению с застройщиком общую плату за квартиры в доме в размере C = 1 610 310 руб. инвесторы вносят в два этапа: L_1 = 1 млн руб. на первом этапе, L_2 = 610 310 руб. – на втором. Рейтинг групп (в порядке возрастания стоимости 1 кв. м жилплощади), суммарные площади квартир $\{S_i,\ i = 1, 2, ..., 12\}$, на которые они претендуют, их доли $\{ s_i = S_i/S,\ i = 1, 2, ..., 12 \}$ по отношению ко всей площади дома отражены в табл. 1. Распределить денежные вклады между группами инвесторов на каждом этапе, используя алгоритм оптимального многоэтапного распределения ресурса (предложение 3), если известно, что инвесторы договорились применить на каждом этапе принцип управления вкладами, формализуемый в виде равенства (см. (7)) $\lambda_1/\lambda_{12} = c_1/c_{12} = 0,2$.

Решение. 1. Оптимальные значения коэффициентов пропорциональности не зависят от номера этапа (предложение 3) и находятся по формуле (11), где γ = 0,2, N = 12, с помощью данных табл. 1. Найденные параметры позволяют определить размеры $\{C_i,\ i = 1, …, 12\}$ распределяемых между группами инвесторов суммарных денежных вкладов (за два этапа), исходя из формулы (10), учитывая данные о средней стоимости c 1 кв. м жилплощади в доме. Округленные значения этих величин помещены в табл. 1.

2. Находим среднюю стоимость 1 кв. м жилплощади на каждом этапе ($r_j = L_j/S$, $j = 1, 2$): $r_1 \approx$ 621 руб., $r_2 \approx$ 379 руб., учитывая, что $r_1 + r_2 = c =$ 1 000 руб. (см. (14)).

3. Рассчитываем вклады $\{M_{ij} = \lambda_i^* S_i r_j\}$ всех групп на каждом из этапов (см. (15)), опираясь на параметры, найденные в п. 1 и 2 (табл. 2).

[1] Это условная величина, не отражающая реальную стоимость 1 кв. м жилплощади.

Таблица 1

Распределение денежных вкладов между группами инвесторов

i	S_i	$s_i = S_i / S$	λ_i^*	$C_i = c\lambda_i^* S_i$
1	469,43	0,292	0,333	156170,6
2	42,4	0,026	0,505	21394,3
3	82,46	0,051	0,672	55393,4
4	77,3	0,048	0,830	64140,1
5	64,49	0,040	0,979	63144,8
6	55,1	0,034	1,121	61786,1
7	127,92	0,079	1,257	160848,0
8	296,61	0,184	1,379	409093,5
9	81,91	0,051	1,468	120245,1
10	143,23	0,089	1,548	221673,8
11	104,97	0,065	1,611	169147,3
12	64,49	0,040	1,663	107273,1
Итого	1610,31	1		1 610 310

Таблица 2

Характеристика денежных вкладов между группами инвесторов по двум этапам

i	M_{i1}	T_{i1}	M_{i2}	T_{i2}	C_i
1	96981,7	96000	59188,89	60170,57	156170,6
2	13285,8	13500	8108,468	7894,286	21394,3
3	34399,2	34399,2	20994,19	20994,19	55393,4
4	39830,9	39830,9	24309,2	24309,2	64140,1
5	39212,8	39000	23931,99	24144,82	63144,8
6	38369,1	38000	23417,02	23786,07	61786,1
7	99886,3	99886,3	60961,64	60961,64	160848,0
8	254046,4	255000	155047,1	154093,5	409093,5
9	74672,0	75000	45573,08	45245,11	120245,1
10	137659,1	13600	84014,71	208073,8	221673,8
11	105040,2	229167,1	64107,1	–60019,8	169147,3
12	66616,4	66616,4	40656,66	40656,66	107273,1
Итого	1 000 000	1 000 000	610 310	610 310	1 610 310

4. Проиллюстрируем алгоритм распределения денежного ресурса в отдельной группе инвесторов на примере группы с номером 1, в которую входит 8 инвесторов. Исходя из ранее представленных расчетов (см. табл. 2 при $i = 1$), эта группа инвесторов на этапах 1 и 2 должна внести соответственно следующие суммы: $M_{11} = 96981{,}7$ руб., $M_{12} = 59188{,}9$ руб. Результаты распределения этих сумм между ними на каждом этапе с помощью формулы (16) (см. следствие 3) представлены в табл. 3.

Математическая модель взаимодействия инвесторов и ее реализация. В связи с денежным характером ресурса при наличии многоэтапного его распределения возникает проблема «рационального» взаимодействия инвесторов как внутри каждой из групп, так и между группами, с целью своевременного инвестирования фирмы-застройщика на каждом этапе финансирования. Рассмотрим возможные способы взаимоотношений инвесторов в данной ситуации. На определенных условиях члены коллектива инвесторов могут давать ссуды друг другу, чтобы своевременно выплатить застройщику требуемый вклад на каждом этапе.

Таблица 3

Распределение денежного ресурса в отдельной группе инвесторов
(группа 1)

m	S_{1m}	$M_{11}^{(m)}$	$M_{12}^{(m)}$	$C_1^{(m)}$
1	82,46	17035,79	10397,11	27432,90
2	53,06	10961,91	6690,16	17652,07
3	77,3	15969,76	9746,51	25716,27
4	38,77	8009,67	4888,38	12898,06
5	51,57	10654,08	6502,29	17156,38
6	63,77	13174,54	8040,55	21215,09
7	67	13841,84	8447,81	22289,65
8	35,5	7334,11	4476,08	11810,19
Итого	469,43	96981,7	59188,90	156170,6

Пусть T_{ij} – взнос группы инвесторов с номером i на этапе с номером j, причем величина T_{ij} может не совпадать с рассчитанным по формуле (15) вкладом M_{ij}, но требуется выполнение равенства

$$\sum_{i=1}^{N} M_{ij} = \sum_{i=1}^{N} T_{ij} = L_j, \quad j = 1,\ 2, ..., k. \tag{17}$$

Кроме того, считаем, что каждая группа «платежеспособна», т. е. сумма фактических вкладов группы по совокупности всех этапов совпадает с ее расчетной суммой вкладов, вычисляемой при применении *алгоритма оптимального распределения*. Другими словами, в обозначениях формул (13), (15) справедливо равенство

$$T_i := \sum_{j=1}^{k} T_{ij} = \sum_{j=1}^{k} M_{ij} = C_i, \ i = 1, 2, ..., N; \tag{18}$$

в частности, если $\sum_{j=1}^{k-1} T_{ij} < \sum_{j=1}^{k-1} M_{ij}$, то $T_{ik} = C_i - \sum_{j=1}^{k-1} T_{ij}$. Итак, *у матриц* $\| M_{ij} \|_{N\times k}$ и $\| T_{ij} \|_{N\times k}$ *суммы элементов соответствующих строк и столбцов одинаковы.*

Рассмотрим численную реализацию этой модели, используя решение задачи в п. 4. В табл. 2 представлены фактические вклады $\{T_{ij}\}$ всех групп на каждом из этапов, удовлетворяющие равенствам (17), (18) при $N = 12$, $k = 2$. В частности, для этих вкладов справедливо соотношение (см. табл. 2) $M_{i1} + M_{i2} = T_{i1} + T_{i2} = C_i$, $i = 1, 2, ..., 12$.

Рассмотренная модель при незначительной модификации может служить схемой рационального взаимодействия инвесторов и внутри каждой из групп.

Заключение

При исследовании проблемы распределения ограниченного социально значимого ресурса при наличии рейтинга потребителей (групп людей) необходимо учитывать аспекты нравственности, справедливости, а в некоторых ситуациях (например, в задачах управления коллективным инвестированием) − стремиться к достижению компромисса, чтобы все участники «дележа ресурса» были удовлетворены. В данной работе разработан математический подход к решению этой проблемы для случая, когда процесс распределения происходит в несколько этапов, разделенных промежутками времени. Он опирается на разработанную ранее оптимизационную математическую модель «одномоментного» распределения ограниченного ресурса между группами людей. Этот подход иллюстрируется на примере решения популярной задачи управления коллективным инвестированием в случае долгосрочного строительства.

Список литературы

1. *Галькова Е. А.*, *Маергойз Л. С.* Об одной линейной задаче коллективного инвестирования // Сиб. журн. индустр. математики. 2006. Т. 9, № 3 (27). С. 26–30.

2. *Галькова Е. А.*, *Маергойз Л. С.*, *Хлебопрос Р. Г.* Приложения принципа оптимальности в задачах управления коллективным инвестированием // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2008. Т. 8, вып. 1. С. 138–143.

3. *Maergoiz L. S.*, *Sidorova T. Yu.*, *Khlebopros R. G.* A Mathematical Approach to Develop the Distribution of Greenhouse Gas Emissions. // Applied Mathematics. 2010. Vol. 1. No. 6. P. 515–519.

4. *Маергойз Л. С.*, *Сидорова Т. Ю.*, *Хлебопрос Р. Г.* Математический алгоритм распределения выбросов парниковых газов // Сиб. журн. индустр. математики. 2011. Т. 14, № 2 (46). С. 78–83.

5. *Галькова Е. А.*, *Маергойз Л. С.*, *Хлебопрос Р. Г.* Математический алгоритм «справедливого» распределения гуманитарного ресурса и смежные вопросы // Сиб. журн. индустр. математики. 2012. Т. 15, № 4 (52). С. 71–77.

6. *Галькова Е. А.*, *Маергойз Л. С.* Оптимизационная математическая модель распределения ограниченного ресурса между группами людей // Экономико-математические методы исследования современных проблем экономики и общества: Сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф. Уфа, 2013. Ч. 1. С. 46–50.

7. *Галькова Е. А.* Алгоритм управления коллективным инвестированием в случае долгосрочного строительства // Математические методы и модели в исследовании современных проблем экономики и общества: Сб. материалов Всерос. молодежной науч.-практ. конф. Уфа, 2014. Ч. 1. С. 202–205.

Материал поступил в редколлегию 20.07.2014

E. A. Gal'kova, **L. S. Maergoiz**

Krasnoyarsk Institute of Railway Transport, Branch of State Irkutsk University of Means of Communication
89 Lado Kethovely Str., Krasnoyarsk, 660028, Russian Federation

Institute of Business Management and Economics, Siberian Federal University
79 Svobodny Ave., Krasnoyarsk, 660041, Russian Federation

resurs7777@yandex.ru, bear.lion@mail.ru

MATHEMATICAL APPROACH TO MANY-STAGED DISTRIBUTION OF SOCIAL SIGNIFICANT RESOURCE IF THERE IS A RATING OF CONSUMERS

It is given a description of a mathematical approach to distribution of limited resource of social economic contents between people groups, which are under different conditions, in the case when it takes place during several stages separated by time intervals. This approach is based on (worked out earlier) the mathematical algorithm of a single distribution of limited social significant resource in justice principles in the presence of two-level scale: a rating of consumers (people groups) and a numerical scale reflecting size of their needs. It is given a numerical realization of this algorithm as an example of the solution of the management problem by collective investment of long-term construction of an immovable object, when investors pay money in a building firm by stages. Moreover, in connection with money contents of the resource it is presented a mathematical model of "rational" interaction of investors both inside every group, and between groups for the sole of time investment of the building firm at every stage of financing. It is adduced a numerical illustration of this model at the same example.

Keywords: mathematical model, mathematical algorithm, principles of just distribution of limited resource, rating of consumers, many-staged distribution of social significant resource, management by collective investment.

References

1. Gal'kova E. A., Maergoiz L. S. On One Linear Problem of Collective Investment. *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2006, vol. 9, no. 3(27), p. 26–30. (in Russ.)

2. Gal'kova E. A., Maergoiz L. S., Khlebopros R. G. Applications of the Optimality Principle in Tasks of Collective Investment Management. *Vestnik of Novosibirsk State University. Series: Social and Economics Sciences*, 2008, vol. 8, no. 1, p. 138–143. (in Russ.)

3. Maergoiz L. S., Sidorova T. Yu., Khlebopros R. G. A Mathematical Approach to Develop the Distribution of Greenhouse Gas Emissions. *Applied Mathematics*, 2010, vol. 1, no. 6, p. 515–519.

4. Maergoiz L. S., Sidorova T. Yu., Khlebopros R. G. A Mathematical Algorithm of Distributing of the Greenhouse Gas Emissions. *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2011, vol. 14, no. 2, p. 78–83 (in Russ.) Translation in Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2012, vol. 6, no. 2, p. 210–215.

5. Gal'kova E. A., Maergoiz L. S., Khlebopros R. G. A Mathematical Algorithm of «Just» Distribution of a Humanitarian Resource and Adjacent Problems. *Siberian Journal of Industrial Mathematics*, 2012, vol. 15, no. 4 (52), p. 71–77. (in Russ.)

6. Gal'kova E. A., Maergoiz L. S. An Optimizational Mathematical Model of Two-Level Distribution of Limited Resources between Groupes of People. *Economic-Mathematical Methods of Investigation of Modern Problems of Economics and Society*. Sbornik of Reports of International Scientific-Practical Conference, 16–17 December 2013. Ufa, 2013, part 1, p. 46–50. (in Russ.)

7. Gal'kova E. A. An Algorithm of the Management by Collective Investment of Long-Term Construction. *Mathematical Methods and Models in Investigation of Modern Problems of Economics and Society*. Sbornik of Reports of Russian Youth Scientific-Practical Conference, 14–15 November 2014. Ufa, 2014, part 1, p. 202–205. (in Russ.)