

К. А. Казакова, А. Г. Князев, О. А. Лепёхин

*Астраханский государственный университет
ул. Татищева, 20а, Астрахань, 414056, Россия*

*kristinakazakova0309@gmail.com, agkniazev@mail.ru,
okmb07@yandex.ru*

ОПТИМАЛЬНЫЙ РАЗМЕР БАНКОВСКОГО РЕЗЕРВА: ПРОГНОЗ ПРОСРОЧЕННОЙ КРЕДИТНОЙ ЗАДОЛЖЕННОСТИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОПУЛЯРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрена возможность применения копулярных моделей семейства RLUF для случая построения совместных распределений рядов задолженности по кредитам с макроэкономическими индикаторами с целью дальнейшего прогнозирования объемов просроченной задолженности и определения оптимальных норм резервных требований на соответствующие потери. В исследовании проводится сравнительный анализ многомерных распределений посредством оценивания модели RLUF-копулы с такими классическими копулярными моделями, как FGM-копула, копула Франка и копула Гаусса. Для получения оценок параметров моделей использован метод максимального правдоподобия. В случае RLUF-копулы получены байесовские оценки параметров с использованием алгоритма Метрополиса со случайным блужданием. Прогнозирование объемов банковского резерва для всех построенных в исследовании моделей выполняется посредством генерирования случайной выборки с помощью алгоритма принятия-отклонения для создания соответствующей выборки из совместного распределения с использованием функции плотности копулярной модели. В результате разыгрывания ста возможных сценариев объемов просроченной задолженности получена 95 %-я граница доверительного интервала для объема просроченной задолженности по кредитам, которая в полной мере может выступать в качестве оптимального объема резервных требований на соответствующие кредитные потери.

Ключевые слова: банковский резерв, кредитный риск, просроченная кредитная задолженность, копулярная модель, прогнозирование.

Проблема формирования банковского резерва с точки зрения оценивания возможных объемов кредитных потерь на настоящий момент занимает центральное место среди актуальных проблем банковской сферы. Финансово-экономическая неопределенность со свойственным ей ростом факторов риска постоянно ставит под сомнение уровень достаточности капитала представителей сектора банковской деятельности. В свою очередь определение оптимального объема резервных требований на покрытие убытков, связанных с просрочкой платежа по кредитным требованиям, обеспечивает не только своевременное предупреждение соответствующих потерь, но и способствует рациональному использованию денежных ресурсов, снижая тем самым уровень неопределенности будущей доходности банковского портфеля.

Существующие сегодня международные нормативы банковской деятельности, определяющие требования к формированию резервов для обеспечения финансовой стабильности, безусловно, не в полной мере соответствуют интересам представителей банковских структур. При этом важно отметить, что внедрение единых стандартов к определению уровня достаточности

Казакова К. А., Князев А. Г., Лепёхин О. А. Оптимальный размер банковского резерва: прогноз просроченной кредитной задолженности с использованием копулярных моделей // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Социально-экономические науки. 2015. Т. 15, вып. 4. С. 59–76.

капитала с учетом диверсифицированной особенности экономических систем недостаточно целесообразно в современных реалиях. При определении требований к уровню резервных отчислений, безусловно, важно акцентировать внимание на особенности самой институциональной единицы банковской системы, а также на воздействии со стороны динамически изменчивой макроэкономической среды на соответствующий уровень волатильности просроченной задолженности по существующим обязательствам.

В настоящее время международный комитет по банковскому надзору прикладывает определенные усилия к внедрению в банковскую теорию и практику внутренних моделей оценки вероятности дефолта, в основу которых положены количественные методы оценки финансовых рисков. Использование копулярных моделей в этой связи в качестве инструментария для прогнозирования объемов просроченной задолженности по кредитам и определения оптимальных объемов резервных требований является весьма уместным.

Основная цель настоящего исследования – оценка возможности применения RLUF-копулы в качестве модели, характеризующей совместное распределение просроченной задолженности по кредитам с макроэкономической составляющей, для прикладной цели – прогнозирования объемов соответствующих кредитных потерь. При этом важно отметить, что выбор семейства копул в данной работе носит не случайный характер. В центре внимания проводимого исследования находится моделирование слабых зависимостей. В дальнейшем в работе станет явным, что копулы семейства RLUF могут моделировать как раз исключительно слабые зависимости. При этом не следует упускать из виду тот факт, что моделирование именно слабых зависимостей играет важную роль в теории управления рисками. Так, основной инструмент снижения риска – диверсификация предполагает, что зависимости между рассматриваемыми финансовыми переменными должны быть слабыми. В свою очередь, важно подчеркнуть, что недостаточное внимание к слабым зависимостям может приводить к серьезным ошибкам, связанным с недооценкой рисков. Кроме этого, в настоящем исследовании будет выяснено, что с помощью копул, которые в свою очередь моделируют слабые зависимости, можно получить достаточно эффективные прогнозы просроченной кредитной задолженности.

В настоящее время проведено немалое количество научных исследований в области моделирования кредитных рисков банковских учреждений. Среди них встречаются работы, посвященные методам оценки надежности отдельных заемщиков [1], а также исследования в области оценки риска кредитного портфеля в целом [2; 3]. Анализ возможности практического применения соответствующих методов оценки представлен также в работах [4; 5]. Примечательно, что приобретают популярность работы, в основе которых в качестве инструментария построения модели кредитного риска выступают копула-функции [6]. Построение функций совместных распределений востребовано также при оценке кредитоспособности различных классов заемщиков [7].

Основы моделирования при помощи RLUF-копулы, использование которой предлагается в настоящем исследовании, приведены в [8]. В настоящей работе в отличие от [8] предложено использование двумерных и трехмерных моделей соответствующего семейства копул, а также предпринята попытка рассмотреть выпуклые линейные комбинации предложенных моделей.

В исследовании задействованы ежемесячные данные по общей просроченной кредитной задолженности, исчисленные в тысячах рублей, семи следующих учреждений банковского сектора России: Альфа-банк, ВТБ24, Промсвязьбанк, банк «Петрокоммерц», Ханты-Мансийский банк, Собинбанк, Новосибирский муниципальный банк. Все данные, задействованные в настоящем исследовании, заимствованы с официальных банковских отчетностей, размещенных на сайте Центрального банка России. Выборка из семи соответствующих представителей банковской деятельности была получена ранее посредством кластерного и факторного анализов банковской системы в работе [9]. В силу того что исследование в большей степени носит методологический характер, временной интервал данных был определен произвольным образом в период с 01.02.2008 по 01.10.2013 г.

Для построения функций совместных распределений в работе были использованы также данные макроэкономических показателей: Ipp – индекс промышленного производства (в % к декабрю предыдущего года); Ipc – индекс потребительских цен (в % к декабрю предыдущего

года); *Inc* – реальные располагаемые денежные доходы (в % к декабрю предыдущего года); *Oil* – цены на нефть (в % к соответствующему периоду предыдущего года); *Exr* – официальный курс рубля к доллару США.

На первоначальном этапе обработки данных для достижения стационарности рядов были взяты первые разности по всем двенадцати заявленным рядам. При этом, как выяснилось, все соответствующие разности оказались стационарными при уровне значимости в 0,01. В табл. 1 приведены значения статистики Дики – Фулера для каждого временного ряда.

Таблица 1

Выборочные значения статистики Дики – Фулера

Dalfa	Dvtb	Dpsb	Dpcm	Dpkh	Dsob
-5,637	-5,241	-8,280	-13,016	-8,260	-7,385
Dnmb	Dipp	Dipc	Dinc	Doil	Dexr
-8,638	-7,316	-10,816	-10,432	-4,841	-6,789

Дальнейший процесс обработки данных предполагал центрирование и нормирование рядов просроченной задолженности, доведенных ранее до стационарного состояния. В табл. 2 приведены значения средних величин (Mean) и стандартных отклонений (Sd) рядов. Полученные в результате первичной обработки ряды данных примут в исследовании обозначение *z*.

Таблица 2

Результаты центрирования и нормирования стационарных разностей рядов просроченной задолженности по кредитам

Макроэкономический индикатор	Dalfa	Dvtb	Dpsb	Dpcm	Dpkh	Dsob	Dnmb
Mean	0,0003	0,0005	0,0004	0,001	0,0002	0,0004	0,0009
Sd	0,009	0,001	0,005	0,011	0,003	0,009	0,010

Далее для каждого ряда просроченной кредитной задолженности были подобраны ряды макроэкономических показателей, от которых соответствующий ряд зависит в наибольшей степени. Для этих целей были использованы коэффициенты корреляции Пирсона, численные значения которых представлены в табл. 3.

Таблица 3

Оценка корреляционной зависимости между рядами просроченной задолженности и макроэкономическими индикаторами

Параметр		<i>Ipp</i>	<i>Ipc</i>	<i>Inc</i>	<i>Oil</i>	<i>Exr</i>	Параметр
<i>Zalfa</i>	<i>R</i>	-0,146	-0,107	-0,174	-0,061	0,145	<i>Ipp, Inc, Exr</i>
	<i>Prob.</i>	0,234	0,385	0,157	0,616	0,239	
<i>Zvtb</i>	<i>R</i>	0,093	-0,117	-0,038	0,063	-0,016	<i>Ipc</i>
	<i>Prob.</i>	0,451	0,341	0,756	0,610	0,899	

Продолжение табл. 3

Параметр		I_{pp}	I_{pc}	Inc	Oil	Exr	Параметр
Z_{psb}	R	0,039	-0,242	0,113	-0,114	-0,030	I_{pc}
	$Prob.$	0,753	0,047	0,359	0,357	0,806	
Z_{pcm}	R	0,011	-0,006	0,133	0,128	0,094	Inc, Oil
	$Prob.$	0,931	0,960	0,280	0,299	0,445	
Z_{pkh}	R	0,039	0,059	0,042	-0,019	-0,014	I_{pc}
	$Prob.$	0,749	0,634	0,735	0,879	0,908	
Z_{sob}	R	-0,271	-0,008	0,162	-0,019	0,305	I_{pp}, Inc, Exr
	$Prob.$	0,026	0,948	0,187	0,876	0,012	
Z_{nmb}	R	0,223	-0,355	-0,109	-0,110	-0,021	I_{pp}, I_{pc}
	$Prob.$	0,068	0,003	0,378	0,375	0,867	

Последний столбец табл. 3 представляет собой результат оценки корреляционной зависимости между переменными – указывает на выбор макроэкономического индикатора. По результатам, приведенным в табл. 3, нетрудно заметить, что только три коэффициента корреляции значительно отличаются от нуля. Это в свою очередь говорит о том, что после удаления тренда с помощью вычисления первых разностей зависимости между рядами остатков являются слабыми. Важно также обратить внимание на то, что наихудшая зависимость между просроченной задолженностью и макроэкономическими индикаторами прослеживается для Ханты-Мансийского банка. Однако, как уже упоминалось, в настоящей работе основной целью является моделирование слабых зависимостей посредством построения копулы выбранного семейства.

На следующем этапе проводимого исследования были оценены параметры одномерных распределений. В силу того что объем исследуемой выборки невелик, гипотеза о нормальном распределении отклоняется только для двух рядов из двенадцати. Вероятности выборочных значений статистики Колмогорова – Смирнова приведены в табл. 4. Однако, как видно из примеров гистограмм, иллюстрация которых представлена на рис. 1, большинство распределений не в полной степени соответствует нормальной модели.

Для моделирования одномерных распределений в работе используется асимметричное распределение Стьюдента, плотность которого задается следующей формулой [10]:

$$d(z; \lambda; \eta) = \begin{cases} bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 - \lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\eta + 1}{2}}, & z < -a/b \\ bc \left(1 + \frac{1}{\eta - 2} \left(\frac{bz + a}{1 + \lambda} \right)^2 \right)^{-\frac{\eta + 1}{2}}, & z \geq -a/b \end{cases},$$

$$\text{где } a = 4c\lambda \left(\frac{\eta - 2}{\eta - 1} \right),$$

$$b = \sqrt{1 + 3\lambda^2 - a^2},$$

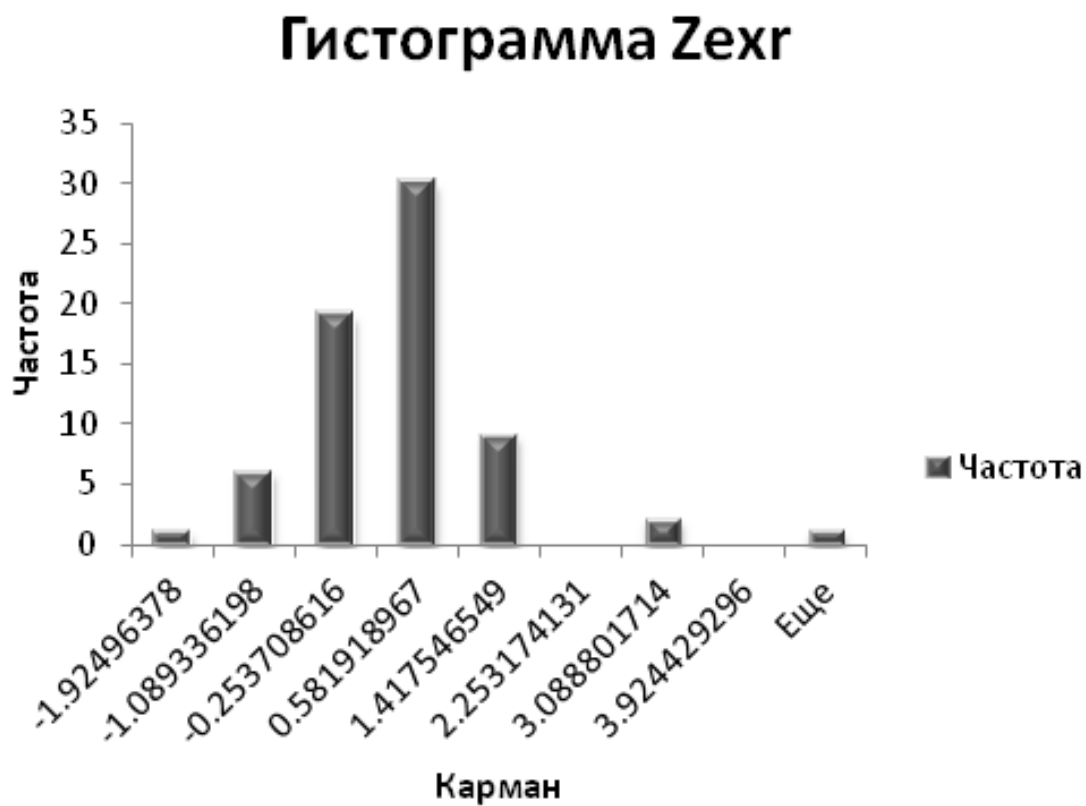
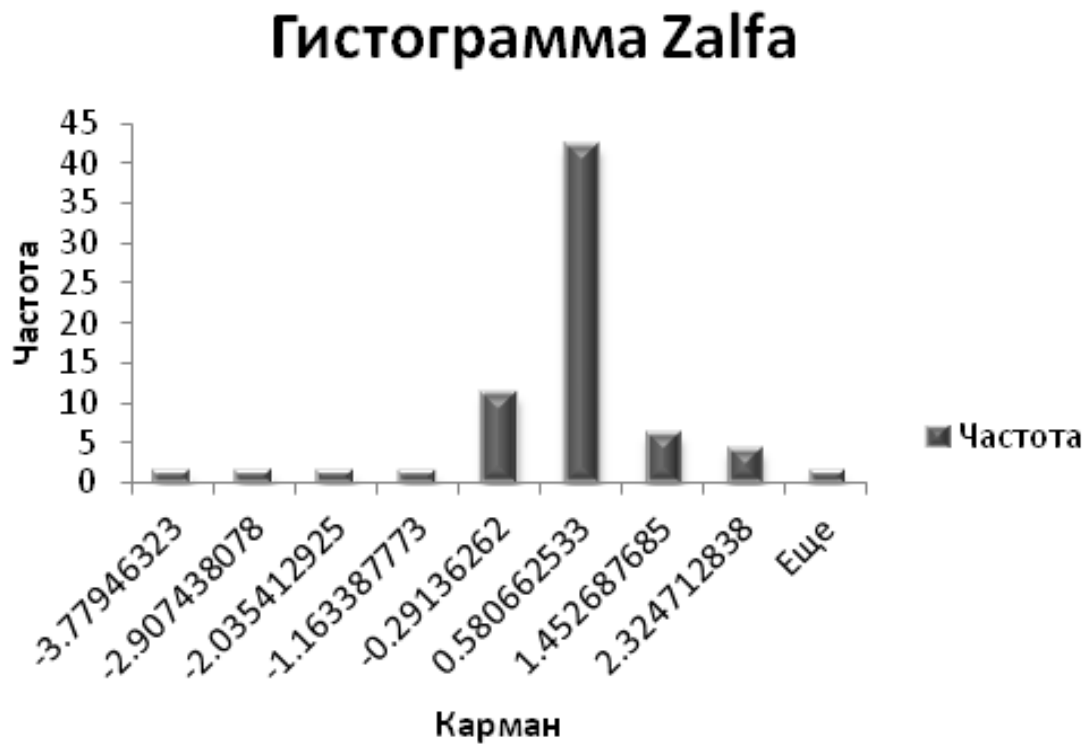


Рис. 1. Гистограммы некоторых рядов z

$$c = \frac{\Gamma\left(\frac{\eta+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi(\eta-2)}\Gamma\left(\frac{\eta}{2}\right)};$$

η – число степеней свободы (хвостовой параметр);

λ – параметр асимметрии;

$\Gamma(x)$ – гамма-функция.

Таблица 4

Параметры одномерных распределений

Параметры	<i>P norm</i>	<i>Eta</i>	<i>Lambda</i>	<i>P ast</i>
<i>Zalfa</i>	0,004	2,2	0,09	0,917
<i>Zvtb</i>	0,832	22	-0,23	0,813
<i>Zpsb</i>	0,649	5,4	0,06	0,988
<i>Zpcm</i>	0,182	3,1	0,04	0,982
<i>Zpkh</i>	0,005	2,3	0,12	0,506
<i>Zsob</i>	0,175	3,1	0,12	0,988
<i>Znmb</i>	0,132	3,6	0,04	0,729
<i>Zipp</i>	0,223	3,1	0,01	0,917
<i>Zipc</i>	0,217	3,2	-0,02	0,875
<i>Zinc</i>	0,903	22	-0,01	0,995
<i>Zoil</i>	0,171	5,6	-0,40	0,945
<i>Zexr</i>	0,208	3,4	0,07	0,957

Для получения оценок параметров одномерных распределений был использован метод максимального правдоподобия. Результаты соответствующего оценивания приведены в табл. 4, в последнем столбце которой указаны вероятности выборочных значений статистики Колмогорова – Смирнова для асимметричного распределения Стьюдента. По результатам нетрудно заметить, что гипотеза о применимости асимметричного распределения Стьюдента не отклоняется. Априори ожидается, что данное распределение позволит лучше моделировать выборочные распределения, поскольку нормальное распределение является предельным случаем асимметричного распределения Стьюдента при достаточно большом числе степеней свободы и параметре смещения равном нулю [11].

Как не раз упоминалось, основная наша задача – проверка применимости копул семейства RLUF для моделирования совместных распределений рядов задолженности с макроэкономическими показателями. В работе [8] приведены два обобщения RLUF-копулы. Первая модель имеет в ней следующее обозначение – простая многомерная RLUF-копула:

$$C_{\lambda}(u_1, \dots, u_n) = \prod_{i=1}^n u_i + \lambda \prod_{i=1}^n f_i(u_i), \quad (1)$$

где $u_i \in [0;1]$; f_i – ненулевые абсолютно непрерывные функции такие, что $f_i(0) = f_i(1) = 0$.

Для того чтобы формула (1) задавала копулу, необходимо, чтобы параметр λ удовлетворял определенным условиям. Пусть D – множество таких значений переменных u_i , для которых

произведение производных всех функций f_i отрицательно, а D^+ – множество таких значений, для которых это произведение положительно. Тогда параметр λ должен удовлетворять следующему неравенству:

$$\frac{-1}{\max_{D^+} \left(\prod_{i=1}^n f_i'(u_i) \right)} \leq \lambda \leq \frac{-1}{\min_D \left(\prod_{i=1}^n f_i'(u_i) \right)}. \quad (2)$$

В настоящем исследовании, в отличие от работы [8], будут использованы двумерные и трехмерные модели данного вида, в которых функции f_i принимают следующий вид:

$$f(u) = (u - u^2)^a. \quad (3)$$

В работе будут рассмотрены вышеуказанные функции для значений параметра $a \geq 1$. При этом можно доказать, что для соответствующих значений параметра функция $f(u)$ является абсолютно непрерывной. Очевидно также, что $f(0) = f(1) = 0$.

Далее необходимо ввести следующее обозначение:

$$g(a) = \frac{a}{\sqrt{2a-1}} \left(\frac{2a-1}{4a-2} \right)^{a-1}. \quad (4)$$

Можно проверить, что на отрезке $[0; 1]$ минимальное значение производной функции (3) равно $-g(a)$, а максимальное значение этой производной равно $g(a)$. Таким образом, рассмотрению подлежит следующая двумерная модель вида (1).

$$\tilde{N}_\lambda(u, v) = uv + \lambda(u - u^2)^a (v - v^2)^b, \quad (5)$$

где $a, b \geq 1$.

Используя неравенство (2), было установлено, что функция (5) будет являться копулой, если параметр λ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{-1}{g(a)g(b)} \leq \lambda \leq \frac{1}{g(a)g(b)}.$$

В работе [8] приводится формула для коэффициента корреляции Кендалла для модели (1). В данном исследовании получена конкретная формула коэффициента корреляции Кендалла для модели (6), а именно:

$$\tau = 8\lambda \left(\int_0^1 (u - u^2)^a du \right) \left(\int_0^1 (v - v^2)^b dv \right) = 8\lambda B(a+1, a+1) B(b+1, b+1),$$

где $B(x, y)$ – бета-функция.

Далее необходимо ввести следующее обозначение:

$$G(a) = g(a)B(a+1, a+1),$$

график указанной функции приведен на рис. 2.

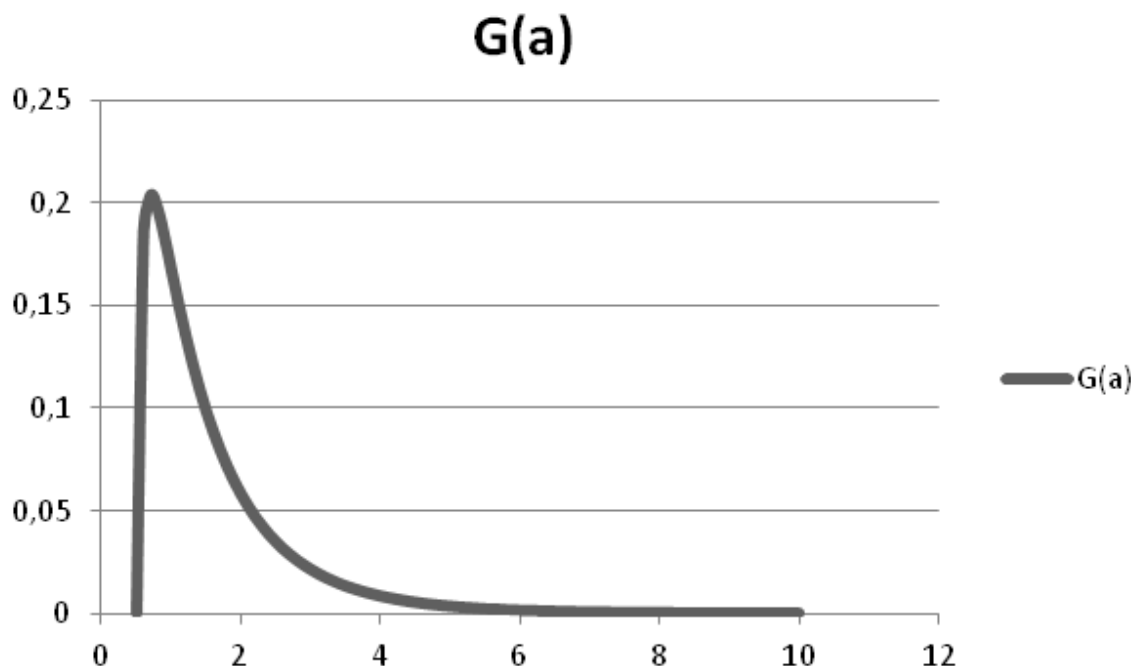


Рис. 2. Ограничивающая функция для коэффициента корреляции

Из графической иллюстрации соответствующей функции видно: для моделей вида (5) $|\tau| \leq 0,32$. Это в свою очередь указывает на то, что данные модели могут описывать исключительно сравнительно слабые зависимости.

Далее также вводятся в рассмотрение простые трехмерные модели вида (1):

$$\tilde{N}_\lambda(u, v, w) = uvw + \lambda(u - u^2)^a (v - v^2)^b (w - w^2)^c, \quad (6)$$

где $a, b, c \geq 1$.

Можно проверить, что функция (6) будет копулой, если параметр λ удовлетворяет следующему неравенству:

$$\frac{-1}{g(a)g(b)g(c)} \leq \lambda \leq \frac{1}{g(a)g(b)g(c)}.$$

Простые модели вида (1) при $n > 2$ обладают тем существенным недостатком, что любая частная функция распределения, полученная из соответствующей модели, задается копулой независимости. Для построения более сложных моделей, как было отмечено ранее, будут рассмотрены выпуклые линейные комбинации простых моделей. Копулы такого вида также описаны в работе [8], однако авторы предлагают рассматривать произвольные линейные

комбинации простых моделей, что требует накладывать на коэффициенты моделей дополнительные условия. Выпуклые линейные комбинации, которые предложены для рассмотрения в настоящем исследовании, автоматически являются копулами. Далее приводится конкретизированная модель.

$$C(u, v, w) = \theta_1 u C_{\lambda_1}(v, w) + \theta_2 v C_{\lambda_2}(u, w) + \theta_3 w C_{\lambda_3}(v, u) + \theta_4 C_{\lambda_4}(u, v, w), \quad (7)$$

где $\theta_i \in [0; 1]$, $\sum \theta_i = 1$, а копулы в правой части этой формулы имеют вид (5) или (6).

Для получения оценок коэффициентов построенных моделей необходимы формулы плотности RLUF-копул. Важно подчеркнуть, что простота соответствующих формул является одним из достоинств копул семейства RLUF. Для простой модели (1) формула плотности имеет следующий вид:

$$d_{\lambda}(u_1, \dots, u_n) = 1 + \lambda \prod_{i=1}^n f'_i(u_i).$$

В свою очередь для сложной модели (7) плотность вычисляется по формуле

$$d(u, v, w) = \theta_1 d_{\lambda_1}(v, w) + \theta_2 d_{\lambda_2}(u, w) + \theta_3 d_{\lambda_3}(v, u) + \theta_4 d_{\lambda_4}(u, v, w).$$

Таким образом, нетрудно обнаружить, что плотность сложной модели является линейной комбинацией плотностей простых моделей.

В качестве базы для сравнения в работе предложено задействовать три «классические» копулы: FGM-копулу, копулу Гаусса и копулу Франка. При этом важно отметить, что FGM-копула является простейшим примером копул семейства RLUF. Соответствующая копулярная модель получается из формулы (5), при условии, что $a = b = 1$. Несмотря на то что подобная копула может описывать только очень слабые зависимости ($|\tau| \leq 2/9$), она все же применялась в практических исследованиях [12].

Копула Гаусса является примером эллиптической копулы. Она в свою очередь определяется следующей формулой [13]:

$$C_{\rho}(u, v) = \Phi_{\rho}(\Phi^{-1}(u), \Phi^{-1}(v)),$$

где $\Phi(u)$ – интегральная функция стандартного нормального распределения;

$\Phi_{\rho}(u, v)$ – интегральная функция двумерного стандартного нормального распределения с коэффициентом корреляции Пирсона ρ .

В недавнем прошлом соответствующая копула являлась одним из основных инструментов моделирования совместных распределений. Однако в последние годы выяснилось, что данная модель уступает другим копулярным моделям. В этой работе соответствующий факт будет также установлен.

Копула Франка является примером архимедовой копулы. Она определяется следующей формулой [13]:

$$C_{\alpha}(u, v) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{(e^{-\alpha u} - 1)(e^{-\alpha v} - 1)}{(e^{-\alpha} - 1)} \right),$$

при условии, что $\alpha \neq 0$.

В настоящее время данная модель является одним из основных инструментов моделирования совместных распределений, наряду с такими копулярными моделями, как копула Гамбела – Хаугарда и копула Клейтона. Как показано в работе [12], копула Франка наилучшим образом моделирует парный коэффициент корреляции Кендалла для моделей совместных распределений биржевых индексов. В этом исследовании также будет установлено, что соответствующая копула наилучшим образом моделирует коэффициент корреляции.

Формулы плотностей копулярных моделей, выбранных в качестве базы сравнения в настоящей работе, являются достаточно известными. Они также представлены в работах [12; 14].

Для получения оценок копулярных моделей в работе были использованы оценки параметров одномерных распределений, полученные на предыдущем этапе исследования. Копулы Гаусса и Франка, а также FGM-копула зависят от одного параметра, поэтому для оценки параметров данных копул использовался метод максимального правдоподобия, реализованный в виде программ на языке **R**.

Модель RLUF-копулы, которая была использована в настоящей работе, оказалась достаточно сложной. В силу того что она зависит от семнадцати параметров, для получения оценок модели использовалась сложная многоступенчатая процедура. Прежде всего, необходимо было получить оценки парных копулярных моделей. Первоначально оценки параметров парных RLUF-копул были получены методом максимального правдоподобия. На основе полученных оценок была сформирована первичная выборка оценок параметров a и b парных RLUF-копул, заданных формулой (5). При этом предполагалось, что оба параметра имеют одно и то же распределение. Гистограмма первичной выборки представлена на рис. 3.

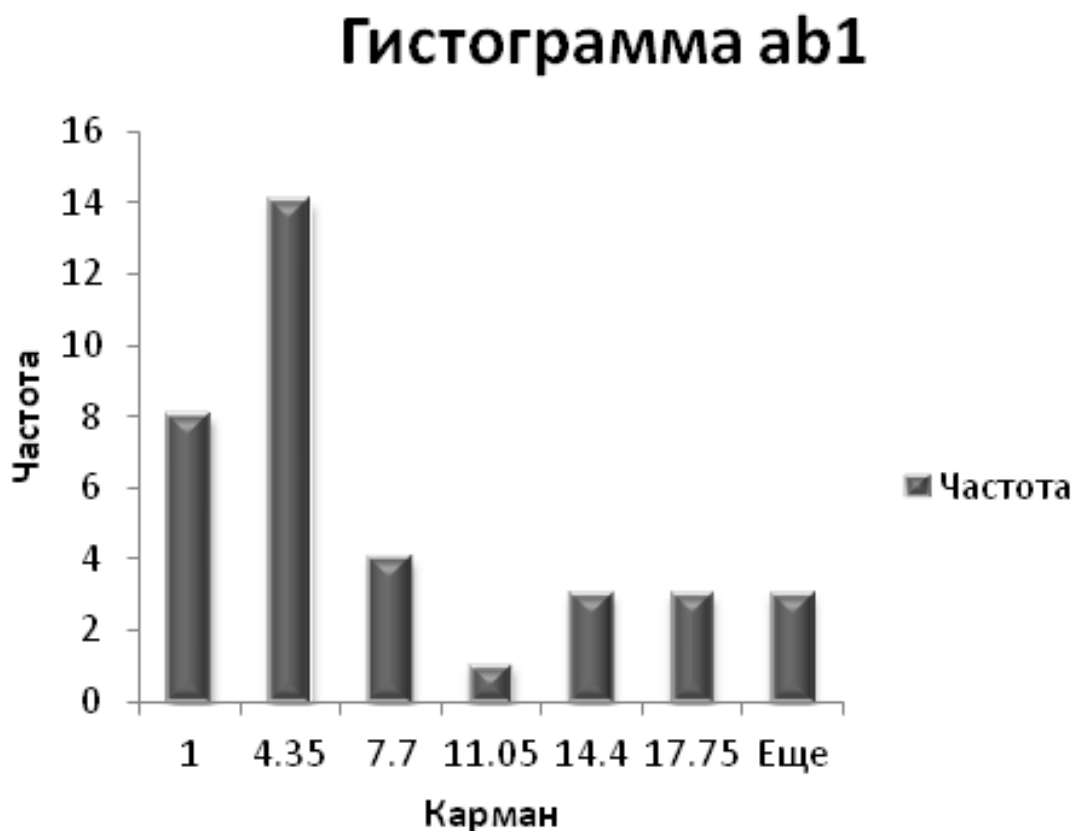


Рис. 3. Гистограмма первичной выборки параметров

По виду представленной гистограммы можно предположить, что параметры имеют гамма-распределение. По выборке можно рассчитать параметры соответствующего гамма-распределения: $rate = 0,1301069$, $shape = 0,8014204$.

Далее были получены байесовские оценки параметров с использованием алгоритма Метрополиса со случайным блужданием. Для реализации этого алгоритма на языке **R** были написаны специальные программы. В целом метод получения оценок можно охарактеризовать как эмпирический байесовский подход.

В итоге были оценены параметры парных копулярных моделей для восемнадцати пар переменных по пять моделей для каждого набора. Оцененные модели сравнивались между собой по двум показателям: по расстоянию между выборочной и модельной функциями распределения и отклонению модельного значения коэффициента корреляции Кендалла от выборочного значения этого коэффициента. Формулы вычисления соответствующих показателей приводятся ниже.

$$RSS_{\tau} = \sum_{1 \leq i \leq 18} \left(\tau_i^{(ob)} - \tau_i^{(mod)} \right)^2;$$

$$RSS_F = \sum_{1 \leq i \leq 18} \left(\sum_{k=1}^{69} \left(F_i^{(ob)}(z_k', z_k'') - F_i^{(mod)}(z_k', z_k'') \right)^2 \right). \quad (8)$$

Результаты сравнения копулярных моделей приведены в табл. 5.

Таблица 5

Результаты оценивания парных моделей

Коэффициент	Maximum likelihood method				Bayes method
	Frank	Gauss	FGM	RLUF	RLUF
RSS_F	0,918	1,399	2,249	1,026	0,951
RSS_t	0,006	0,148	0,008	0,064	0,019

Согласно результатам, отраженным в табл. 5, нетрудно заметить, что FGM-копула оказалась хуже остальных копул в плане подгонки выборочной функции распределения. Однако, вопреки ожиданиям, данная модель позволяет достаточно хорошо оценить коэффициент корреляции Кендалла. Копула Гаусса значительно уступает копуле Франка и RLUF-копуле по двум критериям. Таким образом, посредством выводов, сделанным по вышеприведенным табличным результатам, было принято решение отказаться от FGM-копулы и копулы Гаусса в рамках проводимого исследования. Важно также подчеркнуть, что модель RLUF-копулы, оцененная эмпирическим байесовским методом, незначительно уступает копуле Франка в плане подгонки выборочной функции распределения. Это позволяет сделать вывод о применимости данной копулы для моделирования совместных распределений переменных, использованных в настоящем исследовании.

Полученные оценки параметров парных копулярных моделей далее использовались в работе для создания повторной выборки значений параметров. Гистограмма этой выборки приведена на рис. 4. Данная выборка существенно отличается от первичной выборки по диапазону колебаний – включает только значения параметров, близкие к единице.

По виду гистограммы можно предположить, что параметры имеют гамма-распределение. По выборке, как и в предыдущем случае, можно рассчитать параметры гамма-распределения: $r = 7,129545$; $s = 0,6225816$. Далее по формуле (6) были вычислены оценки параметров простой тройной модели RLUF-копулы. Для этого использовался алгоритм Метрополиса

со случайным блужданием. Для реализации данного алгоритма на языке **R** были написаны специальные программы.

Полученные оценки парных и тройных моделей RLUF-копулы использовались в дальнейшем для получения оценок коэффициентов выпуклой линейной комбинации сложной модели RLUF-копулы. Для реализации соответствующей процедуры применялся алгоритм Метрополиса со случайным блужданием. Значения-кандидаты вычислялись по следующему принципу: генерировались четыре случайных равномерных числа из $[0; 1]$, затем данные числа делились на сумму этих чисел. Были построены оценки параметров совместных распределений для восьми троек переменных. Результаты оценивания тройных моделей приведены в табл. 6.

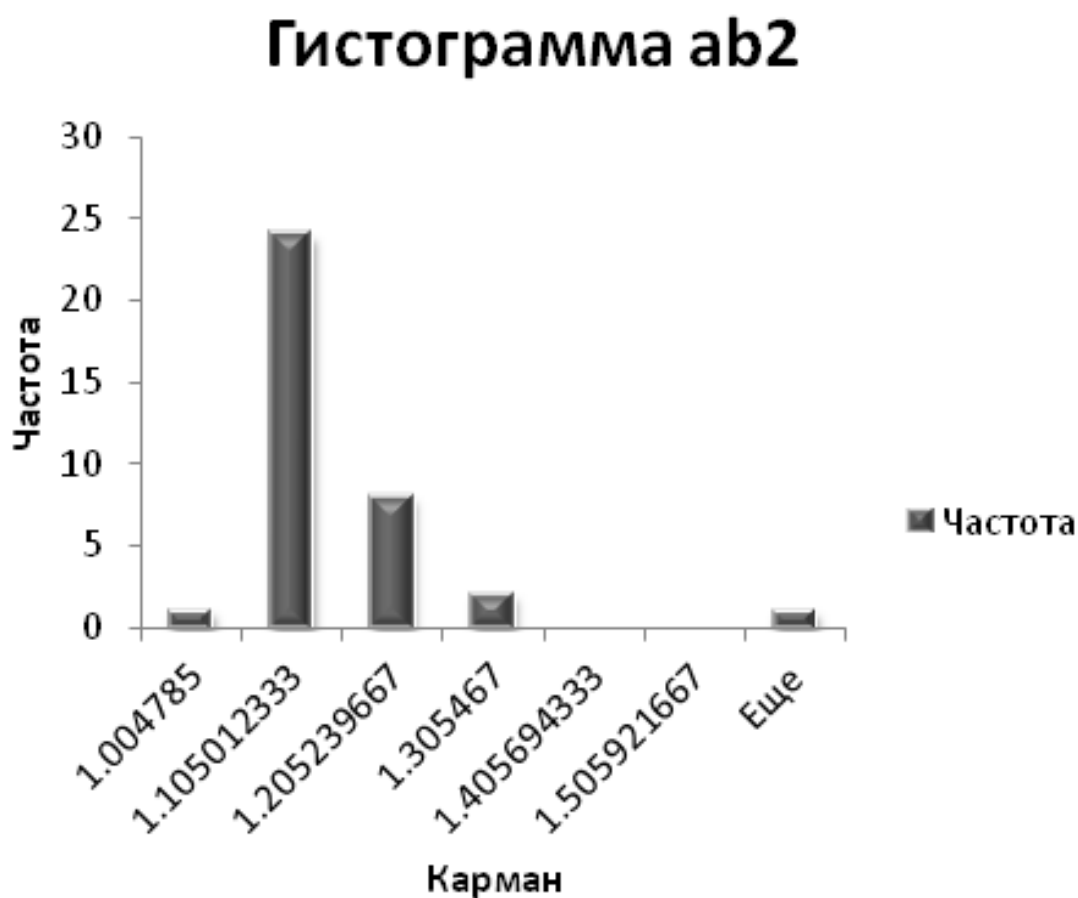


Рис. 4. Гистограмма величины $(ab - 1)$ по второй выборке

Таблица 6

Оценки параметров тройных моделей

Параметры		<i>Alfa</i>	<i>Alfa</i>	<i>Alfa</i>	<i>Pcm</i>	<i>Sob</i>	<i>Sob</i>	<i>Sob</i>	<i>Nmb</i>
		<i>Ipp</i>	<i>Ipp</i>	<i>Inc</i>	<i>Inc</i>	<i>Ipp</i>	<i>Ipp</i>	<i>Inc</i>	<i>Ipp</i>
		<i>Inc</i>	<i>Exr</i>	<i>Exr</i>	<i>Oil</i>	<i>Inc</i>	<i>Exr</i>	<i>Exr</i>	<i>Ipc</i>
RLUF	<i>A</i>	1,141	1,160	1,091	1,112	1,116	1,139	1,067	1,106
3simple	<i>B</i>	1,144	1,058	1,071	1,077	1,053	1,094	1,068	1,049
	<i>C</i>	1,092	1,111	1,111	1,055	1,094	1,099	1,054	1,077

Продолжение табл. 6

Параметры		<i>Alfa</i>	<i>Alfa</i>	<i>Alfa</i>	<i>Pcm</i>	<i>Sob</i>	<i>Sob</i>	<i>Sob</i>	<i>Nmb</i>
		<i>Ipp</i>	<i>Ipp</i>	<i>Inc</i>	<i>Inc</i>	<i>Ipp</i>	<i>Ipp</i>	<i>Inc</i>	<i>Ipp</i>
		<i>Inc</i>	<i>Exr</i>	<i>Exr</i>	<i>Oil</i>	<i>Inc</i>	<i>Exr</i>	<i>Exr</i>	<i>Ipc</i>
	<i>Lambda</i>	0,508	0,450	0,807	0,450	-0,530	2,262	0,819	-1,020
RLUF	<i>teta1</i>	0,242	0,250	0,257	0,250	0,247	0,205	0,257	0,270
3complex	<i>teta2</i>	0,264	0,260	0,248	0,266	0,262	0,205	0,236	0,317
	<i>teta3</i>	0,255	0,243	0,248	0,237	0,252	0,198	0,248	0,194
	<i>teta4</i>	0,239	0,247	0,248	0,248	0,239	0,392	0,260	0,219
	RSS_F	0,043	0,031	0,039	0,037	0,039	0,041	0,039	0,056
Frank	<i>Alpha</i>	-0,283	-0,203	0,027	0,357	0,427	-0,653	0,507	0,047
	RSS_F	0,042	0,034	0,040	0,036	0,047	0,080	0,029	0,066

Для сравнения построенных моделей, как и в предыдущем случае, использовалось расстояние между модельной и выборочной функциями распределения. Данный показатель вычислялся по формуле, аналогичной формуле (8), но для трех переменных z . Сумма расстояний для копулы Франка – 0,373831, для RLUF-копулы – 0,323445. На основании полученных результатов можно сделать вывод, что копулы семейства RLUF выглядят не хуже копулы Франка в части моделирования совместных распределений.

Прикладной целью настоящего исследования является определение оптимального размера банковского резерва. Важно понимать, что размер соответствующего резерва должен быть минимальным, позволяя обеспечить эффективность использования денежных средств. При этом не следует забывать о важности предупреждения соответствующих рисков, связанных с просрочкой платежа по имеющимся обязательствам. Таким образом, размер резервных требований должен обеспечить покрытие возможных потерь, связанных с просроченной задолженностью по выданным кредитам.

Необходимо напомнить, что на предыдущем этапе исследования были построены сорок две парные и тройные модели совместного распределения рядов z . Для каждой подобной модели была сгенерирована случайная выборка из трехсот наблюдений. При этом изначально генерировалась выборка из двух или трех независимых асимметричных распределений Стьюдента. С этой целью использовалась созданная в рамках исследования функция *rat* в программной среде **R**. Затем к данной выборке применялся алгоритм принятия-отклонения для создания выборки из совместного распределения с использованием функции плотности соответствующей копулярной модели. Важно заметить при этом, что для использования алгоритма принятия-отклонения необходимо вычислять максимальное значение функции плотности копулярной модели. Для копулы Франка теоретическое решение этой задачи представляет некоторые сложности [14], поэтому в работе было принято решение использовать максимальное значение по выборке. В то же время для RLUF-копул максимальное значение плотности определялось на основе ранее обозначенной формулы (4).

На основании созданных искусственных выборок для каждой построенной модели разыгрывалось сто сценариев возможных объемов просроченной задолженности по кредитам. Посредством игнорирования пяти наихудших вариантов возможных сценариев была получена верхняя граница одностороннего 95 %-го доверительного интервала для возможного объема просроченной кредитной задолженности. В табл. 7 приведены наилучшие прогнозы объема задолженности, а также обозначена модель, на основе которой получен наилучший прогноз. Для возможности проведения сравнительного анализа приведены реальные значения объемов задолженности, а также действующие объемы резервных требований соответствующих банковских учреждений. Более подробная информация о прогнозах, построенных по всем созданным в исследовании моделям, приведена в Приложении 1.

Таблица 7

Анализ эффективности формирования банковского резерва
на покрытие кредитных потерь

Наименование банковского учреждения	Копула	Переменные	Ноябрь 2013 г.			Декабрь 2013 г.			Январь 2014 г.		
			Задолженность	Резерв	Прогноз	Задолженность	Резерв	Прогноз	Задолженность	Резерв	Прогноз
Альфа-банк	Rluf2	<i>Alfa Ipp</i>	0,035	0,078	0,034	0,039	0,081	0,035	0,032	0,082	0,043
ВТБ	Frank2	<i>Vtb Ipc</i>	0,034	0,075	0,043	0,038	0,071	0,045	0,041	0,071	0,046
Промсвязьбанк	Rluf2	<i>Psb Ipc</i>	0,031	0,054	0,037	0,031	0,053	0,041	0,031	0,052	0,047
Петрокоммерц	Rluf2	<i>Pcm Inc</i>	0,075	0,112	0,083	0,051	0,088	0,099	0,075	0,126	0,103
Собинбанк	Rluf3	<i>Sob Inc Exr</i>	0,048	0,066	0,053	0,048	0,065	0,067	0,052	0,069	0,067
Новосибирский муниципальный банк	Frank2	<i>Nmb Ipc</i>	0,062	0,086	0,070	0,063	0,082	0,077	0,060	0,077	0,088
Ханты-Мансийский банк	Rluf2	<i>Pkh Ipc</i>	0,015	0,070	0,017	0,026	0,073	0,018	0,029	0,063	0,022

Анализируя полученные результаты прогнозирования, можно сделать следующие выводы. В подавляющем большинстве случаев рекомендуемые размеры резервных отчислений выглядят вполне адекватно. Только в четырех случаях из двадцати прогнозы оказались ниже реальных объемов задолженности. При этом при прогнозировании на три месяца вперед прогноз оказался ниже реальной задолженности только в одном случае из семи, а именно для Ханты-Мансийского банка, для которого корреляционная зависимость изначально была наихудшей. При этом уместно подчеркнуть, что банковские учреждения самостоятельно могут выбирать уровень риска, рассчитывая прогноз задолженности по предложенной в данной работе методике. Если сравнивать прогнозы с реальными резервами, то в восемнадцати случаях из двадцати одного прогноз просроченной задолженности по кредитам оказался ниже установленного уровня резерва, причем в некоторых случаях значительно ниже. Это говорит о том, что рекомендуемая в настоящем исследовании методика может позволить существенно сократить резервы и высвободить значительные финансовые средства банков.

По результатам, приведенным в табл. 7, можно также провести сравнение по рекомендациям уровня резерва, полученным в результате построения модели посредством применения RLUF-копулы, с одной стороны, и копулы Франка, с другой стороны. В пяти случаях из семи наилучший прогноз был получен именно с использованием RLUF-копулы. Данный вывод говорит о том, что обе выбранные модели в равной степени пригодны для моделирования объема задолженности по кредитам. Важно также отметить, что переход от двойных к тройным моделям не приводит к значительным изменениям прогнозов объемов задолженности.

В настоящем исследовании была предложена методология расчета оптимального размера банковского резерва на возможные кредитные потери, связанные с просрочкой платежа по выполненным обязательствам. Посредством применения различных эконометрических методов и соответствующего инструментария были построены и оценены различные копулярные модели, описывающие зависимости объема просроченной задолженности по кредитам от определенных макроэкономических индикаторов. Наличие слабой корреляционной зависимости между переменными не стало в исследовании камнем преткновения благодаря эффективно выбранному соответствующему семейству копул. Построенная модель с большим количеством переменных RLUF-копулы, наряду с копулой Франка, оправдала себя в части полученных оценок параметров модели, а также посредством вычисленных прогнозных значений просроченной кредитной задолженности. Результат прогнозирования обеспечил покрытие кредитного риска и подчеркнул неэффективность банковской методологии в части формирования резервных требований на покрытие кредитных потерь – рекомендуемый размер банковского резерва в виде верхней границы одностороннего 95 % доверительного интервала для объемов задолженности в большинстве случаев оказался значительно ниже размера действующего объема отчислений в резервный фонд.

Таким образом, предложенный вариант моделирования может быть использован участниками банковского сектора в качестве внутренней банковской модели с целью предупреждения риска нарушения платежеспособности по соответствующим кредитным обязательствам.

Список литературы

1. Altman E. I., Brady B., Resti A., Sironi A. The link between default and recovery rates: theory, empirical evidence, and implications // *Journal of Business*. 2005. Vol. 78 (6). P. 2203–2227.
2. Kealhofer S. Portfolio management of default risk. KMV Corporation. 1998. URL: <http://www.complexity.ru/papers/999-0000-033.pdf>.
3. Morgan J. P. CreditMetrics – technical document. New York, 1997. URL: http://www.credit-risk.ru/publications/files_attached/creditmetrics_techdoc.pdf.
4. Фантаццини Д. Управление кредитным риском // *Прикладная эконометрика*. 2008. № 12 (4). С. 84–137.
5. Фантаццини Д. Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // *Прикладная эконометрика*. 2009. № 13 (1). С. 105–138.

6. *Бологов Я. В.* Оценка риска кредитного портфеля с использованием копула-функций. М.: Синергия Пресс, 2013. 22 с.
7. *Салмин С. П., Пьянов Д. А.* Использование метода копул в оценке кредитоспособности групп взаимосвязанных заемщиков // Управление экономическими системами: электронный научный журнал. 2013. № 1. URL: <http://www.uecs.ru/uecs49-492013/item/1960-2013-01-31-07-57-10>.
8. *Dolati A., Ubeda-Flores M.* Some new parametric families of multivariate copulas // International Mathematical Forum, 1. 2006. P. 17–25.
9. *Скоблева Э. И., Князев А. Г., Лепехин О. А., Казакова К. А.* Динамический анализ сегментации российского банковского сектора // Современные проблемы науки и образования. 2014. № 6. URL: <http://www.science-education.ru/120-16784>.
10. *Hansen B. E.* Autoregressive conditional density estimation // International Economic Review. 1994. Vol. 35 (3). P. 705–730.
11. *Thierry Ane, Loredana Ureche-Rangau and Chiraz Labidi-Makni.* Time-varying conditional dependence in Chinese stock markets // Applied Financial Economics. 2008. Vol. 18. P. 895–916.
12. *Gordeev V. A., Knyazev A. G., Shemyakin A. E.* Selection of copula model for inter-market dependence // Model Assisted Statistics and Applications. 2012. Vol. 7. P. 315–325.
13. *Nelsen R. B.* An Introduction to Copulas. New York: Springer, 2006. 269 p.
14. *Ахунжанов Р. К., Кангина Н. Н., Князев А. Г., Лепехин О. А.* Плотности архимедовых копул и их приложения для прогнозирования курсов валют // Прикаспийский журнал: управление и высокие технологии. 2014. № 2. С. 10–23.

Материал поступил в редколлегию 23.07.2015

Приложение 1

Прогнозирование просроченной задолженности по кредитам

Копула	Переменные	Ноябрь 2013	Декабрь 2013	Январь 2014
Rluf2	<i>Alfa Ipp</i>	0,034	0,035	0,043
Rluf2	<i>Alfa Inc</i>	0,032	0,039	0,052
Rluf2	<i>Alfa Exr</i>	0,053	0,053	0,051
Frank	<i>Alfa Ipp</i>	0,029	0,043	0,046
Frank	<i>Alfa Inc</i>	0,043	0,049	0,048
Frank	<i>Alfa Exr</i>	0,040	0,045	0,046
Rluf3	<i>Alfa Ipp Inc</i>	0,032	0,043	0,045
Rluf3	<i>Alfa Ipp Exr</i>	0,028	0,040	0,045
Rluf3	<i>Alfa Inc Exr</i>	0,056	0,052	0,050
Frank3	<i>Alfa Ipp Inc</i>	0,044	0,044	0,048
Frank3	<i>Alfa Ipp Exr</i>	0,056	0,054	0,052
Frank3	<i>Alfa Inc Exr</i>	0,046	0,050	0,049
Rluf2	<i>Vtb Ipc</i>	0,043	0,045	0,046
Frank	<i>Vtb Ipc</i>	0,043	0,045	0,046
Rluf2	<i>Psb Ipc</i>	0,037	0,041	0,047
Frank	<i>Psb Ipc</i>	0,041	0,048	0,050
Rluf2	<i>Pcm Inc</i>	0,083	0,099	0,103
Rluf2	<i>Pcm Oil</i>	0,083	0,090	0,108
Frank	<i>Pcm Inc</i>	0,083	0,095	0,108

Продолжение прилож. 1

Копула	Переменные	Ноябрь 2013	Декабрь 2013	Январь 2014
Frank	<i>Pcm Oil</i>	0,089	0,114	0,120
Rluf3	<i>Pcm Inc Oil</i>	0,093	0,085	0,106
Frank3	<i>Pcm Inc Oil</i>	0,081	0,102	0,119
Rluf2	<i>Sob Ipp</i>	0,064	0,062	0,069
Rluf2	<i>Sob Inc</i>	0,056	0,053	0,071
Rluf2	<i>Sob Exr</i>	0,053	0,050	0,077
Frank	<i>Sob Ipp</i>	0,064	0,070	0,069
Frank	<i>Sob Inc</i>	0,057	0,057	0,076
Frank	<i>Sob Exr</i>	0,055	0,074	0,078
Rluf3	<i>Sob Ipp Inc</i>	0,053	0,069	0,070
Rluf3	<i>Sob Ipp Exr</i>	0,050	0,060	0,075
Rluf3	<i>Sob Inc Exr</i>	0,053	0,067	0,067
Frank3	<i>Sob Ipp Inc</i>	0,055	0,065	0,068
Frank3	<i>Sob Ipp Exr</i>	0,062	0,062	0,076
Frank3	<i>Sob Inc Exr</i>	0,058	0,066	0,069
Rluf2	<i>Nmb Ipp</i>	0,076	0,091	0,098
Rluf2	<i>Nmb Ipc</i>	0,065	0,081	0,095
Frank	<i>Nmb Ipp</i>	0,073	0,087	0,102
Frank	<i>Nmb Ipc</i>	0,070	0,077	0,088
Rluf3	<i>Nmb Ipp Ipc</i>	0,098	0,088	0,096
Frank3	<i>Nmb Ipp Ipc</i>	0,078	0,091	0,099
Rluf2	<i>Pkh Ipc</i>	0,017	0,018	0,022
Frank	<i>Pkh Ipc</i>	0,019	0,023	0,023

K. A. Kazakova, A. G. Knyazev, O. A. Lepekhin

*Astrakhan State University
20a, Tatishchev Str., Astrakhan, 414056, Russian Federation*

*kristinakazakova0309@gmail.com, agknyazev@mail.ru,
okmb07@yandex.ru*

**OPTIMUM VOLUME OF BANK RESERVE:
FORECASTING OF OVERDUE CREDIT INDEBTEDNESS
USING COPULA MODELS**

The article propose to consider the possibility of RLUF-copulas application for the creation of joint distributions of overdue credit indebtedness ranks with macroeconomic indicators for the purpose of indebtedness forecasting and also for the definition of optimum volumes of reserve requirements for the corresponding losses. In this research the comparative analysis of multivariate distributions of RLUF-copula estimation with such classical copulas, as FGM-copula, Frank's copula and Gauss's copula is made. In the article the method of maximum likelihood is used for receiving estimates of model parameters. In case of RLUF-copula Bayesian estimates of parameters are received using the Metropolis algorithm with random volatility. Forecasting of bank reserve volumes for all received models is executed in the form of random sample generation by the means of the algorithm of acceptance-deviation for the creation of the corresponding sample of joint distribution using the

copula density function. As the result of playing of hundred possible scenarios of indebtedness volumes is obtained the 95 % confidence level for the possible volume of credit indebtedness which can fully act as the optimum volume of reserve requirements for the corresponding credit losses.

Keywords: bank reserve, credit risk, overdue credit indebtedness, copula model, forecasting.

References

1. Altman E. I., Brady B., Resti A., Sironi A. The link between default and recovery rates: theory, empirical evidence, and implications. *Journal of Business*, 2005, Vol. 78 (6), p. 2203–2227.
2. Kealhofer S. Portfolio management of default risk. *KMV Corporation*. 1998. URL: <http://www.complexity.ru/papers/999-0000-033.pdf>.
3. Morgan J. P. CreditMetrics – technical document. New York, 1997. URL: http://www.creditrisk.ru/publications/files_attached/creditmetrics_techdoc.pdf.
4. Fantatstsini D. Upravleniye kreditnym riskom [Credit risk management]. *Prikladnaya ekonometrika [Applied Econometrics]*, 2008, no. 12 (4), p. 84–137. (In Russ.)
5. Fantatstsini D. Ekonometrichesky analiz finansovykh dannykh v zadachakh upravleniya riskom [Econometric analysis of financial data in problems of risk management]. *Prikladnaya ekonometrika [Applied Econometrics]*, 2009, no. 13 (1), p. 105–138. (In Russ.)
6. Bologov Ya. V. Otsenka riska kreditnogo portfelya s ispolzovaniyem kopula-funktsy [Estimating of credit portfolio risk using copula]. *Sinergiya Press [Sinergiya Press]*, 2013, 22 p. (In Russ.)
7. Salmin S. P., Pyanov D. A. Ispolzovaniye metoda kopul v otsenke kreditosposobnosti grupp vzaimosvyazannykh zayemshchikov [Using method of copula in solvency assessment of groups of interconnected borrowers]. *Upravleniye ekonomicheskimi sistemami: elektronny nauchny zhurnal [Management of economic systems: electronic scientific journal]*, 2013, no. 1. URL: <http://www.uecs.ru/uecs49-492013/item/1960-2013-01-31-07-57-10>. (In Russ.)
8. Dolati A., Ubada-Flores M. Some new parametric families of multivariate copulas. *International Mathematical Forum*, 2006, no. 1, p. 17–25.
9. Skobleva E. I., Knyazev A. G., Lepekhin O. A., Kazakova K. A. Dinamicheskyy analiz segmentatsii rossyskogo bankovskogo sektora [Dynamic analysis of the segmentation of Russian banking sector]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya [Modern problems of science and education]*, 2014, no. 6. URL: <http://www.science-education.ru/120-16784>. (In Russ.)
10. Hansen B. E. Autoregressive conditional density estimation. *International Economic Review*, 1994, vol. 35 (3), p. 705–730.
11. Thierry Ane, Loredana Ureche-Rangau and Chiraz Labidi-Makni. Time-varying conditional dependence in Chinese stock markets. *Applied Financial Economics*, 2008, vol. 18, p. 895–916.
12. Gordeev V. A., Knyazev A. G., Shemyakin A. E. Selection of copula model for inter-market dependence. *Model Assisted Statistics and Applications*, 2012, vol. 7, p. 315–325.
13. Nelsen R. B. An Introduction to Copulas. New York, Springer, 2006. 269 p.
14. Akhunzhanov R. K., Kangina N. N., Knyazev A. G., Lepekhin O. A. Plotnosti arkhimedovykh kopul i ikh prilozheniya dlya prognozirovaniya kursov valyut [Density of Archimedean copulas and their applications for forecasting of exchange rates]. *Prikaspyskiy zhurnal: upravleniye i vysokiye tekhnologii [Caspian journal: management and high technologies]*, 2014, no. 2, p. 10–23. (In Russ.)