УДК 330.322.01
JEL G 24

А. О. Баранов [1, 2], Е. И. Музыко [3], В. Н. Павлов [4]

[1] *Новосибирский национальный исследовательский государственный университет*
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

[2] *Институт экономики и организации промышленного производства СО РАН*
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090, Россия

[3] *Новосибирский государственный технический университет*
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск, 630073, Россия

[4] *Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого*
ул. Политехническая, 29, Санкт-Петербург, 195251, Россия

baranov@ieie.nsc.ru, mei927@mail.ru, victor_n_pavlov@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МЕТОДИКИ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЧЕТКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВ МОДЕЛИ ГЕСКЕ И ЕЕ МОДИФИКАЦИЙ ДЛЯ РЕАЛЬНЫХ ОПЦИОНОВ *

Цель исследования – адаптация методики нечетких множеств к анализу эффективности многостадийных инвестиционных проектов. Проблема, на решение которой направлено исследование, состоит в следующем.

Метод нечетко-случайных пар был разработан для исследования нечетко-множественных свойств случайных точечно-множественных отображений. В данной статье предлагается обобщение метода нечетко-случайных пар для исследования стохастических процессов. Обобщение инициировано подходом к изучению неопределенности в исследовательском проекте, поддержанном грантом РФФИ № 15-06-06914. В этом проекте рассматриваются случайные процессы, являющиеся решением одной из модификаций модели Геске (модели Геске – Хсу).

Обобщение метода нечетко-случайных пар на этот случай заключается в следующем: 1) переменная времени t в процессе $\xi(t)$ заменяется на случайную величину u, равномерно распределенную на отрезке $[0;T]$, что превращает процесс $\xi(t)$ в двумерную случайную величину $V=(u,\xi(u))$, заданную на $[0;T]\times R$; 2) случайная величина V с использованием интервального преобразования преобразуется в случайное точечно-множественное отображение; 3) для преобразования случайного точечно-множественного отображения в нечеткое множество и построения его функции принадлежности применяется интервальное преобразование; 4) для нечетко-множественного исследования полученного точечно-множественного отображения применяется метод нечетко-случайных пар.

В статье содержатся основные определения абстрактных процедур метода нечетко-случайных пар. Для некоторых инновационных проектов характерны отсутствие прибыльности на первых этапах их реализации и большой риск, связанный с высокой неопределенностью оценки генерируемых ими прогнозируемых денежных потоков. В этой ситуации использование стандартных методов анализа экономической эффективности инвестиционных проектов, реализуемых в высокотехнологичных отраслях промышленности, не позволяет получить комплексную оценку целесообразности осуществления инвестиций, а также количественно оценить достоверность динамики прогнозируемых показателей. Все это требует развития теории и методов анализа экономической эффективности инноваций. Применение метода реальных опционов, а также аппарата нечетких множеств является, по нашему мнению, направлением совершенствования названных методов.

Ключевые слова: инновационный проект, нечеткие множества, венчурное финансирование, неопределенность, метод реальных опционов.

*Исследование поддержано грантом РФФИ № 15-06-06914 «Разработка и применение новых методов оценки экономической эффективности инновационных проектов с венчурным финансированием в промышленности».

Баранов А. О., Музыко Е. И., Павлов В. Н. Математическое обоснование методики исследования нечетко-множественных свойств траекторий модели Геске и ее модификаций // Мир экономики и управления. 2016. Т. 16, № 2. С. 78–88.

Основные определения, связанные с нечетко-множественными методами

Пусть R^m – m-мерное арифметическое пространство с борелевской мерой r (см.: [1. С. 226]), A – классическое (четкое) замкнутое множество в нем. Теория классических множеств разработана благодаря усилиям Г. Кантора [2]. Обозначим 2^{R^m} множество всех замкнутых (четких) подмножеств пространства R^m, наделенное экспоненциальной топологией (которую часто называют μ-топологией (см.: [3. С. 168]) и Борелевской σ-алгеброй S_μ.

Через $\Im\left(R^m\right)$ обозначим совокупность всех нечетких множеств пространства R^m (см.: [4. С. 38]). Нечеткое множество $A \in \Im\left(R^m\right)$ однозначно определяется своей функцией принадлежности $\chi_A : R^m \to [0;1]$, которая задает для каждого $x \in R^m$ вещественное число $0 \le \chi_A(x) \le 1$, определяющее степень принадлежности точки x нечеткому множеству A. В терминах нечеткой логики число $\chi_A(x)$ представляет собой степень истинности высказывания $\{x \in A\}$. Например, если $\chi_A(x) = 0{,}5$, то степень истинности высказывания $\{x \in A\}$ равна $0{,}5$.

Пусть $x \in R^m$, $A \in 2^{R^m}$, Ω – вероятностное пространство с вероятностной мерой p и $\xi : \Omega \to 2^{R^m}$ – измеримое точечно-множественное отображение. Обозначим через Σ – множество таких отображений. Определим функцию

$$h_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad x \in A, \\ 0, & \text{если} \quad x \notin A. \end{cases}$$

Как показано в [4], отображение $h_x \circ \xi : \Omega \to R$ является вещественной случайной величиной, математическое ожидание которой $E\left(h_x \circ \xi\right)$ удовлетворяет неравенствам

$$0 \le q_\xi(x) \overset{df}{=} E\left(h_x \circ \xi\right) = \int_\Omega h_x\left(\xi(\omega)\right) dp(\omega) \le 1.$$

Здесь и далее в формулах для исключения неоднозначного толкования текста после идентификатора меры в скобках указывается переменная, которой соответствует данная мера.

Следовательно, отображение $q_\xi : R^m \to [0;1]$ можно интерпретировать как функцию принадлежности некоторого, однозначно определяемого этим отображением, нечеткого множества $A_\xi \in \Im\left(R^m\right)$, порожденного случайным точечно-множественным отображением $\xi \in \Sigma$. Соответствием $\xi \to A_\xi$ определяется отображение $F : \Sigma \to \Im\left(R^m\right)$, так что $A_\xi = F(\xi)$.

Отметим, что образ обратного отображения $F^{-1}\left(F(\xi)\right)$ – это некоторое множество случайных точечно-множественных отображений, содержащееся в Σ, причем, очевидно, $\xi \in F^{-1}\left(F(\xi)\right)$.

Согласно [4], назовем набор $\left(\xi, F(\xi)\right)$ нечетко-случайной парой и обозначим через $\Im^\Sigma\left(R^m\right)$ множество, элементами которого являются пары $\left(\xi, F(\xi)\right)$, где $\xi \in \Sigma$.

В приложениях функция принадлежности нечеткого множества A_ξ вычисляется приближенно с использованием стохастического алгоритма, базовой процедурой которого является процедура интервального преобразования случайной величины в нечеткое множество (см.: [1. С. 55–74]).

Интервальное преобразование и стохастический алгоритм

Пусть $u : \Omega \to R^m$ – случайная величина; $v : R^m \to 2^{R^m}$ – измеримое отображение. Следуя [4], определим случайное точечно-множественное отображение

$$\xi : \Omega \to 2^{R^m}$$

формулой

$$\xi(\omega) = (v \circ u)(\omega),$$

где через $v \circ u$ обозначена суперпозиция отображений u и v. Очевидно, так определенное $\xi(\omega)$ принадлежит Σ.

Таким образом, построено преобразование случайной величины u в нечеткое множество $F(v \circ u) = F(\xi)$.

Описанное преобразование случайной величины u в нечеткое множество $F(v \circ u)$ и называется интервальным преобразованием. Свойства интервального преобразования $u \to \xi = v \circ u$ определяются параметрами точечно-множественного отображения $v : R^m \to 2^{R^m}$. Изменяя v, мы получим разные нечеткие множества, соответствующие одной и той же случайной величине u.

Наиболее широко используемым в приложениях является интервальное преобразование, в котором отображение v имеет вид $v(x) \equiv v_a(x) = \{y \in R^m \mid x - a \le y < x + a\}$. Здесь $a \in R^m$ и $a > 0$. Свойства этого преобразования изучены, например, в [5].

Обратное преобразование нечеткого множества в случайную величину выполняется по следующей схеме.

Шаг 1. По функции принадлежности нечеткого множества $\chi(x)$ определяется плотность распределения:

$$f(x) = \frac{\chi(x)}{\int\limits_{R^m} \chi(t)\,dr(t)}. \tag{1}$$

Шаг 2. Выбирается случайная величина u^0, соответствующая плотности распределения (1).

Примечание. Так как выбор случайной величины u^0 на шаге 2 выполняется неоднозначно (см.: [4. С. 41]), то для конкретизации случайной величины здесь используется дополнительная информация о свойствах решаемой прикладной задачи. Методика выбора u^0 основана на использовании этой дополнительной информации.

Пусть задана случайная величина u^0. Стохастический алгоритм представляет собой совокупность следующих двух процедур.

Шаг 1. Генерируется выборка $u_1^0, u_2^0, \ldots, u_N^0$ $\left(u_k^0 \in R^s\right)$ значений случайной величины u^0. По ней с использованием экономико-математических моделей, используемых в конкретном приложении[1], вычисляется выборка $u_1, u_2, \ldots, u_N$ $\left(u_k \in R^m\right)$ значений результирующей случайной величины u.

Шаг 2. Выполняется интервальное преобразование $F(v_a \circ u)$ с использованием эмпирической функции распределения $\Phi_N^u(x)$.

За математическим обоснованием сходимости последовательности нечетких множеств $\Phi_N^u(x)$ мы отсылаем читателя к [4. С. 72].

Основным параметром стохастического алгоритма является вектор a.

[1] В межотраслевых исследованиях – межотраслевая экономико-математическая модель, в исследовании реальных опционов – избранная авторами модификация модели Геске, и т. д.

Математическое ожидание неопределенности вещественной функции на случайном множестве

Пусть $\xi : \Omega \to 2^{R^m}$ – случайное точечно-множественное отображение и $y : R^m \to R$ – вещественная измеримая функция. Рассмотрим вещественную случайную величину:

$$Y_\xi(\omega) = \int\limits_{\xi(\omega)} y(x)dr(x). \tag{2}$$

Преобразование вещественной функции m переменных y в случайную величину Y_ξ, определенное формулой (2), обозначим через H_ξ, так что $Y_\xi = H_\xi(y)$. Преобразование H_ξ каждой вещественной измеримой функции y ставит в соответствие случайную величину $H_\xi(y)$, характеризующую свойство неопределенности функции y на множестве $\xi(\omega)$.

Лемма 1. Математическое ожидание EY_ξ неопределенности вещественной измеримой функции $y(x)$ на случайном множестве ξ вычисляется по формуле:

$$EY_\xi = \int\limits_{R^m} y(x)q_\xi(x)dr(x).$$

Доказательство. По определению математического ожидания справедливо равенство

$$EY_\xi = \int\limits_\Omega Y_\xi(\omega)dp(\omega) = \int\limits_\Omega dp(\omega)\int\limits_{\xi(\omega)} y(x)dr(x) = \int\limits_\Omega dp(\omega)\int\limits_{R^m} y(x)h_x(\xi(\omega))dr(x).$$

Далее применяем теорему Фубини и получаем:

$$\int\limits_\Omega dp(\omega)\int\limits_{R^m} y(x)h_x(\xi(\omega))\,dr(x) = \int\limits_{R^m} y(x)\,dr(x)\int\limits_\Omega h_x(\xi(\omega))dp(\omega) =$$

$$= \int\limits_{R^m} y(x)\,q_\xi(x)q_\xi(x)dr(x).$$

Лемма доказана.

Математическое ожидание неопределенности вещественной функции на нечетком множестве

Рассмотрим вещественную измеримую функцию $y : R^m \to R$. Математическое ожидание неопределенности функции $y(x)$ на нечетком множестве $F(\xi)$, согласно [4. С. 75], определяется формулой

$$E_{F(\xi)}(y) = \int\limits_{R_m} y(x)\chi_{F(\xi)}(x)dr(x). \tag{3}$$

Следствие из леммы 1. Так как для каждого $x \in R^m$ справедливо равенство $q_\xi(x) = \chi_{F(\xi)}(x)$, то из леммы 1 и формулы (3) следует, что математическое ожидание EY_ξ неопределенности вещественной функции $y(x)$ на случайном множестве ξ и математическое ожидание неопределенности $E_{F(\xi)}(y)$ этой же функции на нечетком множестве $F(\xi)$ совпадают.

Отметим, что функция неопределенности нечеткого множества $F(\xi)$ нечетко-случайной пары $(\xi, F(\xi))$, изученная в [4. С. 43], получается из формулы (3) в частном случае, когда $y(x) \equiv 1$.

Частные функции принадлежности нечеткого множества. Если $x \in R^{m+n}$, то будем писать $x = (y, z)$, где $y \in R^m$, $z \in R^n$, Пусть $\xi : \Omega \to 2^{R^{m+n}}$ – случайное точечно-множественное отображение. Функция принадлежности проекции $\pi_{R^m}F(\xi)$ нечеткого множества $F(\xi)$ на пространство R^m определяется по формуле

$$\chi_{\pi_{R^m}F(\xi)}(y) = p(E_y),$$

где $E_y = \left\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \cap (y \times R^n) \neq \varnothing\right\}$. Функция принадлежности проекции $\pi_{R^n}F(\xi)$ нечеткого множества $F(\xi)$ на пространство R^n определяется по формуле

$$\chi_{\pi_{R^n}F(\xi)}(z) = p(E_z),$$

где $E_z = \left\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \cap (R^m \times z) \neq \varnothing\right\}$.

Заметим, что для $y \in R^m$ и $z \in R^n$ справедливы неравенства

$$\chi_{F(\xi)}(y, z) \leq \chi_{\pi_{R^m}F(\xi)}(y),\ \chi_{F(\xi)}(y, z) \leq \chi_{\pi_{R^n}F(\xi)}(z).$$

Пусть теперь при некотором $y \in R^m$ имеем $\chi_{\pi_{R^m}F(\xi)}(y) > 0$. Тогда правдоподобность того, что $z \in \pi_{R^n}F(\xi)$ при условии $y \in \pi_{R^m}F(\xi)$, вычисляется по формуле

$$p\left(z \in \pi_{R^n}F(\xi) \mid y \in \pi_{R^m}F(\xi)\right) = \frac{\chi_{F(\xi)}(y, z)}{\chi_{\pi_{R^m}F(\xi)}(y)}. \tag{4}$$

Условная правдоподобность (4) при фиксированном y является отображением $\chi : R^n \to [0; 1]$ и представляет собой функцию принадлежности нечеткого множества $G(y) = \pi_{R^n}F(\xi) \mid y$, которую и будем называть частной функцией принадлежности нечетко-случайной пары $(\xi, F(\xi))$ в точке $y \in R^m$. Очевидно, в точке $x = (y, z) \in R^{m+n}$ имеются две частных функции принадлежности:

$$\chi_1(y) = \frac{\chi_{F(\xi)}(y, z)}{\chi_{\pi_{R^n}F(\xi)}(z)} \text{ и } \chi_2(z) = \frac{\chi_{F(\xi)}(y, z)}{\chi_{\pi_{R^m}F(\xi)}(y)}.$$

Предположим, что функции $\chi_1(y)$ и $\chi_2(z)$ таковы, что все сечения нечетких множеств A_{χ_1} и A_{χ_2} замкнуты. Тогда, согласно лемме 3.1 из [4. С. 42], найдутся случайные точечно-множественные отображения $\xi_1 : \Omega \to R^m$ и $\xi_2 : \Omega \to R^n$, для которых справедливы равенства

$$A_{\chi_1} = F(\xi_1),\ A_{\chi_2} = F(\xi_2).$$

Экспериментальное исследование статистических свойств частных функций принадлежности выполнено в публикации [6].

Методика исследования нечетко-множественных свойств модели Геске – Хсу

Винеровский процесс. Случайный процесс W_t, где $t \geq 0$, называется винеровским процессом, если:

1) $W_0 = 0$ почти наверное;

2) W_t – процесс с независимыми приращениями;

3) $W_t - W_s \sim N\left(0, \sigma^2(t-s)\right)$, для любых $0 < s < t < \infty$, где $N\left(0, \sigma^2(t-s)\right)$ обозначает нормальное распределение со средним 0 и дисперсией $\sigma^2(t-s)$.

Свойство роста дисперсии винеровских процессов во времени хорошо согласуется с гипотезой роста со временем волатильности цены базовых активов в моделях реальных опционов. Это в полной мере касается и применения метода реальных опционов при венчурном финансировании инновационных проектов (см.: [7]).

Определение модели Геске – Хсу. Формула, полученная Блэком и Шоулзом (1973) в [8] для оценки стоимости европейского колл-опциона, а также формула Геске (1979) [9], полученная для оценки двухстадийного составного европейского колл-опциона, применимы только для случая постоянной волатильности стоимости базового актива. Хсу в работе [10] получил модификацию модели Геске для случая оценки опционов с волатильностью, зависящей от времени.

При выборе модели оценки реального опциона для случая венчурного инвестирования необходимо принимать во внимание тот факт, что волатильность цены базового актива изменяется с течением времени. По нашему мнению, именно модифицированная формула Геске [10] в полной мере учитывает особенности венчурного инвестирования и может быть использована для оценки стоимости реальных опционов, возникающих при венчурном финансировании инновационных проектов.

Пусть переменная V_t описывает стоимость акций компании в момент времени t, проинвестированной в момент времени $t = 0$ в объеме I_0. В модели Геске предполагается, что переменная $X_t = lnV_t$ является случайным процессом, удовлетворяющим стохастическому дифференциальному уравнению:

$$dX_t = \alpha(\mathrm{t}, \omega)dt + \sigma(t)dW_t, \tag{5}$$

или

$$X_t - X_0 = \int_0^t \alpha(s,\omega)\, ds + \int_0^t \sigma(s)\, dW_t, \tag{9´}$$

где dW_t – приращение Винеровского процесса $dW_t \sim N(0, dt)$, ω – случайный элемент.

Тогда, согласно формуле Ито [11], переменная $V_t = e^{X_t}$ будет удовлетворять стохастическому дифференциальному уравнению

$$dV_t = \left[\alpha(\mathrm{t}, \omega) + \frac{1}{2}\sigma^2(t)\right]V_t dt + \left(\sigma(t)V_t\right)dW_t, \tag{6}$$

где $\alpha(\mathrm{t}, \omega)$ – мгновенная норма доходности акций V_t, $\sigma^2(t)$ – дисперсия мгновенной нормы доходности (оценка риска изменения мгновенной нормы доходности).

Стохастическое дифференциальное уравнение (5) (а следовательно, и уравнение (6)) имеет единственное с точностью до множества меры нуль-непрерывное почти всюду решение на отрезке $[0; T]$. Теория стохастических дифференциальных уравнений изложена, например, в [11].

Далее, для исследования нечетко-множественных свойств траектории V_t используются нечетко-случайные пары $\left(v\circ(t, V_t), F\left(v\circ(t, V_t)\right)\right)$, как это описано ниже.

Пример адаптации нечетко-множественной методики анализа реальных опционов к оценке эффективности венчурного финансирования инновационных проектов

О проекте по организации переработки хлористого метила в этилен. Основные цели проекта, к анализу эффективности которого будет применена нечетко-множественная методика:

• расширение сырьевой базы производства этилена, что позволит создать крупномасштабные производства полимеров из дешевого и распространенного в России сырья – природного газа;

• улучшение технико-экономических показателей производства этилена в сравнении с производством этого продукта из нефтяного углеводородного сырья.

Для оценки эффективности проекта используются известные показатели – внутренняя норма доходности (IRR) и чистый приведенный доход (NPV).

Этилен представляет собой важное сырье для химической промышленности, в особенности для получения таких полимеров, как поливинилхлорид (ПВХ), полиэтилен и полистирол. Россия значительно отстает от развитых стран по производству основных полимеров, в первую очередь ПВХ, импорт которого составляет около 50 % от внутрироссийского спроса. Существующий дефицит покрывается за счет импорта как самого полимера, так и изделий из него.

В настоящее время промышленный метод получения этилена и сопутствующего пропилена основан на парофазном пиролизе легких фракций нефти (прямогонного бензина).

Основным сдерживающим фактором развития производства ПВХ и других полимеров является недостаток углеводородного сырья – этилена. Среднедушевое производство этилена в России в три раза ниже, а производство ПВХ в четыре раза меньше, чем в Западной Европе.

Увеличение переработки нефти в этилен требует комплексного подхода для использования всех получаемых сопутствующих продуктов, что влечет за собой колоссальные инвестиционные затраты. Тенденции возрастания стоимости добычи нефти в РФ, а также рост потребности страны в моторном топливе – основном продукте нефтепереработки также ограничивают сырьевую базу для химической продукции из углеводородов, в том числе и полимеров. Сокращение традиционной нефтяной сырьевой базы приводит к необходимости искать альтернативные источники углеводородов. Между тем Россия обладает огромными ресурсами природного газа – около трети мировых запасов. Природный газ и его основной компонент метан в России в основном используются как энергоресурсы в топливно-энергетическом комплексе. Вопрос экономически более эффективного использования природного газа может быть решен путем его эффективной и глубокой переработки в химическую продукцию.

Задачи, решаемые анализируемым проектом, состоят в следующем.

1. Устранение нарастающего в России дефицита этилена, используемого в качестве основного сырья для производства ПВХ, путем создания технологии получения этилена из хлористого метила, продукта переработки природного газа.

2. Экономически эффективное использование природного газа и его основного компонента метана как более дешевого, более распространенного, чем нефть, сырья для производства химической продукции в РФ.

Для решения этих задач в создаваемом производстве будет использована двухстадийная каталитическая технология получения этилена путем переработки хлористого метила, полученного из природного газа.

Предполагается, что новое производство будет организовано специально созданным для этой цели юридическим лицом (Проектной компанией) на производственной площадке рядом с заводом по производству ПВХ, который станет стратегическим партнером проекта: завод будет закупать 100 % производимого этилена и поставлять проектному предприятию сырье (хлорводород) для внутрипроизводственных нужд.

Проектная компания может быть организована на всех отечественных предприятиях, имеющих производства хлормономеров и полимеров на их основе для производства этилена и увеличения производства ПВХ.

Реализация проекта предусматривает несколько этапов: 1) НИОКР; 2) предпроектные и проектные работы; 3) покупка земли, организация стройплощадки, земляные работы, СМР по зданиям и сооружениям (кроме наружного контура и кровли); 4) строительство подъездных путей и ограждений, внешних сетей и коммуникаций, выполнение СМР по зданию (наружный контур и кровля), инженерным системам и оборудованию общего назначения; 5) приобретение производственного оборудования, IT-оборудования и программного обеспечения, выполнение пусконаладочных работ и проч.; 6) опытная эксплуатация; 7) выход на рабочую мощность и производство продукции на уровне 100 % производственной мощности.

Поэтапная реализация проекта открывает возможности принятия гибких решений относительно его развития после осуществления каждого этапа. Это, в свою очередь, позволяет применить для оценки экономической эффективности проекта метод реальных опционов в различных его модификациях.

Модификация модели Геске и методика нечетко-множественного анализа двухэтапного опциона. Учитывая поэтапное инвестирование рассматриваемого проекта, будем использовать модификацию (6) модели Геске, в которой параметр мгновенной дисперсии $\sigma^2(t)$ является кусочно постоянной функцией, т. е. период $[0;\, T]$ делится на части:

$$[0;\, T] = [0;\, T_1) \cup [T_1;\, T_2) \cup \ldots \cup [T_{k-1};\, T_k], \quad T_k = T\,,$$

и на каждом из множеств $[T_{j-1}; T_j), \quad j = 1, \ldots k-1, \quad T_0 = 0$, имеем $\sigma^2(t) = \sigma_j^2$, а на $[T_{k-1};\, T_k]$ – $\sigma^2(t) = \sigma_k^2$.

Предположим, что венчурный фонд принимает решение разбить процесс инвестирования на два этапа: $T_0 < T_1 < T_2$. Тогда инвестируемая компания представляет венчурному фонду составной колл-опцион.

В соответствии с [7] введем следующие параметры:

I_0^v – инвестиции фонда на приобретение составного колл-опциона в момент 0;

I_1^v – цена покупки фондом части Q^v акций инвестируемой компании в момент T_1 (цена исполнения составного (внешнего) колл-опциона);

I_2^v – цена исполнения внутреннего колл-опциона в момент времени $t = T_2$ (величина неявных издержек венчурного фонда);

V_t^v – рыночная стоимость (капитализация) пакета акций Q^v инвестируемой компании в момент t, который (пакет), возможно, приобретет венчурный фонд по условиям составного колл-опциона;

$\overline{V}$ – пороговое значение стоимости акций инвестируемой компании в момент T_1, так что при условии $V_{T_1} \geq \overline{V}$ венчурным фондом принимается решение о приобретении пакета Q^v;

C_t^v – цена составного колл-опциона в момент t.

Будем предполагать, что на отрезке времени $[T_0;\, T_2]$ переменная V_t^v является решением уравнения (6). Тогда по модифицированной формуле Геске (см.: [7]), для каждого t можем вычислить цену составного колл-опциона C_t^v и другие характеристики, которые являются функциями переменной V_t^v.

Основные методические приемы исследования нечетко-множественных свойств моделей инвестиционных проектов с венчурным финансированием, основанных на стохастическом дифференциальном уравнении (6), заключаются в следующем.

1. Для нечетко-множественного описания решения уравнения (6) применяется двухшаговая процедура, на первом шаге которой случайный процесс, являющийся решением уравнения (6), преобразуется в случайную величину, а на втором шаге к полученной случайной величине применяется стохастический алгоритм. Процедура преобразования случайного процесса V_t, являющегося решением уравнения (6) на отрезке $[0;\, T_2]$, в случайную величину заключается в том, что вместо V_t рассматривается двумерная случайная величина $\eta = (\xi,\, V_\xi)$, где ξ равномерно распределена на отрезке $[0;\, T_2]$.

2. Исследуются свойства полученных нечетких множеств и вычисляются нечетко-множественные оценки показателей, характеризующих исследуемый инвестиционный проект.

3. Проводится экономический анализ полученных результатов расчетов.

В работе [4] изучены следующие три методических приема, которые используются нами для оценки инвестиционных проектов (предполагается, что V_t является решением уравнения (6)).

1. Оценка наиболее правдоподобного значения показателя. Так как значение функции принадлежности $\chi_{F\left(v\circ\left(t,V_t\right)\right)}\left(\tau, z\right)$, для каждой пары $\left(\tau, z\right)$ представляет собой степень истинности высказывания $V_\tau = z$, то решение, при фиксированном τ задачи:

$$\chi_{F\left(v\circ\left(t,V_t\right)\right)}\left(\tau, z_0\right) = \max_{z} \chi_{F\left(v\circ\left(t,\, V_t\right)\right)}\left(\tau, z\right),$$

является наиболее правдоподобным значением V_τ , равным z_0. Этот показатель вычисляется на основе использования частных функций принадлежности (см.: выше раздел, посвященный методике исследования нечетко-множественных свойств модели Геске – Хсу) при $t = \tau$. Отметим, что для бимодальных и более сложных распределений наиболее правдоподобное значение может существенно отличаться от математического ожидания.

2. Оценка ожидаемой неопределенности показателя. Для оценки ожидаемой неопределенности показателя используется формула (3). Эта характеристика не совпадает с оценками математического ожидания и дисперсии выборки $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ $\left(\eta_k \in R^2\right)$ значений результирующей случайной величины η и является их существенным дополнением.

3. Надежность и устойчивость нечетко-множественной оценки показателя относительно эталона. Для оценки надежности и устойчивости используется некоторое эталонное нечеткое множество. Отклонением от него оцениваются надежность и устойчивость исследуемых показателей при изменении влияющих параметров. Важно отметить, что при изменении эталонного множества в пределах, указанных в [4], происходит изменение абсолютных оценок надежности и устойчивости исследуемых показателей. Однако абсолютные значения надежности и устойчивости при этом изменении эталона увеличиваются или уменьшаются пропорционально их значениям при исходном эталоне. Таким образом, сравнительный анализ надежности и устойчивости исследуемых показателей не зависит от эталона.

В заключение отметим, что в статье приведено краткое математическое описание процедур исследования нечетко-множественных свойств реальных опционов в инвестиционных проектах. Апробация предлагаемых процедур выходит за рамки данной статьи и является содержанием отдельного прикладного исследования, которое по плану гранта РФФИ будет выполнено в одной из ближайших наших публикаций.

Список литературы

1. *Халмош П.* Теория меры. М.: Изд-во иностр. лит., 1953. 291 с.

2. *Кантор Г.* Труды по теории множеств. М.: Наука, 1985. 431 с.

3. *Куратовский К.* Топология. М.: Мир, М., 1966. Т. 1. 606 с.

4. *Павлов А. В., Павлов В. Н.* Нечетко-случайные методы исследования неопределенности и их макроэкономические приложения / Ред. А. Г. Коржубаев. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2012. 185 с.

5. *Павлов А. В.* Интервальный метод построения нечетких макроэкономических показателей: Дис. ... канд. техн. наук. Новосибирск: ИЭОПП СО РАН, 2004. 118 с.

6. *Павлов А. В., Павлов В. Н.* Метод нечетко-случайных пар в исследовании неопределенности // Инновационный потенциал экономики России: состояние и перспективы: Сб. науч. тр. / Отв. ред. А. В. Алексеев, Л. К. Казанцева; ИЭОПП СО РАН. Новосибирск, 2013. С. 326–337.

7. *Баранов А. О., Музыко Е. И., Павлов В. Н.* Экономическая эффективность инновационных проектов с венчурным финансированием // Вестн. Финансового университета. 2015. № 5 (89). С. 105–115.

8. *Black F., Scholes M.* The Pricing of Options and Corporate Liabilities // Journal of Political Economy. 1973. № 81 (3). P. 637–659.

9. *Geske R.* The valuation of compound options // Journal of Financial Economics. 1979. № 7 (1). P. 63–81.

10. *Hsu Y.-W.* Staging of Venture Capital Investment: A Real Options Analysis. University of Camnridge, JIMS, 2002. P. 1–47.

11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977. 569 с.

Материал поступил в редколлегию 01.04.2016

A. O. Baranov [1, 2], **E. I. Muzyko** [3], **V. N. Pavlov** [4]

[1] *Novosibirsk National Research State University*
1, Pirogov Str., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[2] *Institute of Economics and Industrial Engineering of the SB RAS*
2 Lavrentiev Ave., Novosibirsk, 630090, Russian Federation

[3] *Novosibirsk State Technical University*
20 K. Marks Ave., Novosibirsk, 630073, Russian Federation

[4] *Peter the Great St.-Petersburg Polytechnic University*
29 Politechnicheskaya Str, Saint-Petersburg, 195251, Russian Federation

baranov@ieie.nsc.ru, mei927@mail.ru, victor_n_pavlov@mail.ru

MATHEMATICAL JUSTIFICATION OF RESERACH METODOLOGY OF FUZZY SET PROPERTIES OF THE GESKE MODEL AND ITS MODIFICAIONS TO REAL OPTIONS

The purpose of this study is to adapt methods of fuzzy sets to analyze the effectiveness of multi-stage investment projects.

The problem solved by the study is as follows.

Some innovative projects are characterized by the lack of profitability in the early stages of implementation and high risk associated with high uncertainty of assessment of expected future cash flows generated by the project. In this situation, the use of standard methods of analysis of economic efficiency of investment projects in high-tech industries, does not provide a comprehensive assessment of the appropriateness of investing, as well as to quantify the accuracy of the dynamics of the projected figures. All this requires the development of theory and methods of analysis of economic efficiency of innovation. Application of real options, as well as the fuzzy sets is, in our view, the direction of improving these methods.

The fuzzy random pairs approach is developed in order to study fuzzy set properties of random pointwise set mappings. The articles proposes generalization of the fuzzy random pairs approach for research of stochastic processes. The generalization is initiated by an approach to exploration of uncertainty in research project supported with an RFBR grant no. 15-06-06914, which is based on application of the Geske model modification. Mathematical description of the generalization is carried out for an example of a real venture-backed investment project aimed at organization of methyl chloride to ethylene processing.

The generalization essence is in the following: 1) time variable t in a random process $\xi(t)$ is replaced with a random value u, distributed uniformly within a segment $[0;T]$, which turns the process $\xi(t)$ into a bidimensional random value $V=(u,\xi(u))$, defined on $[0;T]\times R$; 2) the random value V value is translated into a random pointwise set mapping using the interval translation;

3) in order to translate the random pointwise set mapping into a fuzzy set and to build its membership function a stochastic algorithm is used; 4) for fuzzy set exploration of the resulting pointwise set mapping the fuzzy random pairs approach is used.

The solution of the Geske model is a stochastic process defined on a finite segment of time. The article contains main definitions and adaptations of abstract procedures of fuzzy set approach to the real investment project aimed at organization of methyl chloride to ethylene processing. A detailed research of this project attributes with the use of suggested fuzzy set approach lays beyond the frame of the article and should be the subject of an independent applied research.

Keywords: innovative project, fuzzy sets, venture financing, uncertainty, real options method.

References

1. Halmos P. Teoriya mery [Measure theory]. Moscow, Foreign literature publishing house, 1953. 291 p.

2. Kantor G. Trudy po teorii mnozhestv [Works on set theory]. Moscow, Science, 1985. 431 p.

3. Kuratovskij K. Topologiya [Topology]. Moscow, WORLD publishing house, 1966, 606 p.

4. Pavlov A. V., Pavlov V. N. Nechyotko-sluchajnye metody issledovaniya neopredelyonnosti i ikh makroekonomicheskiye prilozheniya [Fuzzy random methods of uncertainty research and their macroeconomic applications]. A. G. Korzhubayev (Ed.). Novosibirsk, SB RAS Publ., 2012, 185 p.

5. Pavlov A. V. Interval'nyj metod postroyeniya nechyotkikh makroeconomicheskikh pokazateley. [Interval method of fuzzy macroeconomic indicators building]. Sci. Dis. Novosibirsk, IEIE SB RAN, 2004, 118 p.

6. Pavlov A. V., Pavlov V. N. Metod nechyotko-sluchainykh par v issledovanii neopredelennosti. [Fuzzy random pairs approach in uncertainty research]. *Innovatsionnyj potentsial ekonomiki Rossii: sostoyaniye i pespectivy: sb. nauch. tr.* / A. V. Alekseyev, L. K. Kazantseva (Eds.). [*Innovative potential of Russian economy: current state and perspectives: proceedings*]. Novosibirsk, IEOPP SO RAN, 2013, p. 326–337.

7. Baranov A. O., Muzyko E. I., Pavlov V. N. Ekonomicheskaya effektivnst' innovatsionnykh proyektov s venchurnym finansirovaniyem [*Economic efficiency of innovative venture backed projects*]. *Vestnik Finansovogo universiteta* [Bulletin of Financial University], 2015, no. 5 (89), p. 105–115.

8. Black F., Scholes M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 1973, no. 81 (3), p. 637–659.

9. Geske R. The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics*, 1979, no. 7 (1), p. 63–81.

10. Hsu Y.-W. Staging of Venture Capital Investment: A Real Options Analysis. University of Camnridge, JIMS, 2002, p. 1–47.

11. Gikhman I. I., Skorokhod A. V. Vvedeniye v teoriyu sluchaynykh protsessov. [Introduction into the theory of random processes]. Moscow, Science, 1977, 569 p.