

УДК 519.681.3, 519.681.2

## ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКИХ СЕТЕЙ ПЕТРИ И АЛГЕБР СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*П. Бухгольц, И. В. Тарасюк*

### § 1. Введение

Стохастические сети Петри (ССП) — известная модель количественного анализа динамических систем с дискретными событиями. СПП были введены около 20-ти лет назад в [16, 21]. Они используют непрерывную временную шкалу, и с их переходами связаны экспоненциальные (показательные) или фазовые распределения задержек срабатывания. Стохастическими процессами, соответствующими таким непрерывно-временным СПП (НВССП), являются непрерывно-временные марковские цепи (НВМЦ). Переходы НВССП срабатывают по-одному, и динамическому поведению соответствует семантика интерливинга (чередования). Такое интерливинговое поведение также характерно для обобщенных СПП (ОССП) [19], которые содержат как временные переходы с экспоненциальной задержкой, так и мгновенные, имеющие нулевую задержку срабатывания.

Кроме непрерывных, рассматривались также дискретные распределения времени задержек переходов СПП. Обычно используется геометрическое распределение или комбинация геометрических. Дискретно-временные СПП (ДВССП) были определены в [22]. В последующие годы, было предложено расширение этой модели [27]. Стохастические процессы, соответствующие ДВССП, — дискретно-временные марковские цепи (ДВМЦ). Особенность данного класса СПП состоит в том, что переходы срабатывают параллельно. Таким образом, динамическое поведение определяется с использованием семантики шагов, а не интерливинга, что усложняет интерпретацию и анализ модели. С другой стороны, шаговая семантика дает возможность естественного моделирования параллельных стохастических процессов. В интерливинговых моделях параллелизм приравнивается к последовательному недетерминизму, то есть к объединению всех возможных перестановок выполнения параллельных активностей. Интерливинговая семантика,

например, не позволяет установить, что некоторые активности могут быть выполнены одновременно. ДВССП особенно хорошо подходят для моделирования, анализа свойств поведения и оценки производительности параллельных систем с разделением ресурсов и внутренней синхронизацией. Среди таких систем — вычислительные машины с разделяемым временем, производственные линии, компьютерные и телефонные сети, а также устройства с архитектурой «клиент-сервер».

Для сравнения поведения систем, представленных ССП, обычно предлагается пометка переходов действиями, представляющими элементарные активности. После определения пометки становится возможным введение поведенческих эквивалентностей. Стандартные непомеченные ССП естественно использовать в случае моделирования переходами логически разных активностей. Однако, часто срабатывания переходов ССП соответствуют выполнению одного и того же действия, и в этом случае рационально ввести функцию пометки, присваивающую таким переходам данное действие. Кроме того, переходы, моделирующие внутреннюю активность системы, можно пометить символом невидимого действия  $\tau$ , которое не учитывается при анализе поведения. Такие переходы считаются невидимыми для «внешнего наблюдателя», а остальные, не помеченные символом  $\tau$ , — видимыми. Невидимым действием можно помечать и переходы той части сети, от функционирования которой надо абстрагироваться. Введение пометки переходов ССП также повышает наглядность и интуитивную ясность модели. Для НВССП и ОССП пометка переходов была введена в [9, 10]. Функция пометки для ДВССП с весами (ДВВССП) была предложена в [6].

Назовем  $\tau$ -эквивалентностями те отношения, которые определены с учетом абстракции от невидимых действий. Следующие базисные эквивалентности вероятностных и стохастических систем были рассмотрены в литературе. Интерливинговая вероятностная  $\tau$ -следовая эквивалентность была рассмотрена в [13] на вероятностных системах переходов, а в [6] — на помеченных ДВВССП (ПДВВССП). Шаговая вероятностная  $\tau$ -следовая эквивалентность введена в [6] на ПДВВССП. Интерливинговая вероятностная  $\tau$ -бисимуляционная эквивалентность введена в [7] на марковских алгебрах процессов, в [8, 11] — на стохастических автоматах, в [4] — на вероятностных системах переходов, в [9] — на НВССП, в [10] — на ОССП, в [6] — на ПДВВССП, а в [5] — на ДВМЦ и НВМЦ. Шаговая вероятностная  $\tau$ -бисимуляционная эквивалентность введена в [6] на ПДВВССП. Изоморфизм, то есть совпадение стохастических систем с точностью до переименования их компонент, введен в [22] на ДВССП.

В определениях упомянутых выше базисных бисимуляционных эквивалентностей требуется взаимное моделирование поведения систем в прямом направлении, то есть по ходу выполнения действий. Обратные бисимуляционные отношения связывают системы, имитирующие поведение друг друга в направлении, обратном ходу вычислений. Соответственно, обратные-прямые эквивалентности требуют моделирования в обоих на-

правлениях. В [6] были предложены интерливинговые и шаговые варианты обратных и обратных-прямых вероятностных  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей на ПДВССП.

В этой работе вводится новый класс ДВССП с пометкой переходов, называемый ПДВССП. ПДВССП имеют как видимые (помеченные обычными действиями), так и невидимые (помеченные символом  $\tau$ ) переходы, что позволяет им моделировать стохастические системы, действия которых могут быть невидимыми для «внешнего наблюдателя». Динамическое поведение ПДВССП описывается с помощью шаговой семантики. Стохастическим процессом для ПДВССП является ДВМЦ, смены состояний которой соответствуют параллельному срабатыванию переходов. Поэтому для данной модели не подходят стандартные понятия следовых и бисимуляционных эквивалентностей вероятностных процессов [13, 18].

Для ПДВССП определяются следующие новые отношения. Вводятся интерливинговая и шаговая вероятностные  $\tau$ -следовые эквивалентности. Мы также определяем новые понятия интерливинговой и шаговой вероятностных  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей. Кроме того, предлагаются интерливинговые и шаговые варианты обратных и обратных-прямых вероятностных  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей. Рассматривается также изоморфизм ПДВССП. Строится диаграмма взаимосвязей всех отношений. Дается характеристика ряда введенных эквивалентностей в терминах формул оригинальных вероятностных модальных логик. Показано, какие понятия эквивалентностей можно использовать для сравнения стационарного (то есть, предельного или долговременного) поведения ПДВССП.

В отличие от ССП, стохастические процессные алгебры (СПА) не так давно стали популярны в качестве средства моделирования. Особенно интересна взаимосвязь ССП и СПА. В [12] была введена алгебра конечных недетерминированных процессов  $AFP_0$ . Ее формулы описывают специальный подкласс сетей Петри, называемый ациклическими сетями (А-сетями). В данной работе мы предлагаем стохастическое расширение этого исчисления, алгебру  $StAFP_0$ , описывающую стохастические А-сети (СА-сети). СА-сети являются подклассом ПДВССП. Для сетевой эквивалентности (изоморфизм сетевых представлений алгебраических формул) мы строим корректную аксиоматизацию.

Структура дальнейшего изложения такова. В разделе 2 вводятся ПДВССП и описывается соответствующий им стохастический процесс. Вероятностные эквивалентности для ПДВССП определяются в разделе 3. Раздел 4 посвящен изучению взаимосвязей вероятностных эквивалентностей. Логическая характеристика эквивалентностей приводится в разделе 5. В разделе 6 вводится понятие стационарного поведения и демонстрируется, как эквивалентности могут быть использованы для сравнения такого долговременного поведения ПДВССП. Стохастическая алгебра конечных процессов  $StAFP_0$  определяется в разделе 7. В заключительном разделе 8 делается краткий обзор основных результатов работы и определяются перспективные направления дальнейших исследований.

## § 2. Помеченные дискретно-временные ССП

В этом разделе определяется класс помеченных ДВССП, для которого далее будут введены эквивалентности.

### § 2.1. Мультимножества

**Определение 1.** Пусть  $X$  — некоторое множество. Конечное мультимножество  $M$  над  $X$  — отображение  $M : X \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $|\{x \in X \mid M(x) > 0\}| < \infty$ .

Обозначим через  $\mathbb{N}_f^X$  множество всех конечных мультимножеств над  $X$ . Когда  $\forall x \in X M(x) \leq 1$ ,  $M$  — обычное множество. Мощность конечного мультимножества  $M$  определяется как  $|M| = \sum_{x \in X} M(x)$ . Пишем  $x \in M$ , если  $M(x) > 0$ , и  $M_1 \subseteq M_2$ , если  $\forall x \in X M_1(x) \leq M_2(x)$ . Определим  $(M_1 + M_2)(x) = M_1(x) + M_2(x)$  и  $(M_1 - M_2)(x) = \max\{0, M_1(x) - M_2(x)\}$ .

### § 2.2. Формальная модель, вероятности и достижимость

**Определение 2.** (Помеченная) ДВССП (ПДВССП) — шестерка

$N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N, L_N, M_N)$ , где

- $P_N = \{p, q, \dots\}$  — множество мест;
- $T_N = \{t, u, \dots\}$  — множество переходов;
- $W_N : (P_N \times T_N) \cup (T_N \times P_N) \rightarrow \mathbb{N}$  — функция весов дуг;
- $\Omega_N : T_N \rightarrow (0; 1]$  — функция условных вероятностей переходов;
- $L_N : T_N \rightarrow Act_\tau$  — функция пометки переходов именами действий, где  $Act$  — множество видимых действий,  $\tau \notin Act$  — невидимое действие, и  $Act_\tau = Act \cup \{\tau\}$ ;
- $M_N \in \mathbb{N}_f^{P_N}$  — начальная маркировка.

В графическом представлении ПДВССП места изображаются окружностями, а переходы — квадратами, в которые вписаны символы действий, помечающие эти переходы. Названия мест и переходов помещены рядом с ними, когда необходимо. Если эти названия не указываются для упрощения представления, но используются, считается, что места и переходы нумеруются слева направо и сверху вниз. Функция весов дуг изображается направленными дугами, соединяющими места с переходами и переходы с местами. Количество дуг соответствует ее значению на соответствующей паре место-переход (или переход-место). Если это количество больше единицы, оно записывается соответствующей цифрой возле дуги. Маркировка изображается размещением в местах черных точек, «фишек», количество которых равно кратности в ней соответствующих мест. Число фишек, большее единицы, записывается соответствующей цифрой. Условные вероятности переходов записываются возле соответствующих переходов, когда необходимо. Если они не указываются, считается, что все переходы имеют одинаковые условные вероятности.

ПДВССП  $N$  и  $N'$  изоморфны, обозначение  $N \simeq N'$ , если они различаются только именами мест и переходов.

Пусть  $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N, L_N, M_N)$  — ПДВССП и  $t \in T_N$ ,  $U \in \mathcal{N}_f^{T_N}$ . Предусловие  $\bullet t$  и постусловие  $t^\bullet$  перехода  $t$  — мультимножества мест, определяемые как  $(\bullet t)(p) = W_N(p, t)$  и  $(t^\bullet)(p) = W_N(t, p)$ . Предусловие  $\bullet U$  и постусловие  $U^\bullet$  мультимножества переходов  $U$  — мультимножества мест, определяемые как  $\bullet U = \sum_{t \in U} \bullet t$  и  $U^\bullet = \sum_{t \in U} t^\bullet$ .

Пусть  $M \in \mathcal{N}_f^{P_N}$  — маркировка ПДВССП  $N$ . Переход  $t \in T_N$  допустим в  $M$ , если  $\bullet t \subseteq M$ . Обозначим через  $Ena(M)$  множество всех переходов, допустимых в маркировке  $M$ . Множество переходов  $U \subseteq Ena(M)$  допустимо в  $M$ , если  $\bullet U \subseteq M$ .

Переходы ПДВССП срабатывают мгновенно и в составе некоторого их множества (не мультимножества), в так называемых «шагах». Таким образом, мы не допускаем самопараллелизма, то есть срабатывания переходов параллельно с самими собой, поскольку это значительно усложняет интерпретацию и анализ модели.

Пусть  $M$  — маркировка ДВССП  $N$ . Тогда переход  $t \in Ena(M)$  срабатывает в следующий временной шаг с вероятностью  $\Omega_N(t)$ , если никакой другой переход не допустим в  $M$ . Вероятность попытки срабатывания множества переходов  $U$ , допустимого в маркировке  $M$ , есть

$$PF(U, M) = \prod_{t \in U} \Omega_N(t) \cdot \prod_{t \in Ena(M) \setminus U} (1 - \Omega_N(t)).$$

Кроме того, определим

$$PF(\emptyset, M) = \prod_{t \in Ena(M)} (1 - \Omega_N(t)).$$

Параллельное срабатывание переходов из  $U$  меняет маркировку  $M$  на  $\widetilde{M} = M - \bullet U + U^\bullet$ , обозначение  $M \xrightarrow{U, \mathcal{P}} \widetilde{M}$ . Вероятность  $\mathcal{P} = PT(U, M)$  этого шага есть

$$PT(U, M) = \frac{PF(U, M)}{\sum_{\{V \mid \bullet V \subseteq M\}} PF(V, M)}.$$

В случае  $U = \emptyset$  имеем  $M = \widetilde{M}$  и

$$PT(\emptyset, M) = \frac{PF(\emptyset, M)}{\sum_{\{V \mid \bullet V \subseteq M\}} PF(V, M)}.$$

Пишем  $M \xrightarrow{U} \widetilde{M}$ , если  $\exists \mathcal{P} > 0$   $M \xrightarrow{U, \mathcal{P}} \widetilde{M}$ . Для одноэлементного множества переходов  $U = \{t\}$  пишем  $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$  и  $M \xrightarrow{t} \widetilde{M}$ .

Рассматривая вместо переходов их пометки, получаем шаги, описываемые мультимножествами действий. Пусть  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$ . Видимая часть мультимножества действий определяется как  $vis(A) = \sum_{\{a \in A \mid a \in Act\}} a$ .

Пусть  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$ , то есть  $A$  — мультимножество видимых действий. Тогда  $M \xrightarrow{A, \mathcal{P}} \widetilde{M}$  обозначает шаг, начинающийся в маркировке  $M$ , в котором срабатывают переходы, видимо помеченные посредством  $A$ , и заканчивающийся в  $\widetilde{M}$ . Вероятность этого шага  $\mathcal{P} = PS(A, M, \widetilde{M})$  есть

$$PS(A, M, \widetilde{M}) = \sum_{\{U \mid M \xrightarrow{U} \widetilde{M}, \text{vis}(L_N(U))=A\}} PT(U, M).$$

Пишем  $M \xrightarrow{A} \widetilde{M}$ , если  $\exists \mathcal{P} > 0 M \xrightarrow{A, \mathcal{P}} \widetilde{M}$ . Для одноэлементного мультимножества видимых действий  $A = \{a\}$  пишем  $M \xrightarrow{a} \widetilde{M}$  и  $M \xrightarrow{a} \widetilde{M}$ .

**Определение 3.** Для ПДВССП  $N$  введем следующие понятия.

- *Множество достижимости*  $RS(N)$  — минимальное множество маркировок, для которых
  - $M_N \in RS(N)$ ;
  - если  $M \in RS(N)$  и  $M \xrightarrow{A} \widetilde{M}$ , то  $\widetilde{M} \in RS(N)$ .
- *Граф достижимости*  $RG(N)$  — ориентированный помеченный граф с множеством вершин  $RS(N)$  и дугами из  $M$  в  $\widetilde{M}$ , помеченными парой  $(A, \mathcal{P})$ , если  $M \xrightarrow{A, \mathcal{P}} \widetilde{M}$  и  $\mathcal{P} > 0$ .
- *Соответствующая ДВМЦ*  $DTMC(N)$  — ДВМЦ с множеством состояний  $RS(N)$  и переходом  $M \rightarrow \widetilde{M}$ , если в  $RG(N)$  существует хотя бы одна дуга из  $M$  в  $\widetilde{M}$ . В этом случае вероятность  $\mathcal{P} = PM(M, \widetilde{M})$  вычисляется как

$$PM(M, \widetilde{M}) = \sum_{A \in N_f^{Act}} PS(A, M, \widetilde{M}).$$

### § 2.3. Невидимые шаги

Граф достижимости может иметь дуги, соединяющие разные состояния и помеченные пустым мультимножеством с ненулевой вероятностью. В этом случае смена маркировки произошла в результате срабатывания переходов с пометкой  $\tau$  (невидимых переходов). Пустые петли, то есть дуги из некоторого состояния в него же, помеченные пустым мультимножеством с ненулевой вероятностью, возникают в случаях, когда ни один переход не срабатывает или происходит срабатывание невидимых переходов, не изменяющее маркировку. Примем концепцию времени, в соответствии с которой внешний наблюдатель не знает, когда происходит очередной шаг. Тогда всех рассмотренных выше вариантов невидимого поведения, он не может различить ситуации, когда ничего не случилось, и когда произошел невидимый шаг. Наблюдатель видит только переходы, помеченные действиями из  $Act$  (видимые переходы), и не знает о возможном скрытом переходе системы в новое состояние.

На уровне ДВМЦ различные шаги между парой состояний уже невозможно отличить, так как с дугами связана лишь информация о совокупной вероятности шагов, приводящих из первого состояния во второе. В этом случае стохастический процесс рассматривается обычным образом, как для ДВССП из [22, 27].

Видимое поведение можно описать, изменяя граф достижимости пропуском невидимых переходов и пустых петель. Определяемые далее  $\tau$ -эквивалентности основаны на

таким «видимом» графе достижимости. Если для определения отношений пользоваться обычным графом достижимости, получим стандартные эквивалентности, которые не абстрагируются от невидимых действий. Заметим, что преобразование графа достижимости посредством абстрагирования от невидимого поведения похоже на построение видимого графа в не-временных моделях [15].

*Невидимый шаг*  $M \xrightarrow{\emptyset} \widetilde{M}$ ,  $\mathcal{P} > 0$  происходит, когда  $\widetilde{M}$  получается из  $M$  в результате срабатывания множества невидимых переходов или когда ни один переход не срабатывает (в последнем случае  $M = \widetilde{M}$ ).

Будем использовать следующее рекурсивное определение вероятностей невидимых переходов:

$$PS^k(\emptyset, M, \widetilde{M}) = \begin{cases} \sum_{\overline{M} \in RS(N)} PS^{k-1}(\emptyset, M, \overline{M}) \cdot PS(\emptyset, \overline{M}, \widetilde{M}) & \text{если } k \geq 1 \\ 1 & \text{если } k = 0 \text{ и } M = \widetilde{M} \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

$PS^k(\emptyset, M, \widetilde{M})$  обозначает *вероятность достижения  $\widetilde{M}$  из  $M$  через  $k$  невидимых шагов*.

$$PS^*(A, M, \widetilde{M}) = PS(A, \overline{M}, \widetilde{M}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} PS^k(\emptyset, M, \overline{M})$$

обозначает *вероятность достижения  $\widetilde{M}$  из  $M$  невидимыми шагами, завершающимися видимым шагом  $A$* .

Определим систему переходов с отношением перехода  $M \xrightarrow{A} \widetilde{M}$ , где  $\mathcal{P} = PS^*(A, M, \widetilde{M})$  и  $A \neq \emptyset$ . Пишем  $M \xrightarrow{A} \widetilde{M}$ , если  $\exists \mathcal{P} > 0 M \xrightarrow{A} \widetilde{M}$ . Для одноэлементного мультимножества видимых действий  $A = \{a\}$  пишем  $M \xrightarrow{a} \widetilde{M}$  и  $M \xrightarrow{a} \widetilde{M}$ .

Обозначим через  $RS^*(N)$  *видимое множество достижимости* и через  $RG^*(N)$  — *видимый граф достижимости*. Заметим, что  $RS(N) \neq RS^*(N)$ , если существуют маркировки, достижимые только невидимыми шагами.  $RG^*(N)$  соответствует точке зрения наблюдателя, учитывающего только шаги с видимыми переходами.

Мы специально решили рассматривать только последовательности невидимых шагов, за которыми следует видимый шаг. Можно было бы рассмотреть видимый шаг, сменяемый невидимыми, или видимый, окруженный невидимыми. В этих случаях последовательность кончалась бы невидимыми шагами. Поэтому видимое множество (и граф) достижимости должно было бы содержать все промежуточные состояния, проходимые при выполнении такого суффикса невидимых шагов. Для того, чтобы избежать такого сложного представления, мы условились рассматривать только последовательности невидимых шагов с видимыми суффиксами.

Определим *видимую соответствующую ДВМЦ*  $DTMC^*(N)$  с множеством состояний  $RS^*(N)$  и вероятностями смен состояний

$$PM^*(M, \widetilde{M}) = \sum_{A \in N_f^{Act} \setminus \emptyset} PS^*(A, M, \widetilde{M}).$$

*Ловушка (сифон)* — петля невидимых переходов, которая начинается и кончается в некоторой маркировке  $M$ , которая имеет вероятность 1. Если  $RG(N)$  содержит ловушку, функционирование ПДВССП сводится к постоянному срабатыванию невидимых переходов, из которого нельзя выйти.

Сумма  $\sum_{k=0}^{\infty} PS^k(\emptyset, M, \bar{M})$  конечна, только если в ПДВССП не существует ловушек, что и будет предполагаться в дальнейшем. В этом случае  $PS^*(A, M, \bar{M})$  задает распределение вероятностей, то есть

$$\sum_{A \in N_f^{Act} \setminus \emptyset} \sum_{\bar{M} \in RS^*(N)} PS^*(A, M, \bar{M}) = 1.$$

Но иногда требуется сравнивать интерливинговое поведение ПДВССП. Интерливинговая семантика абстрагируется от шагов, помеченных мультимножествами видимых действий, имеющих более одного элемента. После такого абстрагирования необходимо нормализовать вероятности оставшихся одноэлементных шагов. Для этого вводится специальное *интерливинговое отношение перехода*. Пусть  $N$  — ПДВССП и  $M, \bar{M} \in RS^*(N)$ ,  $a \in Act$ . Пишем  $M \xrightarrow{a} Q \bar{M}$ , если  $M \xrightarrow{a} P \bar{M}$  и

$$Q = \frac{P}{\sum_{\{b \in Act, \bar{M} \in RS^*(N) | M \xrightarrow{b} P' \bar{M}\}} P'}.$$

**Пример 1.** На рисунке 1 представлена ПДВССП с двумя видимыми переходами  $t_1$  (помечен  $a$ ),  $t_2$  (помечен  $b$ ) и невидимым переходом  $t_3$  (помечен  $\tau$ ). Для удобства, вероятности переходов  $N$  обозначим следующим образом:  $\rho_i = \Omega_N(t_i)$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). На рисунке также изображены стандартный  $RG(N)$  и видимый  $RG^*(N)$  графы достижимости. Множество достижимости состоит из маркировок  $M_1 = (1, 1, 0)$ ,  $M_2 = (0, 1, 1)$ ,  $M_3 = (1, 0, 1)$ ,  $M_4 = (0, 0, 2)$ . Значения  $q_{ij}$  — вероятности дуг  $RG(N)$  и  $r_{ij}$  — вероятности дуг  $RG^*(N)$ .

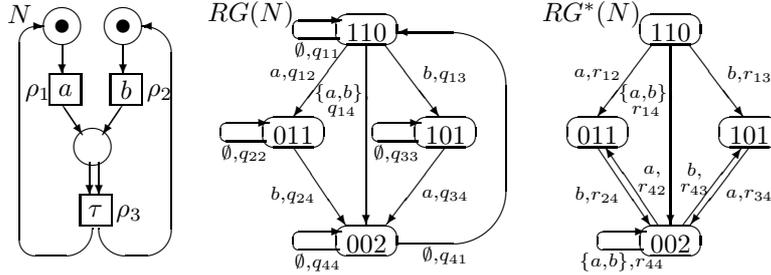


Рис. 1. ПДВССП и соответствующие графы достижимости

Значения вероятностей  $q_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq 4$ ) следующие:

$$\begin{aligned} q_{11} &= (1 - \rho_1)(1 - \rho_2) & q_{12} &= \rho_1(1 - \rho_2) & q_{13} &= (1 - \rho_1)\rho_2 & q_{14} &= \rho_1\rho_2 & q_{22} &= 1 - \rho_2 \\ q_{24} &= \rho_2 & q_{33} &= 1 - \rho_1 & q_{34} &= \rho_1 & q_{41} &= \rho_3 & q_{44} &= 1 - \rho_3 \end{aligned}$$

Для определения вероятностей  $r_{kl}$  ( $1 \leq k, l \leq 4$ ) используются значения  $q_{ij}$ :

$$r_{12} = r_{42} = \frac{q_{12}}{1-q_{11}} \quad r_{13} = r_{43} = \frac{q_{13}}{1-q_{11}} \quad r_{14} = r_{44} = \frac{q_{14}}{1-q_{11}} \quad r_{24} = 1 \quad r_{34} = 1$$

### § 3. Вероятностные $\tau$ -эквивалентности

Рассмотрим вероятностные  $\tau$ -эквивалентности.

Сначала проиллюстрируем некоторые идеи, лежащие в основе определений вероятностных эквивалентностей, рассматриваемых далее.

#### Пример 2.

- На рисунке 2(a) ПДВССП  $N$  и  $N'$  не могут быть связаны никакой вероятностной эквивалентностью (даже следовой), так как только в  $N'$  действие  $a$  выполняется с вероятностью  $\frac{1}{3}$ .
- На рисунке 2(b) ПДВССП  $N$  и  $N'$  связаны любой вероятностной эквивалентностью (в том числе и бисимуляционной), так как в нашей модели вероятности последовательно исполняемых действий перемножаются, а вероятности альтернативных действий суммируются.

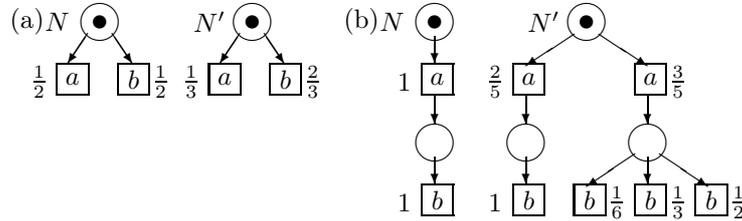


Рис. 2. Свойства вероятностных эквивалентностей

#### § 3.1. Вероятностные $\tau$ -следовые эквивалентности

Введем определения следовых вероятностных отношений для ССП. Они напоминают определения следовых эквивалентностей обычных СП, но дополнительно учитывают вероятности последовательностей (мультимножеств) действий. Поэтому необходимо рассмотреть вероятности *всех* путей, соответствующих каждой конкретной последовательности выполнения (мультимножеств) действий в видимых графах достижимости  $RG^*(N)$  и  $RG^*(N')$  двух сравниваемых ПДВССП  $N$  и  $N'$ . Так как в видимых графах достижимости мы абстрагировались от частных переходов, пути, соответствующие одной последовательности (мультимножеств) действий, отличаются только проходимыми маркировками. Следовательно, надо вычислить сумму вероятностей всех таких путей, отличающихся хотя бы на одну маркировку.

**Определение 4.** Видимый интерливинговый вероятностный след ПДВССП  $N$  — пара  $(\sigma, \mathcal{P})$ , где  $\sigma = a_1 \cdots a_n \in Act^*$  и

$$\mathcal{P} = \sum_{\{M_1, \dots, M_n | M_N \xrightarrow{a_1}_{\mathcal{P}_1} M_1 \xrightarrow{a_2}_{\mathcal{P}_2} \dots \xrightarrow{a_n}_{\mathcal{P}_n} M_n\}} \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i.$$

Обозначим множество *всех видимых интерливинговых вероятностных следов* ПДВССП  $N$  через  $VisIntProbTraces(N)$ . ПДВССП  $N$  и  $N'$  *интерливингово вероятностно  $\tau$ -следово эквивалентны*, запись  $N \equiv_{ip}^{\tau} N'$ , если

$$VisIntProbTraces(N) = VisIntProbTraces(N').$$

**Определение 5.** Видимый шаговый вероятностный след ПДВССП  $N$  — пара  $(\Sigma, \mathcal{P})$ , где  $\Sigma = A_1 \cdots A_n \in \mathcal{N}_f^{Act^*}$  и

$$\mathcal{P} = \sum_{\{M_1, \dots, M_n | M_N \xrightarrow{A_1}_{\mathcal{P}_1} M_1 \xrightarrow{A_2}_{\mathcal{P}_2} \dots \xrightarrow{A_n}_{\mathcal{P}_n} M_n\}} \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i.$$

Обозначим множество *всех видимых шаговых вероятностных следов* ПДВССП  $N$  через  $VisStepProbTraces(N)$ . ПДВССП  $N$  и  $N'$  *шагово вероятностно  $\tau$ -следово эквивалентны*, запись  $N \equiv_{sp}^{\tau} N'$ , если

$$VisStepProbTraces(N) = VisStepProbTraces(N').$$

### § 3.2. Вероятностные $\tau$ -бисимуляционные эквивалентности

Для определения вероятностных  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей необходимо рассматривать бисимуляцию как отношение *эквивалентности*, которое разбивает состояния *объединения* видимых графов достижимости  $RG^*(N)$  и  $RG^*(N')$  сравниваемых ПДВССП  $N$  и  $N'$ . Чтобы  $N$  и  $N'$  были бисимуляционно эквивалентны, их начальные маркировки  $M_N$  и  $M_{N'}$  должны быть связаны отношением бисимуляции, имеющим следующее свойство переноса: маркировки связаны отношением, если в каждой из них могут выполняться те же самые действия (мультимножества действий), что и в другой. При этом получившиеся в результате новые маркировки должны *принадлежать одному классу эквивалентности*. Кроме того, суммы вероятностей всех таких выполнений должны быть одинаковыми для обеих исходных маркировок.

Таким образом, в нашем определении мы следуем подходу [18]. Следовательно, разница между вероятностными следовыми и бисимуляционными эквивалентностями состоит в том, что в определении последних мы не рассматриваем *все возможные* выполнения (мультимножеств) действий из начальных маркировок, но только те, которые (пошагово) ведут к маркировкам *из одного класса эквивалентности*.

Сначала введем несколько полезных обозначений. Пусть для ПДВССП  $N$   $\mathcal{L} \subseteq RS^*(N)$ . Для некоторых  $M \in RS^*(N)$ ,  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$  пишем  $M \xrightarrow{A}_{\mathcal{Q}} \mathcal{L}$ , если

$$\mathcal{Q} = \sum_{\{\tilde{M} \in \mathcal{L} | M \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}} \tilde{M}\}} \mathcal{P}.$$

Пишем  $M \xrightarrow{A} \mathcal{L}$ , если  $\exists Q > 0 M \xrightarrow{A}_Q \mathcal{L}$ .

Для одноэлементного мультимножества видимых действий  $A = \{a\}$  пишем  $M \xrightarrow{a}_Q \mathcal{L}$  и  $M \xrightarrow{a} \mathcal{L}$ .

Аналогично определим понятие  $M \xrightarrow{a}_Q \mathcal{L}$ , основанное на интерливинговом отношении перехода.

Пусть  $X$  — некоторое множество и  $\mathcal{E} \subseteq X \times X = X^2$  — отношение эквивалентности на  $X$ . Для  $x \in X$  определим  $[x]_{\mathcal{E}} = \{y \in X \mid (x, y) \in \mathcal{E}\}$  — класс эквивалентности  $x$  относительно  $\mathcal{E}$ . Эквивалентность  $\mathcal{E}$  делит  $X$  на множество классов эквивалентности  $X/\mathcal{E} = \{[x]_{\mathcal{E}} \mid x \in X\}$ , называемое *категоризацией (разбиением)*  $X$  относительно  $\mathcal{E}$ .

**Определение 6.** Пусть  $N$  — ПДВССП. Отношение эквивалентности  $\mathcal{R} \subseteq RS^*(N)^2$  —  $\star$ -вероятностная  $\tau$ -бисимуляция между маркировками  $M_1$  и  $M_2$  ПДВССП  $N, \star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $\mathcal{R} : M_1 \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} M_2$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , если  $\forall \mathcal{L} \in RS^*(N)/\mathcal{R}$

- $\forall x \in Act$  и  $\hookrightarrow = \rightrightarrows$ , если  $\star = i$ ;
- $\forall x \in N_f^{Act}$  и  $\hookrightarrow = \rightrightarrows$ , если  $\star = s$ ;

$$M_1 \xrightarrow{x}_Q \mathcal{L} \Leftrightarrow M_2 \xrightarrow{x}_Q \mathcal{L}.$$

Маркировки  $M_1$  и  $M_2$   $\star$ -вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентны,  $\star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $M_1 \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} M_2$ , если  $\exists \mathcal{R} : M_1 \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} M_2$ ,  $\star \in \{i, s\}$ .

Для определения  $\tau$ -бисимуляции между ПДВССП  $N$  и  $N'$  необходимо рассматривать объединение их множеств достижимости, то есть  $RS^*(N) \cup RS^*(N')$ .

**Определение 7.** Пусть  $N$  и  $N'$  — ПДВССП. Отношение  $\mathcal{R} \subseteq (RS^*(N) \cup RS^*(N'))^2$  —  $\star$ -вероятностная  $\tau$ -бисимуляция между  $N$  и  $N'$ ,  $\star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $\mathcal{R} : N \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} N'$ , если  $\mathcal{R} : M_N \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} M_{N'}$ ,  $\star \in \{i, s\}$ .

ПДВССП  $N$  и  $N'$   $\star$ -вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентны,  $\star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $N \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} N'$ , если  $\exists \mathcal{R} : N \xleftrightarrow{\tau}_{\star p} N'$ ,  $\star \in \{i, s\}$ .

Легко показать, что объединение вероятностных  $\tau$ -бисимуляций есть снова вероятностная  $\tau$ -бисимуляция. Поэтому существует максимальное отношение бисимуляции такого вида, и оно единственно с точностью до перестановки классов эквивалентности. Следовательно, для данной ПДВССП существуют эквивалентные ПДВССП с минимальным пространством состояний, что можно использовать для редукции. Редукция — это замена одной системы на другую, обладающую более простой структурой, но таким же (в данной семантике) поведением, как и первая. Например, в сетях Петри могут быть объединены эквивалентные места, переходы или удалены части сети, не дающие дополнительных вариантов поведения. Так, в ПДВССП можно удалить невидимые переходы и объединить их входные и выходные места в случае, если срабатывание этих переходов никогда не ведет к смене класса эквивалентности маркировок.

### § 3.3. Обратные вероятностные $\tau$ -бисимуляционные эквивалентности

Для не-временных систем, кроме обычной бисимуляции, требующей взаимного моделирования в прямом направлении, была разработана обратная бисимуляция, сравнивающая поведение и в обратном направлении [23, 25]. Однако, определение из [23] не является простым расширением прямой бисимуляции, вводящим обратную бисимуляцию как прямую для графа переходов с обращенным направлением дуг. В [23] показано, почему такое определение некорректно в контексте не-временных систем. Там же предложено понятие обратной бисимуляции, где требуется обратное моделирование вдоль тех путей в истории поведения системы, которые привели в текущее состояние. Однако, такое определение не может быть перенесено в контекст стохастических систем. Вместо этого, в [6] обратная бисимуляция была определена как расширение прямой с использованием двух дополнительных условий на начальные маркировки и вероятности срабатывающих в них переходов. Последнее говорит о том, что, по существу, мы определили некоторый вид *обратной-прямой* бисимуляции. Однако, мы будем использовать термин *обратная бисимуляция* для получившегося отношения, которое значимо для формализма стохастических автоматных сетей [11] и может быть естественным образом перенесено на ПДВССП.

Как и бисимуляция, далее называемая *прямой бисимуляцией*, обратная бисимуляция определяется на основе отношений эквивалентности. Для  $\mathcal{L} \subseteq RS^*(N)$ ,  $M \in RS^*(N)$  и  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$  определим  $\mathcal{L} \xrightarrow{A}_Q M$  как

$$Q = \sum_{\{\tilde{M} \in \mathcal{L} \mid \tilde{M} \xrightarrow{A}_P M\}} P.$$

Пишем  $\mathcal{L} \xrightarrow{A} M$ , если  $\exists Q > 0 \mathcal{L} \xrightarrow{A}_Q M$ .

Для одноэлементного мультимножества видимых действий  $A = \{a\}$  пишем  $\mathcal{L} \xrightarrow{a}_Q M$  и  $\mathcal{L} \xrightarrow{a} M$ .

Аналогично определим понятие  $\mathcal{L} \xrightarrow{a}_Q M$ , основанное на интерливинговом отношении перехода.

**Определение 8.** Пусть  $N$  — ПДВССП. Отношение *эквивалентности*  $\mathcal{R} \subseteq RS^*(N)^2$  —  $\star$ -*обратная вероятностная  $\tau$ -бисимуляция* между маркировками  $M_1$  и  $M_2$  ПДВССП  $N$ ,  $\star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $\mathcal{R} : M_1 \xleftrightarrow{\star}_{bp} M_2$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , если  $\forall \mathcal{L} \in RS^*(N)/\mathcal{R}$

- $\forall x \in Act$  и  $\hookrightarrow = \dashrightarrow$ , если  $\star = i$ ;
- $\forall x \in \mathcal{N}_f^{Act}$  и  $\hookrightarrow = \dashrightarrow$ , если  $\star = s$ ;

$$[M_N]_{\mathcal{R}} = \{M_N\}, M_1 \xleftrightarrow{x}_Q RS^*(N) \Leftrightarrow M_2 \xleftrightarrow{x}_Q RS^*(N), \mathcal{L} \xleftrightarrow{x}_Q M_1 \Leftrightarrow \mathcal{L} \xleftrightarrow{x}_Q M_2.$$

Маркировки  $M_1$  и  $M_2$   $\star$ -*обратно вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентны*,  $\star \in \{\text{интерливинговая, шаговая}\}$ , запись  $M_1 \xleftrightarrow{\star}_{bp} M_2$ , если  $\exists \mathcal{R} : M_1 \xleftrightarrow{\star}_{bp} M_2$ ,  $\star \in \{i, s\}$ .

Заметим, что обратная бисимуляция имеет часть, «наблюдающую» будущее из-за требования о равенстве сумм вероятностей срабатывания в текущих маркировках «исходящих» переходов с пометкой  $a$ , а также часть, наблюдающую прошлое благодаря требованию о совпадении вероятностей «входящих» переходов их каждого класса эквивалентности.

Определение обратной бисимуляции для ПДВССП выглядит немного более сложным, чем соответствующее определение прямой бисимуляции, так как мы не можем предполагать, что вероятности входящих переходов одинаковы для эквивалентных маркировок разных ПДВССП. Вместо этого необходимо проверять, что совокупная вероятность перехода из одного класса эквивалентности в другой одинакова в обеих ПДВССП, как и вероятность входа в каждую маркировку класса эквивалентности.

Для упрощения определений введем *индикаторную функцию*  $\Gamma$ , определяющую, какой из двух сравниваемых ПДВССП принадлежит данная маркировка. Пусть  $N$  — ПДВССП и  $M \in RS^*(N)$ . Тогда, по определению,  $\Gamma(M) = N$ . Функция  $\Gamma$  позволяет избежать разбора несущественных вариантов при совместном рассмотрении маркировок различных ПДВССП.

**Определение 9.** Пусть  $N$  и  $N'$  — ПДВССП. Отношение  $\mathcal{R} \subseteq (RS^*(N) \cup RS^*(N'))^2$  —  $\star$ -обратная вероятностная  $\tau$ -бисимуляция между  $N$  и  $N'$ ,  $\star \in \{\text{интерливингивая, шаговая}\}$ , запись  $\mathcal{R} : N \xleftrightarrow{\star}_{bp} N'$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , если  $\forall \mathcal{L}, \mathcal{K} \in (RS^*(N) \cup RS^*(N'))/\mathcal{R} \forall M_1, M_2 \in \mathcal{L}$

- $\forall x \in Act$  и  $\hookrightarrow = \dashv$ , если  $\star = i$ ;
- $\forall x \in N_f^{Act}$  и  $\hookrightarrow = \dashv$ , если  $\star = s$ ;

$$[M_N]\mathcal{R} = \{M_N, M_{N'}\}, M_1 \xrightarrow{x}_{\mathcal{Q}} RS^*(\Gamma(M_1)) \Leftrightarrow M_2 \xrightarrow{x}_{\mathcal{Q}} RS^*(\Gamma(M_2)),$$

$$\mathcal{K} \xrightarrow{x}_{\mathcal{Q}} \frac{|\mathcal{L} \cap RS^*(\Gamma(M_1))|}{|\mathcal{K} \cap RS^*(\Gamma(M_1))|} M_1 \Leftrightarrow \mathcal{K} \xrightarrow{x}_{\mathcal{Q}} \frac{|\mathcal{L} \cap RS^*(\Gamma(M_2))|}{|\mathcal{K} \cap RS^*(\Gamma(M_2))|} M_2.$$

ПДВССП  $N$  и  $N'$   $\star$ -обратно вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентны,  $\star \in \{\text{интерливингивая, шаговая}\}$ , запись  $N \xleftrightarrow{\star}_{bp} N'$ , если  $\exists \mathcal{R} : N \xleftrightarrow{\star}_{bp} N'$ ,  $\star \in \{i, s\}$ .

Заметим, что для маркировок  $M_1$  и  $M_2$  одной ПДВССП условия на входящие вероятности сводятся к требованию их равенства.

Как и ранее, объединение обратных вероятностных  $\tau$ -бисимуляций есть обратная вероятностная  $\tau$ -бисимуляция.

### § 3.4. Обратные-прямые вероятностные $\tau$ -бисимуляционные эквивалентности

Естественно определить новые эквивалентности посредством комбинирования обратных и прямых бисимуляционных отношений. Введем обратные-прямые бисимуляционные эквивалентности для ПДВССП.

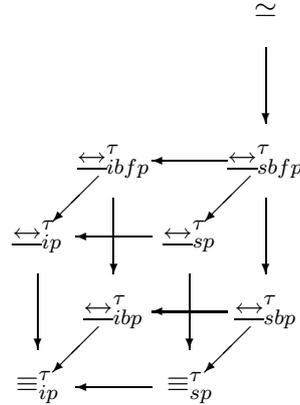


Рис. 3. Взаимосвязь вероятностных  $\tau$ -эквивалентностей

**Определение 10.** ПДВССП  $N$  и  $N'$   $\star$ -обратно-прямо вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентны,  $\star \in \{\text{интерливингивая, шаговая}\}$ , запись  $N \xleftrightarrow{\star bfp}^\tau N'$ , если

$$N \xleftrightarrow{\star p}^\tau N' \text{ и } N \xleftrightarrow{\star bp}^\tau N', \quad \star \in \{i, s\}.$$

#### § 4. Сравнение вероятностных $\tau$ -эквивалентностей

В этом разделе проводится сравнение введенных вероятностных отношений эквивалентности и строится диаграмма их взаимосвязей.

**Предложение 1.** Пусть  $\star \in \{i, s\}$ . Для ПДВССП  $N$  и  $N'$

- (1)  $N \xleftrightarrow{\star p}^\tau N' \Rightarrow N \equiv_{\star p}^\tau N'$ ;
- (2)  $N \xleftrightarrow{\star bp}^\tau N' \Rightarrow N \equiv_{\star p}^\tau N'$ ;
- (3)  $N \xleftrightarrow{\star bfp}^\tau N' \Rightarrow N \xleftrightarrow{\star p}^\tau N' \text{ и } N \xleftrightarrow{\star bp}^\tau N'$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как в [6] для ПДВССП. □

Таким образом, мы получили ряд важных результатов о том, что (обратные или прямые) вероятностные  $\tau$ -бисимуляционные эквивалентности влекут соответствующие следовые отношения, а обратные-прямые сильнее всех остальных  $\tau$ -бисимуляционных. Это помогает установить взаимосвязи рассмотренных понятий эквивалентности.

Символ ‘ $\_$ ’ в следующей теореме обозначает пустую альтернативу. То есть знак, подписанный или надписанный этим символом, считается знаком без подписей и надписей.

**Теорема 1.** Пусть  $\leftrightarrow, \leftrightarrow \in \{\equiv^\tau, \xleftrightarrow{\tau}, \simeq\}$  и  $\star, \star\star \in \{\_, ip, sp, ibp, sbp, ibfp, sbfp\}$ . Для ПДВССП  $N$  и  $N'$

$$N \leftrightarrow_\star N' \Rightarrow N \leftrightarrow_{\star\star} N'$$

тогда и только тогда, когда в графе на рисунке 3 существует направленный путь от  $\leftrightarrow_\star$  к  $\leftrightarrow_{\star\star}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ( $\Leftarrow$ ) Проверим истинность импликаций на рисунке 3.

- Связи  $\leftrightarrow_{sp} \rightarrow \leftrightarrow_{ip}$ ,  $\leftrightarrow \in \{\equiv^\tau, \leftrightarrow^\tau\}$ , а также  $\leftrightarrow_{sbp}^\tau \rightarrow \leftrightarrow_{ibp}^\tau$  и  $\leftrightarrow_{sbfp}^\tau \rightarrow \leftrightarrow_{ibfp}^\tau$  существуют, так как действие является одноэлементным мультимножеством, а нормализация заключается в делении вероятностей одноэлементных шагов на величину, равную для обеих ПДВССП.
- Связи  $\leftrightarrow_{*p}^\tau \rightarrow \equiv_{*p}^\tau$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , существуют по предложению 1.
- Связи  $\leftrightarrow_{*bp}^\tau \rightarrow \equiv_{*p}^\tau$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , существуют по предложению 1.
- Связи  $\leftrightarrow_{*bfp}^\tau \rightarrow \leftrightarrow_{*p}^\tau$  и  $\leftrightarrow_{*bfp}^\tau \rightarrow \leftrightarrow_{*bp}^\tau$ ,  $\star \in \{i, s\}$ , существуют по предложению 1.
- Связь  $\simeq \rightarrow \leftrightarrow_{sbfp}^\tau$  очевидна.

( $\Rightarrow$ ) Отсутствие дополнительных нетривиальных стрелок в графе на рисунке 3 доказывается с помощью следующих примеров на ПДВССП.

- На рисунке 4(a)  $N \leftrightarrow_{ibfp}^\tau N'$ , но  $N \not\equiv_{sp}^\tau N'$ , так как только в ПДВССП  $N'$  действия  $a$  и  $b$  не могут выполняться параллельно.
- На рисунке 4(b)  $N \equiv_{sp}^\tau N'$ , но  $N \not\leftrightarrow_{ip}^\tau N'$  и  $N \not\leftrightarrow_{ibp}^\tau N'$ , так как только в ПДВССП  $N'$  действие  $a$  может выполняться так, что никакое действие  $b$  не может случиться после него.
- На рисунке 4(c)  $N \leftrightarrow_{sp}^\tau N'$ , но  $N \not\leftrightarrow_{ibp}^\tau N'$ , так как только в ПДВССП  $N'$  есть место с двумя входными переходами, помеченными действием  $b$ . Поэтому вероятность попадания фишки в это место всегда больше, чем в место с одним входным переходом с пометкой  $b$ .
- На рисунке 4(d)  $N \leftrightarrow_{sbp}^\tau N'$ , но  $N \not\leftrightarrow_{ip}^\tau N'$ , так как только в ПДВССП  $N$  действие  $a$  может выполняться так, что последовательность действий  $bc$  не может случиться сразу после него.
- На рисунке 4(e)  $N \leftrightarrow_{sbfp}^\tau N'$ , но  $N \not\approx N'$ , так как никогда не срабатывающие переходы ПДВССП  $N$  и  $N'$  помечены разными действиями ( $a$  и  $b$ ).  $\square$

## § 5. Логическая характеристика вероятностных $\tau$ -эквивалентностей

В литературе был предложен ряд логических характеристик вероятностных эквивалентностей. Так, в [18] интерливинговая вероятностная бисимуляционная эквивалентность для вероятностных систем переходов была охарактеризована формулами логики  $PML$ , которая является вероятностным расширением известной модальной логики  $HML$  [17]. В работе [1] для интерливинговой вероятностной бисимуляционной эквивалентности на конечных марковских процессах предложена характеристика посредством темпоральной логики  $pCTL^*$ . В работе [5] для  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей на ДВМЦ и НВМЦ была предложена характеристика темпоральными логиками  $PCTL$  и  $CSL$ , соответственно.

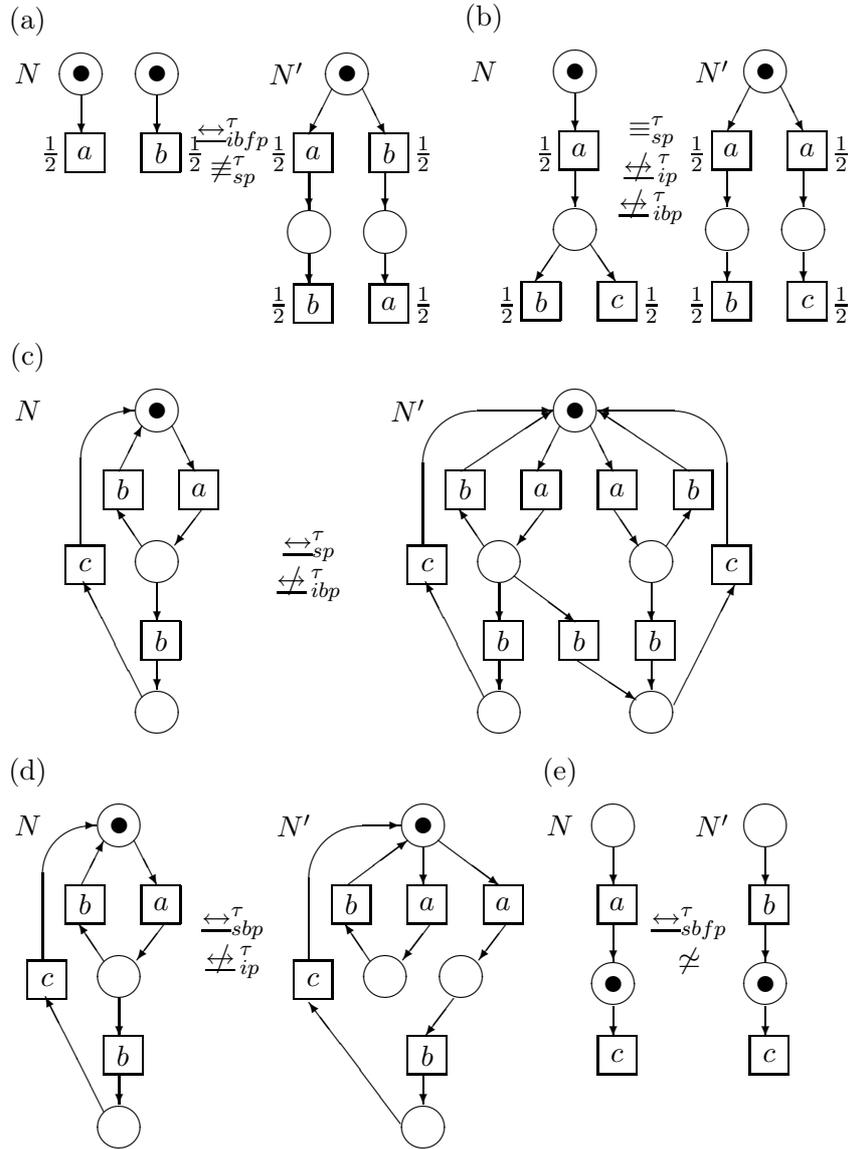


Рис. 4. Примеры вероятностных  $\tau$ -эквивалентностей

В этом разделе дается логическая характеристика определенных выше обычных вероятностных  $\tau$ -бисимуляционных эквивалентностей с помощью формул новых вероятностных модальных логик. Результаты можно также интерпретировать как операционную характеристику соответствующих логических отношений.

### § 5.1. Логика $IPML$

На основе  $PML$  мы строим новую интерливинговую вероятностную модальную логику  $IPML$  для характеристики интерливинговой вероятностной  $\tau$ -бисимуляционной эквивалентности.

**Определение 11.** Пусть символ  $\top$  обозначает тождественно истинную формулу и  $a \in Act$ ,  $\mathcal{P} \in (0; 1]$ . Формула  $IPML$  определяется следующим образом:

$$\Phi ::= \top \mid \neg\Phi \mid \Phi \wedge \Psi \mid \langle a \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$$

Определим  $\langle a \rangle\Phi = \exists \mathcal{P} > 0 \langle a \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ .

Обозначим через  $\mathbf{IPML}$  множество всех формул логики  $IPML$ .

**Определение 12.** Пусть  $N$  — некоторая ПДВССП и  $M \in RS^*(N)$ . Отношение выполнимости  $\models_N \subseteq RS^*(N) \times \mathbf{IPML}$  определяется следующим образом:

- (1)  $M \models_N \top$  — всегда;
- (2)  $M \models_N \neg\Phi$ , если  $M \not\models_N \Phi$ ;
- (3)  $M \models_N \Phi \wedge \Psi$ , если  $M \models_N \Phi$  и  $M \models_N \Psi$ ;
- (4)  $M \models_N \langle a \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ , если  $\exists \mathcal{L} \subseteq RS^*(N)$   $M \xrightarrow{a}_{\mathcal{Q}} \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$  и  $\forall \tilde{M} \in \mathcal{L}$   $\tilde{M} \models_N \Phi$ .

Заметим, что  $\langle a \rangle_{\mathcal{Q}}\Phi$  влечет  $\langle a \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ , если  $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$ .

**Определение 13.** Пишем  $N \models_N \Phi$ , если  $M_N \models_N \Phi$ . ПДВССП  $N$  и  $N'$  логически эквивалентны в  $IPML$ , запись  $N =_{IPML} N'$ , если  $\forall \Phi \in \mathbf{IPML}$   $N \models_N \Phi \Leftrightarrow N' \models_{N'} \Phi$ .

Пусть  $N$  — некоторая ПДВССП и  $M \in RS^*(N)$ ,  $a \in Act$ . Множество следующих за  $M$  маркировок после выполнения видимого действия  $a$  (видимых образов) определяется как  $VisImage(M, a) = \{\tilde{M} \mid M \xrightarrow{a} \tilde{M}\}$ . ПДВССП  $N$  — конечно-образная, если  $\forall M \in RS^*(N) \forall a \in Act \ |VisImage(M, a)| < \infty$ .

**Теорема 2.** Для конечно-образных ПДВССП  $N$  и  $N'$

$$N \xleftrightarrow{ip}^{\tau} N' \Leftrightarrow N =_{IPML} N'.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как теорема 3, но с использованием смен маркировок в результате выполнения отдельных действий, а не мультимножеств действий, а также интерливингового отношения перехода.  $\square$

Таким образом, в интерливинговой семантике мы получили логическую характеристику вероятностного  $\tau$ -бисимуляционного отношения или, симметрично, операционную характеристику эквивалентности вероятностной модальной логики.

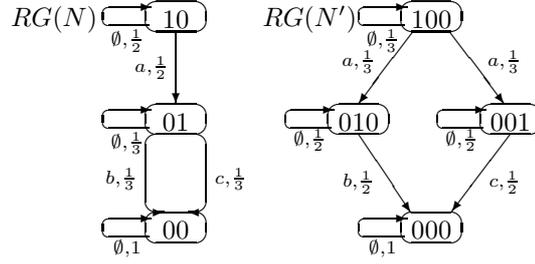


Рис. 5. Графы достижимости ПДВССП на рисунке 4(b)

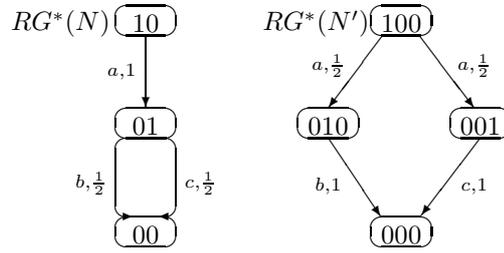


Рис. 6. Видимые графы достижимости ПДВССП на рисунке 4(b)

**Пример 3.** На рисунке 4(b)  $N \equiv_{sp}^{\tau} N'$ , но  $N \neq_{IPML} N'$ , так как для  $\Phi = \langle a \rangle_1 \langle b \rangle_{\frac{1}{2}} \top$  имеем  $N \models_N \Phi$ , но  $N' \not\models_{N'} \Phi$  из-за того, что только в ПДВССП  $N'$  действие  $a$  может выполняться так, что никакое действие  $b$  не может случиться после него.

На рисунке 5 изображены обычные, а на рисунке 6 — видимые графы достижимости ПДВССП с рисунка 4(b).

### § 5.2. Логика $SPML$

На основе  $PML$  мы строим новую шаговую вероятностную модальную логику  $SPML$  для характеристики шаговой вероятностной  $\tau$ -бисимуляционной эквивалентности.

**Определение 14.** Пусть символ  $\top$  обозначает тождественно истинную формулу и  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$ ,  $\mathcal{P} \in (0; 1]$ . Формула  $SPML$  определяется следующим образом:

$$\Phi ::= \top \mid \neg\Phi \mid \Phi \wedge \Phi \mid \langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$$

Определим  $\langle A \rangle\Phi = \exists \mathcal{P} > 0 \langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ .

Обозначим через  $\mathbf{SPML}$  множество всех формул логики  $SPML$ .

**Определение 15.** Пусть  $N$  — некоторая ПДВССП и  $M \in RS^*(N)$ . Отношение выполнимости  $\models_N \subseteq RS^*(N) \times \mathbf{SPML}$  определяется следующим образом:

- (1)  $M \models_N \top$  — всегда;

- (2)  $M \models_N \neg\Phi$ , если  $M \not\models_N \Phi$ ;
- (3)  $M \models_N \Phi \wedge \Psi$ , если  $M \models_N \Phi$  и  $M \models_N \Psi$ ;
- (4)  $M \models_N \langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ , если  $\exists \mathcal{L} \subseteq RS^*(N)$   $M \xrightarrow{A}_{\mathcal{Q}} \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$  и  $\forall \widetilde{M} \in \mathcal{L} \widetilde{M} \models_N \Phi$ .

Заметим, что  $\langle A \rangle_{\mathcal{Q}}\Phi$  влечет  $\langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ , если  $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$ .

**Определение 16.** Пишем  $N \models_N \Phi$ , если  $M_N \models_N \Phi$ . ПДВССП  $N$  и  $N'$  логически эквивалентны в  $SPML$ , запись  $N =_{SPML} N'$ , если  $\forall \Phi \in \mathbf{SPML} N \models_N \Phi \Leftrightarrow N' \models_{N'} \Phi$ .

Пусть  $N$  — некоторая ПДВССП и  $M \in RS^*(N)$ ,  $A \in \mathcal{N}_f^{Act}$ . Множество *следующих* за  $M$  маркировок *после выполнения мультимножества видимых действий*  $A$  (*видимых образов*) определяется как  $VisImage(M, A) = \{\widetilde{M} \mid M \xrightarrow{A} \widetilde{M}\}$ . ПДВССП  $N$  — *конечно-образная*, если  $\forall M \in RS^*(N) \forall A \in \mathcal{N}_f^{Act} |VisImage(M, A)| < \infty$ .

**Теорема 3.** Для конечно-образных ПДВССП  $N$  и  $N'$

$$N \xleftrightarrow{\tau}_{sp} N' \Leftrightarrow N =_{SPML} N'.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** ( $\Leftarrow$ ) Определим отношение эквивалентности  $\mathcal{R} = \{(M_1, M_2) \in (RS^*(N) \cup RS^*(N'))^2 \mid \forall \Phi \in \mathbf{SPML} M_1 \models_{\Gamma(M_1)} \Phi \Leftrightarrow M_2 \models_{\Gamma(M_2)} \Phi\}$ . Имеем  $(M_N, M_{N'}) \in \mathcal{R}$ . Докажем, что  $\mathcal{R}$  — интерливинговая вероятностная  $\tau$ -бисимуляция.

Предположим, что  $M_N \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}} \mathcal{L} \in RS^*(N) \cup RS^*(N') / \xleftrightarrow{\tau}_{ip}$ . Пусть  $M_{N'} \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}'_1} M'_1, \dots, M_{N'} \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}'_i} M'_i, M_{N'} \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}'_{i+1}} M'_{i+1}, \dots, M_{N'} \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}'_n} M'_n$  — смены маркировки  $M_{N'}$  в результате выполнения мультимножества действий  $A$ . Так как ПДВССП  $N'$  конечно-образная, количество таких смен маркировок конечно. Эти смены маркировок упорядочены так, что  $M'_1, \dots, M'_i \in \mathcal{L}$  и  $M'_{i+1}, \dots, M'_n \notin \mathcal{L}$ .

Тогда  $\exists \Phi_{i+1}, \dots, \Phi_n \in \mathbf{SPML}$  такие, что  $\forall j$  ( $i+1 \leq j \leq n$ )  $\forall M \in \mathcal{L} M \models_{\Gamma(M)} \Phi_j$ , но  $M'_j \not\models_{N'} \Phi_j$ . Имеем  $M_N \models_N \langle A \rangle_{\mathcal{P}}(\wedge_{j=i+1}^n \Phi_j)$  и  $M_{N'} \models_{N'} \langle A \rangle_{(1-\sum_{j=1}^i \mathcal{P}'_j)} \neg(\wedge_{j=i+1}^n \Phi_j)$ .

Предположим, что  $\mathcal{P} > \sum_{j=1}^i \mathcal{P}'_j$ . Тогда  $M_{N'} \models_{N'} \langle A \rangle_{(1-\mathcal{P})} \neg(\wedge_{j=i+1}^n \Phi_j)$ , и  $M_{N'} \not\models_{N'} \langle A \rangle_{\mathcal{P}}(\wedge_{j=i+1}^n \Phi_j)$ , а это противоречит тому, что  $(M_N, M_{N'}) \in \mathcal{R}$ . Значит,  $\mathcal{P} \leq \sum_{j=1}^i \mathcal{P}'_j$ . Следовательно,  $M_{N'} \xrightarrow{A}_{\mathcal{P}'} \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{P} \leq \sum_{j=1}^i \mathcal{P}'_j \leq \mathcal{P}'$ . В силу симметричности  $\xleftrightarrow{\tau}_{ip}$ , имеем  $\mathcal{P} \geq \mathcal{P}'$ . Таким образом,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ , и  $\mathcal{R}$  — интерливинговая вероятностная  $\tau$ -бисимуляция.

( $\Rightarrow$ ) Достаточно рассмотреть только случай  $\langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ , так как остальные случаи тривиальны. Пусть для ПДВССП  $N$  и  $N'$   $N \xleftrightarrow{\tau}_{ip} N'$ . Тогда  $M_N \xleftrightarrow{\tau}_{ip} M_{N'}$ . Предположим, что  $M_N \models_N \langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ . Тогда  $\exists \mathcal{L} \subseteq RS^*(N) \cup RS^*(N')$   $M_N \xrightarrow{A}_{\mathcal{Q}} \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$  и  $\forall M \in \mathcal{L} M \models_{\Gamma(M)} \Phi$ .

Определим  $\widetilde{\mathcal{L}} = \bigcup \{\mathcal{K} \in RS^*(N) \cup RS^*(N') / \xleftrightarrow{\tau}_{ip} \mid \mathcal{K} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset\}$ . Тогда  $\forall \widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}} \exists M \in \mathcal{L} M \xleftrightarrow{\tau}_{ip} \widetilde{M}$ . Так как  $\forall M \in \mathcal{L} M \models_{\Gamma(M)} \Phi$ , по индуктивному предположению имеем  $\forall \widetilde{M} \in \widetilde{\mathcal{L}} \widetilde{M} \models_{\Gamma(\widetilde{M})} \Phi$ .

Так как  $\mathcal{L} \subseteq \widetilde{\mathcal{L}}$ , имеем  $M_N \xrightarrow{A}_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \widetilde{\mathcal{L}}$ ,  $\widetilde{\mathcal{Q}} \geq \mathcal{Q}$ . Поскольку  $\widetilde{\mathcal{L}}$  — объединение классов эквивалентности относительно  $\xleftrightarrow{\tau}_{ip}$ , то из  $M_N \xleftrightarrow{\tau}_{ip} M_{N'}$  следует  $M_{N'} \xrightarrow{A}_{\widetilde{\mathcal{Q}}} \widetilde{\mathcal{L}}$ . Так как  $\widetilde{\mathcal{Q}} \geq \mathcal{Q} \geq \mathcal{P}$ , имеем  $M_{N'} \models_{N'} \langle A \rangle_{\mathcal{P}}\Phi$ . Поэтому ПДВССП  $N'$  выполняет все формулы,

выполнимые  $N$ . В силу симметричности  $\Leftrightarrow_{ip}^\tau$ , ПДВССП  $N$  выполняет все формулы, выполнимые  $N'$ . Итак, множества выполнимых формул для  $N$  и  $N'$  совпадают.  $\square$

Таким образом, в шаговой семантике мы получили логическую характеристику вероятностного  $\tau$ -бисимуляционного отношения или, симметрично, операционную характеристику эквивалентности вероятностной модальной логики.

**Пример 4.** На рисунке 4(а)  $N \Leftrightarrow_{ibfp}^\tau N'$ , но  $N \neq_{SPML} N'$ , так как для  $\Phi = \langle \{a, b\} \rangle_{\frac{1}{3}} \top$  имеем  $N \models_N \Phi$ , но  $N' \not\models_{N'} \Phi$  из-за того, что только в ПДВССП  $N'$  действия  $a$  и  $b$  не могут выполняться параллельно.

На рисунке 7 изображены обычные, а на рисунке 8 — видимые графы достижимости ПДВССП с рисунка 4(а).

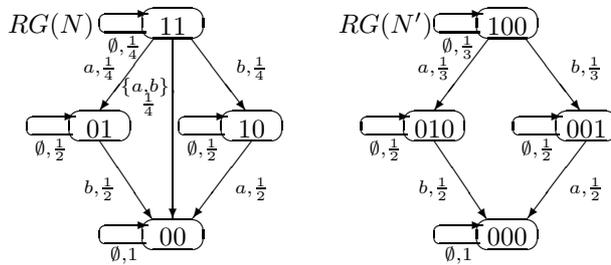


Рис. 7. Графы достижимости ПДВССП на рисунке 4(а)

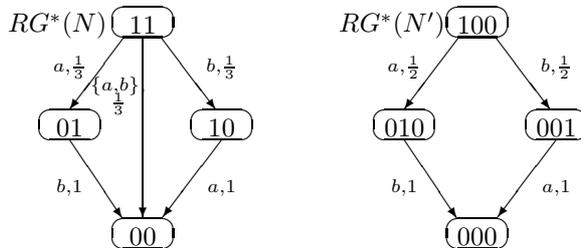


Рис. 8. Видимые графы достижимости ПДВССП на рисунке 4(а)

## § 6. Стационарное поведение

Естественно рассматривать поведение таких динамических систем, как ДВССП, на основе их видимых интерливинговых или шаговых вероятностных следов, используемых в определениях соответствующих следовых эквивалентностей. Так как следовые эквивалентности — самые слабые, они являются следствиями всех остальных отношений.

Другая точка зрения на поведение стохастических систем — рассмотрение ДВССП в стабильном состоянии. Для этого используются только ДВССП с бесконечным поведением, для которых соответствующая ДВМЦ несократима или имеет только одно

нередуцируемое подмножество состояний. Стационарное поведение после выполнения видимого действия — единственное решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum_{\tilde{M} \in RS^*(N)} ps^*(\tilde{M}) \cdot PM^*(\tilde{M}, M) = ps^*(M), \\ \sum_{M \in RS^*(N)} ps^*(M) = 1. \end{cases}$$

Далее будем рассматривать только шаговое поведение как более интересное. Результаты для интерливингового поведения получаются заменой мультимножеств действий на отдельные действия, а стандартного отношения перехода — на интерливинговое.

Введем понятие *видимого шагового вероятностного следа, начинающегося в маркировке*  $M \in RS^*(N)$  ПДВССП  $N$  как пары  $(\Sigma, \mathcal{P})$ , где  $\Sigma = A_1 \cdots A_n \in Act^*$  и

$$\mathcal{P} = \sum_{\{M_1, \dots, M_n \mid M \xrightarrow{A_1}_{\mathcal{P}_1} M_1 \xrightarrow{A_2}_{\mathcal{P}_2} \dots \xrightarrow{A_n}_{\mathcal{P}_n} M_n\}} \prod_{i=1}^n \mathcal{P}_i.$$

Таким образом, в определении  $VisStepProbTraces(N)$  мы заменили  $M_N$  на  $M$ . Пусть  $VisStepProbTraces(N, M)$  — множество *всех видимых шаговых вероятностных следов, начинающихся в маркировке*  $M \in RS^*(N)$  ПДВССП  $N$ .

**Определение 17.** *Видимый шаговый вероятностный след в стабильном состоянии* — пара  $(\Sigma, ps^*(M) \cdot \mathcal{P})$ , где  $M \in RS^*(N)$  и  $(\Sigma, \mathcal{P}) \in VisStepProbTraces(N, M)$ . Тогда  $VisStepProbTracesSS(N)$  обозначает множество *всех видимых шаговых вероятностных следов в стабильном состоянии* ПДВССП  $N$ .

Покажем, что шагово (обратно или прямо) вероятностно  $\tau$ -бисимуляционно эквивалентные ПДВССП имеют одинаковые видимые шаговые вероятностные следы в стабильном состоянии, а шаговые вероятностные  $\tau$ -следовые эквивалентности не сохраняют такие стабильные следы.

**Предложение 2.** (1) Пусть  $N$  и  $N'$  — ПДВССП и  $N \xleftrightarrow{sbp}^{\tau} N'$ . Тогда  $\forall \mathcal{L} \in (RS^*(N) \cup RS^*(N'))/\mathcal{R}$

$$\sum_{M \in \mathcal{L} \cap RS^*(N)} ps^*(M) = \sum_{M' \in \mathcal{L} \cap RS^*(N')} ps^*(M').$$

(2) Пусть  $N$  и  $N'$  — ПДВССП и  $N \xleftrightarrow{sbp}^{\tau} N'$ . Тогда  $\forall \mathcal{L} \in (RS^*(N) \cup RS^*(N'))/\mathcal{R}$

$$\sum_{M \in \mathcal{L} \cap RS^*(N)} ps^*(M) = \sum_{M' \in \mathcal{L} \cap RS^*(N')} ps^*(M');$$

$$\forall M, \tilde{M} \in \mathcal{L} \cap RS^*(N), \forall M', \tilde{M}' \in \mathcal{L} \cap RS^*(N')$$

$$ps^*(M) = ps^*(\tilde{M}) \text{ и } ps^*(M') = ps^*(\tilde{M}').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Расширение результатов для непрерывного времени из [7].  $\square$

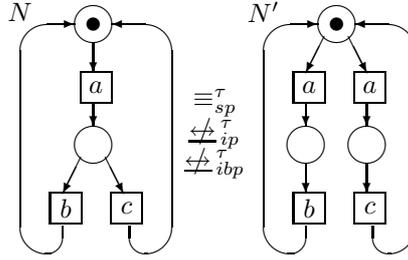


Рис. 9. ПДВССП с разными видимыми шаговыми вероятностными следами в стабильном состоянии

**Теорема 4.** Пусть  $N$  и  $N'$  — ПДВССП и  $N \xleftrightarrow{\tau_{sp}} N'$  или  $N \xleftrightarrow{\tau_{sbp}} N'$ . Тогда

$$VisStepProbTracesSS(N) = VisStepProbTracesSS(N').$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как в [6] для ПДВССП. □

Требование бисимуляционной эквивалентности сетей из теоремы 4 необходимым, так как для ПДВССП  $N$  и  $N'$  таких, что  $N \equiv_{sp}^{\tau} N'$ , может выполняться

$$VisStepProbTracesSS(N) \neq VisStepProbTracesSS(N').$$

**Пример 5.** Рассмотрим пример из [6]. Для ПДВССП  $N$  и  $N'$  на рисунке 9  $N \equiv_{sp}^{\tau} N'$ . Для  $N$  вероятность нахождения в одной из двух возможных маркировок есть  $\frac{1}{2}$ . Поэтому след  $N$  начинается с действия  $a$  с вероятностью  $\frac{1}{2}$ . Для  $N'$  вероятность оказаться в одной из трех возможных маркировок есть  $\frac{1}{3}$ . Следовательно, вероятность следа  $N'$  начинаться с действия  $a$  равна  $\frac{1}{3}$ . Таким образом,

$$VisStepProbTracesSS(N) \neq VisStepProbTracesSS(N').$$

Заметим, что стационарное распределение определяется здесь в соответствии со встроенным распределением после шага видимых переходов. Такое распределение отличается от стационарного распределения для ПДВССП в произвольный момент времени. Последнее поведение нужно анализировать с помощью  $RS(N)$  вместо  $RS^*(N)$ . Оно не сохраняется каким-либо из рассмотренных отношений эквивалентности, даже если мы ограничимся наблюдением только видимых действий.

## § 7. Алгебра конечных стохастических процессов $StAFP_0$

В работах [12] предложена алгебра конечных недетерминированных параллельных процессов  $AFP_0$  (Algebra of Finite Processes). Ее формулы специфицируют ациклические сети (A-сети). В этой главе описывается разработанное нами стохастическое расширение этого исчисления, алгебра конечных стохастических процессов  $StAFP_0$  (Algebra of

Finite Stochastic Processes), описывающая стохастические ациклические сети (СА-сети), то есть А-сети с вероятностями переходов.

### § 7.1. Синтаксис

*Активность* — пара  $(a, \rho)$ , где  $a \in Act$  — символ действия, а  $\rho \in (0; 1]$  — вероятность действия  $a$ .  $AP$  обозначает множество *всех активностей*.

Активности комбинируются в формулы с помощью следующих операций: *параллельность*  $\parallel$ , *предшествование*  $;$  и *альтернатива*  $\nabla$ .

**Определение 18.** Пусть  $(a, \rho) \in AP$ . Формула  $StAFP_0$  определяется так:

$$E ::= (a, \rho) \mid E \parallel E \mid E; E \mid E \nabla E.$$

$StAFP_0$  обозначает множество *всех формул*  $StAFP_0$ .

### § 7.2. Семантика

Как мы увидим далее, формулы  $StAFP_0$  описывают особый подкласс ПДВССП. ССП этого подкласса начальную маркировку, совпадающую с множеством начальных мест (то есть в каждом начальном месте находится ровно одна фишка, и фишек нет в остальных местах). Кроме того, базовые сети Петри, стохастическим расширением которых является упомянутый подкласс, — А-сети. Это значит, что ССП данного подкласса строго помечены действиями из  $Act$  (нет невидимых переходов), и все переходы имеют разную пометку. Назовем этот подкласс *стохастическими А-сетями (СА-сетями)*.

В определении СА-сетей мы опустим начальную маркировку, поскольку  $M_N = \bullet N$ . Из-за строгой пометки А-сетей, для СА-сетей можно положить  $T_N \subseteq Act$ , и поэтому опустить функцию пометки, так как  $L_N = id_{T_N}$ . Следовательно, СА-сеть можно определить как четверку  $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N)$ .

**Определение 19.** Отображение  $\mathcal{D}_{St0}$  из  $StAFP_0$  в СА-сети, конструируемое далее, определяет *денотационную семантику*  $StAFP_0$ .

Пусть  $(a, \rho) \in AP$ . *Атомарная СА-сеть*  $\mathcal{D}_{St0}(a, \rho)$  состоит из перехода с пометкой  $a$  и вероятностью  $\rho$ , имеющего одно начальное и одно конечное места, соединенные с переходом одинарными дугами. Начальное место содержит одну фишку. Таким образом,  $\mathcal{D}_{St0}(a, \rho) = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N)$ , где

- $P_N = \{\bar{a}, \underline{a}\}$ ;
- $T_N = \{a\}$ ;
- $W_N = \{(\bar{a}, a), (a, \underline{a})\}$ ;
- $\Omega_N = \{(a, \rho)\}$ .

Для СА-сети  $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N)$  мы определяем операцию *формирования*  $\otimes$  над двумя подмножествами ее мест  $Q, R \subseteq P_N$  как

$$R \otimes Q = \{r \cup q \mid r \in R, q \in Q\}.$$

Операция *слияния*  $\mu$  над СА-сетью  $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N)$  объединяет два подмножества ее мест  $Q, R \subseteq P_N$ :

$$\mu(N, R, Q) = (\tilde{P}_N, T_N, \tilde{W}_N, \Omega_N), \text{ где}$$

- $\tilde{P}_N = P_N \setminus (Q \cup R) \cup (Q \otimes R)$ ;
- $\forall t \in T_N \tilde{W}_N(p, t) = \begin{cases} W_N(p, t), & p \in \tilde{P}_N \setminus (Q \otimes R); \\ \max\{W_N(r, t), W_N(q, t)\}, & p = (q \cup r) \in Q \otimes R, q \in Q, r \in R. \end{cases}$
- $\forall t \in T_N \tilde{W}_N(t, p) = \begin{cases} W_N(t, p), & p \in \tilde{P}_N \setminus (Q \otimes R); \\ \max\{W_N(t, r), W_N(t, q)\}, & p = (q \cup r) \in Q \otimes R, q \in Q, r \in R. \end{cases}$

Пусть  $N = (P_N, T_N, W_N, \Omega_N)$  и  $N' = (P_{N'}, T_{N'}, W_{N'}, \Omega_{N'})$  — СА-сети. Определим сетевые операции следующим образом.

**Параллельность**  $N \parallel N' = (P_N \cup P_{N'}, T_N \cup T_{N'}, W_N \cup W_{N'}, \tilde{\Omega})$ , где

$$\tilde{\Omega}(a) = \begin{cases} \Omega_N(a), & a \in T_N \setminus T_{N'}; \\ \Omega_{N'}(a), & a \in T_{N'} \setminus T_N; \\ \Omega_N(a) \cdot \Omega_{N'}(a), & a \in T_N \cap T_{N'}. \end{cases}$$

**Предшествование**  $N; N' = \mu(N \parallel N', N^\bullet, \bullet N')$ .

**Альтернатива**  $N \nabla N' = \mu(\mu(N \parallel N', \bullet N, \bullet N'), N^\bullet, N'^\bullet)$ .

Из приведенного выше определения ясно, что при параллельной композиции синхронизируются процессы, содержащие одинаковые действия. В этом случае вероятности объединяемых действий перемножаются.

В дальнейшем будем предполагать, что СА-сети  $N$  и  $N'$ , которые комбинируются сетевыми операциями  $;$  и  $\nabla$ , не содержат одноименных переходов. Будем считать также, что формулы  $E$  и  $E'$ , которые комбинируются формульными операциями  $;$  и  $\nabla$ , не содержат одинаковых действий. В любом случае, всегда возможно переименовать действия и восстановить исходные имена после применения операций.

Пусть  $E, F \in \mathbf{StAFP}_0$ . Отображение  $\mathcal{D}_{St0}$  определяется на составных формулах следующим образом.

- (1)  $\mathcal{D}_{St0}(E \parallel F) = \mathcal{D}_{St0}(E) \parallel \mathcal{D}_{St0}(F)$ ;
- (2)  $\mathcal{D}_{St0}(E; F) = \mathcal{D}_{St0}(E); \mathcal{D}_{St0}(F)$ ;
- (3)  $\mathcal{D}_{St0}(E \nabla F) = \mathcal{D}_{St0}(E) \nabla \mathcal{D}_{St0}(F)$ .

Теперь определим эквивалентность на основе сетевого представления формул.

**Определение 20.** Формулы  $E, E' \in \mathbf{StAFP}_0$  семантически эквивалентны в  $StAFP_0$ , запись  $E =_{St0} E'$ , если  $\mathcal{D}_{St0}(E) \simeq \mathcal{D}_{St0}(E')$ , где  $\simeq$  — изоморфизм ССП, то есть их совпадение с точностью до переименования мест и переходов.

### § 7.3. Аксиоматизация

Пусть  $E \in \mathbf{StAFP}_0$ . Из  $E$  можно легко извлечь формулу  $\phi_E \in \mathbf{AFP}_0$ , описывающую не-стохастический процесс. Для этого заменим каждую активность  $(a, \rho)$ , содержащуюся в  $E$ , на действие  $a$ . Назовем  $\phi_E$  *структурой*  $E$ .

Определим также *функцию вероятности действий*  $\Omega_E$ , действующую из множества всех действий, содержащихся в активностях  $E$ , в интервал вероятностей  $(0; 1]$ . Пусть  $(a, \rho_1), \dots, (a, \rho_n)$  — все активности  $E$ , содержащие действие  $a$ . Тогда  $\Omega_E(a) = \rho_1 \cdots \rho_n$ . Это соответствует идее перемножения вероятностей синхронизируемых действий.

В соответствии с отношением эквивалентности  $=_{St0}$  вводится система аксиом  $\Theta_{St0}$ .

В следующих равенствах  $a \in Act$  и  $E, F, G \in \mathbf{StAFP}_0$ .

#### 1. Ассоциативность

$$1.1 \quad E \parallel (F \parallel G) = (E \parallel F) \parallel G$$

$$1.2 \quad E; (F; G) = (E; F); G$$

$$1.3 \quad E \nabla (F \nabla G) = (E \nabla F) \nabla G$$

#### 2. Коммутативность

$$2.1 \quad E \parallel F = F \parallel E$$

$$2.2 \quad E \nabla F = F \nabla E$$

#### 3. Дистрибутивность

$$3.1 \quad E; (F \parallel G) = (E_1; F) \parallel (E_2; G), \text{ если } \phi_E = \phi_{E_1} = \phi_{E_2} \text{ и } \Omega_E = \Omega_{E_1} \cdot \Omega_{E_2}$$

$$3.2 \quad (E \parallel F); G = (E; G_1) \parallel (F; G_2), \text{ если } \phi_G = \phi_{G_1} = \phi_{G_2} \text{ и } \Omega_G = \Omega_{G_1} \cdot \Omega_{G_2}$$

$$3.3 \quad E \nabla (F \parallel G) = (E_1 \nabla F) \parallel (E_2 \nabla G), \text{ если } \phi_E = \phi_{E_1} = \phi_{E_2} \text{ и } \Omega_E = \Omega_{E_1} \cdot \Omega_{E_2}$$

#### 4. Вероятность

$$4.1 \quad E = E_1 \parallel E_2, \text{ если } \phi_E = \phi_{E_1} = \phi_{E_2} \text{ и } \Omega_E = \Omega_{E_1} \cdot \Omega_{E_2}$$

Легко проверить, что система аксиом  $\Theta_{St0}$  *соответствует* (то есть корректна относительно) эквивалентности  $=_{St0}$ .

Формула  $E \in \mathbf{StAFP}_0$  *полностью расслоенная*, если она имеет вид  $E = E_1 \parallel \cdots \parallel E_n$ , где  $n \geq 0$ , и каждая  $E_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) — *примитивная формула*, то есть не содержит операцию параллелизма  $\parallel$ .

**Теорема 5.** *Любая формула  $StAFP_0$  может быть сведена с помощью системы аксиом  $\Theta_{St0}$  к эквивалентной (относительно  $=_{St0}$ ) полностью расслоенной.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Как в [12], так как не возникает сложностей с вероятностями.  $\square$

Таким образом, всегда можно найти компоненты  $E_1, \dots, E_n$  формулы  $E$ , соответствующие параллельно комбинируемым подсетям. В этом случае  $E = E_1 \parallel \cdots \parallel E_n$  и  $\phi_E = \phi_{E_1} \parallel \cdots \parallel \phi_{E_n}$ ,  $\Omega_E = \Omega_{E_1} \cdots \Omega_{E_n}$ .

## § 8. Заключение

В этой работе был введен новый класс ДВССП с пометкой переходов, а также шаговой семантикой их срабатывания, называемый ПДВССП. Для этого класса были определены различные понятия вероятностных эквивалентностей, сохраняющие интересные аспекты поведения моделируемых систем, и проведено их сравнение. В результате сравнения эквивалентностей в соответствии с их различающей способностью получена диаграмма их взаимосвязей. Отношения эквивалентности можно использовать для сравнения различных систем, а также для вычисления их минимального эквивалентного представления данной системы [9]. Последнее свойство особенно существенно, когда рассматриваются бисимуляционные эквивалентности, для которых были разработаны эффективные алгоритмы вычисления максимальной бисимуляции данной ССП. Представляя каждый класс эквивалентности этого отношения одной маркировкой, получаем минимальное представление на уровне смен состояний. Была дана характеристика ряда упомянутых отношений с помощью новых вероятностных модальных логик, позволяющая проверять эквивалентность ПДВССП посредством сравнения отношения выполнимости для них логических формул. Кроме того, было показано использование эквивалентностей для сравнения стационарного (долговременного) поведения ПДВССП. Была предложена стохастическая алгебра конечных процессов  $StAFP_0$ , формулы которой описывают стохастические А-сети, особый подкласс ПДВССП. Построена корректная аксиоматизация сетевой эквивалентности, то есть изоморфизма сетевых представлений формул.

Предметом дальнейших исследований могло бы стать определение для ССП других вероятностных бисимуляционных эквивалентностей в интерливинговой и шаговой семантиках. Например, можно ввести вероятностный аналог ветвистой  $\tau$ -бисимуляции [26], как и варианты обратных-прямых эквивалентностей [23, 25]. Но для таких эквивалентностей невозможно использовать видимый граф достижимости, поскольку необходимо учитывать информацию более низкого уровня, которая теряется при построении такого графа. Так, для определения ветвистых отношений нужно принимать во внимание все срабатывания невидимых переходов, а также маркировки, в которых они конфликтны с другими переходами. В [4] на вероятностных системах переходов была определена интерливинговая ветвистая  $\tau$ -бисимуляционная эквивалентность, но было доказано ее совпадение с соответствующим не-ветвистым отношением. Таким образом, в этом случае нельзя с самого начала абстрагироваться от невидимых переходов. Для введения понятий обратных-прямых бисимуляций существенна информация о пути из событий, приведших в текущее состояние. Следовательно, недостаточно рассматривать пути, состоящие даже из переходов, срабатывания которых привели из начальной в текущую маркировку. Дело в том, что для небезопасных сетей (места могут содержать

несколько фишек) одни и те же переходы могут сработать как последовательно, так и параллельно, приводя к одной маркировке. В таком случае необходимо определить аналог понятия процесса [2] для ССП и учитывать события, принадлежащие его путям.

Также можно ввести «истинно параллельные» эквивалентности для ССП, такие как отношения на частичных словах или на ЧУММ [26]. Шаговую семантику, предложенную в данной работе, можно рассматривать как первый этап исследования «истинно параллельной» семантики ССП. Далее следует изучить возможность переноса в модель ПДВССП двух ЧУММ вероятностных  $\tau$ -эквивалентностей, введенных в [20] для особого типа стохастических структур событий. Затем, аналогично этим «адаптированным» эквивалентностям, необходимо будет определить новые «истинно параллельные» вероятностные сетевые отношения.

Кроме того, стоит попытаться дать логическую характеристику остальных вероятностных бисимуляционных  $\tau$ -эквивалентностей, то есть обратных и обратных-прямых. С этой целью необходимо разработать вероятностные аналоги обратной-прямой логики *BFL*, введенной в [14] на структурах событий.

Научный интерес представляет обогащение рассмотренной в работе алгебры возможностью описания бесконечных процессов, например, введением оператора рекурсии. Однако, наше исчисление *StAFP*<sub>0</sub> недостаточно выразительно для этой цели вследствие присущего ему механизма синхронизации по именам действий. Это означает, что действие не может причинно зависеть от одноименного действия, что существенно для рекурсии. Возможным решением является использование для стохастического обогащения более гибкой и выразительной алгебры, такой как исчисление боксов Петри *PBC* (Petri Box Calculus) [3]. В [24] предложено его стохастическое расширение *sPBC* (stochastic *PBC*), в котором с действиями связаны параметры *непрерывного* экспоненциального распределения, а семантика определена в терминах помеченных НВССП (ПНВССП). В силу свойств непрерывных распределений вероятностей, *sPBC* имеет лишь интерливинговую операционную семантику. Однако, исходное исчисление *PBC* обладает более выразительной шаговой семантикой, и в *sPBC* используются сложные конструкции, когда для корректного подсчета вероятностей требуется отличить потенциальный параллелизм от интерливинга. По нашему мнению, ПДВССП — более естественная и простая модель для интерпретации алгебраических формул, так как *дискретные* геометрические распределения вероятностей, используемые в ПДВССП, позволяют ввести шаговую операционную семантику для стохастического расширения *PBC*.

## Литература

- [1] A. Aziz, V. Singhal, F. Balarin, R. K. Brayton, A. L. Sangiovanni-Vincentelli, It usually works: the temporal logic of stochastic systems, Lect. Notes Comp. Sci., **939** (1995), 155–165.

- [2] *E. Best, R. Devillers*, Sequential and concurrent behaviour in Petri net theory, *Theoretical Computer Sci.*, **55** (1987), 87–136.
- [3] *E. Best, R. Devillers, J.G. Hall*, The box calculus: a new causal algebra with multi-label communication, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **609** (1992), 21–69.
- [4] *C. Baier, H. Hermanns*, Weak bisimulation for fully probabilistic processes, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **1254** (1997), 119–130.
- [5] *C. Baier, H. Hermanns, J.-P. Katoen, V. Wolf*, Comparative branching-time semantics for Markov chains, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **2761** (2003), 492–507.
- [6] *P. Buchholz, I.V. Tarasyuk*, Net and algebraic approaches to probabilistic modeling, *Joint Novosibirsk Computing Center and Institute of Informatics Systems Bulletin, Series Computer Science* **15**, Novosibirsk (2001), 31–64, <http://www.iis.nsk.su/persons/itar/spnpancc.pdf>.
- [7] *P. Buchholz*, Markovian process algebra: composition and equivalence, *Proc. of 2<sup>nd</sup> Workshop on Process Algebras and Performance Modelling, Arbeitsberichte des IMMD* **27**, University of Erlangen, Germany (1994), 11–30.
- [8] *P. Buchholz*, Equivalence relations for stochastic automata networks, In: Stewart W.J., eds., *Computation with Markov Chains*, Kluwer, 1995, 197–216.
- [9] *P. Buchholz*, A notion of equivalence for stochastic Petri nets, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **935** (1995), 161–180.
- [10] *P. Buchholz*, Iterative decomposition and aggregation of labeled GSPNs, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **1420** (1998), 226–245.
- [11] *P. Buchholz*, Exact performance equivalence — an equivalence relation for stochastic automata, *Theoretical Computer Sci.*, **215(1/2)** (1999), 263–287.
- [12] *L.A. Cherkasova*, Posets with non-actions: a model for concurrent nondeterministic processes, *Arbeitspapiere der GMD* **403**, Germany (1989), 68.
- [13] *I. Christoff*, Testing equivalence and fully abstract models of probabilistic processes, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **458** (1990), 128–140.
- [14] *F. Cherief, F. Laroussinie, S. Pinchinat*, Modal logics with past for true concurrency, *Internal Report, LIFIA, Institut National Polytechnique, Grenoble, France*, 1992.
- [15] *R. Cleaveland, J. Parrow, B. Steffen*, The concurrency workbench: a semantics based tool for the verification of concurrent systems, *ACM Transactions on Programming Languages and Systems* **15(1)** (1993), 36–72.
- [16] *G. Florin, S. Natkin*, Les reseaux de Petri stochastiques, *Technique et Science Informatique* **4(1)** (1985), 143–160.
- [17] *M. Hennessy, R. A. J. Milner*, Algebraic laws for non-determinism and concurrency, *Journal of the ACM* **32(1)** (1985), 137–161.
- [18] *K. G. Larsen, A. Skou*, Bisimulation through probabilistic testing, *Information and Computation* **94(1)** (1991), 1–28.

- [19] *M. A. Marsan, G. Conte, G. Balbo*, A class of generalized stochastic Petri nets for performance evaluation of multiprocessor systems, *ACM Transactions on Computer Systems* **2(2)** (1984), 93–122.
- [20] *M. Majster-Cederbaum, J. Wu*, Adding action refinement to stochastic true concurrency models, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **2885** (2003), 226–245.
- [21] *M. Molloy*, Performance analysis using stochastic Petri nets, *IEEE Transactions on Computing* **31(9)** (1982), 913–917.
- [22] *M. Molloy*, Discrete time stochastic Petri nets, *IEEE Transactions on Software Engineering* **11(4)** (1985), 417–423.
- [23] *R. De Nicola, U. Montanari, F.W. Vaandrager*, Back and forth bisimulations, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **458** (1990), 152–165.
- [24] *H. S. Maciá, V. R. Valero, D. E. de Frutos*, sPBC: a Markovian extension of finite Petri box calculus, *Proc. of 9<sup>th</sup> IEEE International Workshop on Petri Nets and Performance Models - 01 (PNPM'01)*, Aachen, Germany, IEEE Computer Society Press, 2001, 207–216, <http://www.inf-ab.uclm.es/fmc/publications/2001/pnpm01.ps>.
- [25] *S. Pinchinat*, Bisimulations for the semantics of reactive systems, Ph.D. thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1993 (in French).
- [26] *L. Pomello, G. Rozenberg, C. Simone*, A survey of equivalence notions for net based systems, *Lect. Notes Comp. Sci.*, **609** (1992), 410–472.
- [27] *R. Zijal, R. German*, A new approach to discrete time stochastic Petri nets, *Lecture Notes in Control and Information Science* **199** (1994), 198–204.

Поступило 1 ноября 2004 г.

**Адреса авторов:**

ТАРАСЮК, Игорь Валерьевич,  
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск,  
просп. Академика Лаврентьева, 6,  
телефон: +7 383 330 63 60,  
e-mail: itar@iis.nsk.su,  
www:  
<http://www.iis.nsk.su/persons/itar/>

Prof. Dr. Peter BUCHHOLZ,  
GERMANY, D-44221, Dortmund,  
Department of Computer Science,  
University of Dortmund,  
e-mail: peter.buchholz@cs.uni-dortmund.de,  
www:  
<http://ls4-www.cs.uni-dortmund.de/~buchholz/>