ВЕСТНИК НОВОСИБИРСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Серия «Математика, механика, информатика»
Том VI, 2006 г. Выпуск 1. С. 70–76

УДК 510.64

Считающие модальные операторы и неподвижные точки[1]

С. И. Мардаев

Одним из естественных путей определения предиката является введение его как неподвижной точки некоторого оператора. Это — неявное определение. Если известно, что неподвижные точки определимы, т. е. выражаются через параметры, то это гарантирует существование явного определения. Зачастую неявное определение существенно короче явного. Чтобы явное определение было действительно явным нужно, чтобы существовал алгоритм построения этого определения. В этой статье мы исследуем определимость неподвижных точек в полимодальном языке считающих модальностей. Для модального случая имеется известная теорема о неподвижной точке. Мы обобщаем эту теорему на язык считающих модальностей. Отсюда нетрудно следует определимость наименьших неподвижных точек в позитивном случае. Кроме того, в качестве следствия из ранее опубликованных результатов получаем определимость наименьших неподвижных точек в моделях, основанных на натуральных числах.

Пропозициональные формулы в языке считающих модальностей составляются из пропозициональной константы $\bot$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$ с помощью бинарных логических связок $\wedge$, $\vee$, унарных связок $\neg$ и $\Box_k$ для всех натуральных k. Формулы в этом языке называем считающими модальными формулами.

Вхождение переменной или константы в формулу называется

1) *модализованным*, если это вхождение находится под действием некоторой связки вида $\Box_k$,

2) *позитивным*, если это вхождение находится под действием четного числа отрицаний (это число может быть равно нулю),

Будем использовать стандартные обозначения $\top = \neg\bot$, $\Diamond_k\alpha = \neg\Box_k\neg\alpha$.

[1]Работа поддержана РФФИ, грант № 03-06-80178, и INTAS, проект № 04-77-7080.

Шкала Крипке $\langle W, R\rangle$ состоит из непустого множества W и бинарного отношения R на W.

Отношение R называется *строгим частичным порядком*, если R иррефлексивно и транзитивно. Шкала $\langle W, R\rangle$ является шкалой *с обрывом возрастающих цепей*, если в ней не существует бесконечной последовательности $x_1, x_2, \ldots$ такой, что все x_i различны и $x_i R x_{i+1}$ для всех $i \geqslant 1$.

Модель Крипке $\langle W, R, v\rangle$ состоит из шкалы Крипке $\langle W, R\rangle$ и означивания v. При этом говорим, что модель Крипке $\langle W, R, v\rangle$ *основана* шкале Крипке $\langle W, R\rangle$. *Означивание* v — это функция, которая каждой переменной q ставит в соответствие подмножество $v(q)$ множества W. Это подмножество $v(q)$ называется *значением* переменной q. Считаем, что переменная истинна на элементах своего значения. Значение переменной q_i обозначим соответствующей прописной буквой Q_i. Функция v естественным образом продолжается на формулы: константе $\perp$ всегда соответствует пустое множество, связкам $\neg$, $\wedge$, $\vee$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение множеств. Связке $\Box_k$ соответствует следующая операция на множествах: если A — подмножество множества W, то множество $\Box_k A$ состоит из всех таких x, что выполняется условие: $l < k$, где l — это число всех таких y, что xRy и $y \notin A$. Нетрудно проверить, что множество $\Diamond_k A$ состоит из всех таких x, что выполняется условие: $l \geqslant k$, где l – это число всех таких y, что xRy и $y \in A$ (l может быть равно бесконечности). Кроме того, связки $\Diamond_0$ и $\Box_0$ тривиальны: $\Diamond_0 A$ равно всему множеству W модели для любого A, а $\Box_0 A$ всегда пусто. Заметим, что $\Box_1$ — это обычная связка $\Box$, а $\Diamond_1$ — это $\Diamond$. Поэтому будем иногда писать $\Box$ и $\Diamond$ вместо $\Box_1$ и $\Diamond_1$ соответственно. Видим, что значение формулы всегда является подмножеством множества W. Говорим, что формула *истинна* на элементе модели, если элемент принадлежит значению этой формулы. Значение формулы $\alpha(q_1, \ldots, q_n)$ обозначим через $\alpha(Q_1, \ldots, Q_n)$. Формула α *истинна* в модели $\langle W, R, v\rangle$, если α истинна на каждом элементе модели. Формула α *общезначима* на шкале $\langle W, R\rangle$ если α истинна в каждой модели $\langle W, R, v\rangle$, основанной на этой шкале. Обозначение $\alpha \sim \beta$ означает, что формулы α и β принимают одно и то же значение на некотором классе моделей, который в каждом конкретном случае будет ясен из контекста.

Пусть дана считающая формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$. Рассмотрим модель $\langle W, R, v\rangle$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной p не задано. Формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ определяет на модели $\langle W, R, v\rangle$ оператор $F_\varphi(P) = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$, который каждому множеству P сопоставляет множество $\varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Т.е. переменной p придается значение P и рассматривается значение формулы φ при этом означивании. Операторы такого вида назовем *считающими.*

Если каждое вхождение переменной p в формулу $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ модализованное, то назовем эту формулу *модализованной* по переменной p, а оператор F_φ назовем *модали-*

зованным. Если каждое вхождение переменной p в формулу $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ позитивное, то назовем эту формулу *позитивной* по p, а оператор F_φ назовем *позитивным.*

Пусть дана шкала $\langle W, R \rangle$. Рассмотрим оператор F, не обязательно формульный, который каждому подмножеству A множества W сопоставляет некоторое подмножество $F(A)$ множества W. Множество P называется *неподвижной точкой* оператора F, если выполняется $P = F(P)$. Таким образом, неподвижная точка формульного оператора F_φ является решением уравнения $P = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Если неподвижная точка P совпадает в модели со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то эта формула ω *определяет* неподвижную точку P в данной модели. Назовем эту формулу *определяющей.* Она дает явный вид решения.

Определяющая формула $\omega(q_1, \ldots, q_n)$ *сохраняет позитивность параметров*, если для любого параметра q_i выполняется следующее условие: если формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ позитивна по q_i, то и формула $\omega(q_1, \ldots, q_n)$ позитивна по q_i.

Для того, чтобы сформулировать известный результат, рассмотрим модальный язык. В нем формулы составляются из пропозициональной константы $\perp$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \ldots$ с помощью бинарных логических связок $\wedge$, $\vee$, унарных связок $\neg$ и $\Box$. Широко известна теорема о неподвижной точке, которая принадлежит К. Бернарди, Д. де Йонгу, К. Сморинскому и Дж. Самбину [2, 10, 7]. Эта теорема говорит о модальной логике **GL**. Известно, [9, 3, 6], что эта логика совпадает с множеством формул, общезначимых на всех строго частично упорядоченных шкал с обрывом возрастающих цепей. В терминах данной статьи ее можно сформулировать так:

Теорема 1 (о неподвижной точке). *Для любого модализованного оператора F_φ его неподвижная точка в любой строго частично упорядоченной модели Крипке с обрывом возрастающих цепей существует и единственна и, кроме того, существует формула ω, определяющая эту точку во всех таких моделях.*

Есть разные конструкции определяющей формулы, одна из конструкций принадлежит Дж. Самбину [8]. Она позволяет дать короткое доказательство этой теоремы [5].

Вернемся к считающим модальным формулам и обобщим теорему о неподвижной точке с модального языка на язык считающих модальностей.

Теорема 2. *Для любого считающего модализованного оператора F_φ его неподвижная точка в любой строго частично упорядоченной модели Крипке с обрывом возрастающих цепей существует и единственна и, кроме того, существует считающая формула ω, определяющая эту точку во всех таких моделях. Формула ω содержит только те связки вида $\Box_k$, которые входят в φ.*

Замечание. Из теоремы следует, что если φ из связок вида $\Box_k$ содержит только $\Box$, то есть является модальной формулой, то и ω является модальной формулой. Таким образом, эта теорема действительно обобщает теорему о неподвижной точке.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теоремы). Сначала докажем лемму.

Лемма 1. *Существует считающая формула ω со свойством: если в строго частично упорядоченной модели с обрывом возрастающих цепей неподвижная точка считающего оператора F_φ существует, то она определяется формулой ω и поэтому единственна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция определяющей формулы аналогична конструкции Самбина [8]. Представим φ в виде

$$\alpha(\Box_{k_1}\beta_1(p, q_1, \ldots, q_n), \ldots, \Box_{k_m}\beta_m(p, q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n).$$

Доказываем индукцией по m.

Базис индукции $m = 0$. Тогда φ не содержит p, поэтому неподвижная точка единственна и определяется формулой φ. Положим $\omega = \varphi$.

Шаг индукции $m \to m+1$. Пусть $\varphi = \alpha(\Box_{k_1}\beta_1, \ldots, \Box_{k_{m+1}}\beta_{m+1}, q_1, \ldots, q_n)$. Для каждого $1 \leqslant i \leqslant m+1$ введем формулу

$$\varphi_i = \alpha(\Box_{k_1}\beta_1, \ldots, \Box_{k_{i-1}}\beta_{i-1}, \top, \Box_{k_{i+1}}\beta_{i+1}, \ldots, \Box_{k_{m+1}}\beta_{m+1}, q_1, \ldots, q_n).$$

По индукционному предположению построены формулы $\omega_i(q_1, \ldots, q_n)$, определяющие неподвижные точки операторов F_{φ_i}. Пусть в модели существует неподвижная точка P оператора F_φ, возьмем ее в качестве значения переменной p. Докажем, что

$$\forall x \forall i (x \vDash \Box_{k_i}\beta_i \Leftrightarrow x \vDash \Box_{k_i}\beta_i(\omega_i, q_1, \ldots, q_n)).$$

Пусть $x \nvDash \Box_{k_i}\beta_i$. Рассмотрим множество B всех элементов $y > x$ таких, что $y \nvDash \beta_i$. В нем не менее k_i элементов. Нетрудно выбрать подмножество $K \subseteq B$ такое, что

1) K состоит из k_i элементов,

2) для любого $y \in B$ выполняется $\forall z((y < z \ \& \ z \in B) \Rightarrow z \in K)$.

Например, выберем множество K следующим образом (напомним, что в силу условия обрыва возрастающих цепей в любом подмножестве имеются максимальные элементы). Сначала рассмотрим множество M_1 всех максимальных элементов множества B. Если в нем не меньше k_i элементов, то выберем из них k_i штук. Положим, что множество K состоит из этих элементов. Если в M_1 меньше k_i элементов, то соберем все эти элементы в множество K и продолжим построение множества K. Рассмотрим множество M_2 максимальных элементов в множестве $B \setminus M_1$. Доберем в K недостающее количество элементов в множестве M_2. Если по прежнему нехватает, то рассматриваем множество M_3, строящееся аналогично, и т.д.

Рассмотрим любой элемент $y \in K$. Из него достижимо менее k_i элементов, на которых ложна β_i, поэтому для всех $z \geqslant y$ выполняется $z \vDash \Box_{k_i}\beta_i$. Поэтому замена $\Box_{k_i}\beta_i$ на $\top$ не влияет на значение формулы в подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant y\}$. В этой подмодели $P \cap \{z \mid z \geqslant y\}$ является неподвижной точкой. По индукционному предположению эта неподвижная точка определяется формулой ω_i. Поэтому замена p на ω_i не влияет на истинность формулы на y. Получаем $y \nvDash \beta_i(\omega_i, q_1, \ldots, q_n)$, отсюда $x \nvDash \Box_{k_i}\beta_i(\omega_i, q_1, \ldots, q_n)$.

Пусть $x \vDash \Box_{k_i}\beta_i$. В подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant x\}$, неподвижная точка по индукционному предположению определяется формулой ω_i. Поэтому замена p на ω_i не влияет на истинность формулы на x. Значит $x \vDash \Box_{k_i}\beta_i(\omega_i, q_1, \ldots, q_n)$.

Итак, замена $\Box_{k_i}\beta_i$ на $\Box_{k_i}\beta_i(\omega_i, q_1, \ldots, q_n)$ не влияет на значение формулы φ. Поэтому формула

$$\omega = \alpha(\Box\beta_1(\omega_1, q_1, \ldots, q_n), \ldots, \Box\beta_{m+1}(\omega_{m+1}, q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n)$$

определяет единственную неподвижную точку оператора F_φ. Лемма доказана.

Докажем, что неподвижная точка существует в любой строго частично упорядоченной модели с обрывом возрастающих цепей и наименьшим элементом. Пусть существует такая модель, в которой нет неподвижной точки. В ней среди всех элементов y таких, что в подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant y\}$, нет неподвижной точки, выберем максимальный. Для всех $z > y$ в подмодели, основанной на $\{u \mid u \geqslant z\}$, неподвижная точка существует, поэтому по лемме 1 она единственна и определима формулой ω, т.е. $z \vDash \omega \Leftrightarrow z \vDash \varphi(\omega, q_1, \ldots, q_n)$. Следовательно, ω определяет неподвижную точку P в подмодели, основанной на $\{z \mid z > y\}$. В подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant y\}$, рассмотрим множество $P' = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Ясно, что $P' \cap \{z \mid z > y\} = P$. Из-за модализованности φ по p значение φ на y не зависит от значения p на y, т.е. $y \in \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n) \Leftrightarrow y \in \varphi(P', Q_1, \ldots, Q_n)$. Получаем, что P' является неподвижной точкой в подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant y\}$. Противоречие.

Теперь рассмотрим произвольную строго частично упорядоченную модель с обрывом возрастающих цепей. Для любого x в подмодели, основанной на $\{z \mid z \geqslant x\}$, неподвижная точка существует и определяется формулой ω, т.е. $x \vDash \omega \Leftrightarrow x \vDash \varphi(\omega, q_1, \ldots, q_n)$. Поэтому, значение формулы ω является неподвижной точкой во всей модели. Теорема доказана.

Так как позитивные операторы являются монотонными, то для них выполняется хорошо известное [1] утверждение. А именно, если P – наименьшая неподвижная точка позитивного оператора F_φ, то $P = \bigcap\{A \mid F_\varphi(A) \subseteq A\}$.

Считающий позитивный случай можно свести к считающему модализованному. Рассмотрим позитивный считающий оператор F_φ. В формуле $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ заменим на $\bot$ все вхождения p, не находящиеся под действием модальных связок. Полученную формулу обозначим $\zeta(p, q_1, \ldots, q_n)$. Ясно, что оператор F_ζ – позитивный.

Предложение 1. *Наименьшие неподвижные точки операторов F_φ и F_ζ совпадают в любой модели Крипке $\langle W, R, v\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что всегда $\zeta(P, Q_1, \ldots, Q_n) \subseteq \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Пусть P — наименьшая неподвижная точка оператора F_φ. Тогда $\zeta(P, Q_1, \ldots, Q_n) \subseteq P$. Поэтому в силу предложения 1 наименьшая неподвижная точка оператора F_ζ содержится в P. Пусть теперь P' — наименьшая неподвижная точка оператора F_ζ. При обратной замене $\perp$ на P' значение формулы может увеличиться только внутри P'. Поэтому $P' = \varphi(P', Q_1, \ldots, Q_n)$. Следовательно, P' — неподвижная точка оператора F_φ и наименьшая неподвижная точка этого оператора содержится в P'. Предложение доказано.

Из теоремы 2, предложения 1 и сохранения конструкцией Самбина позитивности параметров сразу следует

Теорема 3. *Для любого позитивного считающего оператора F_φ существует сохраняющая позитивность параметров формула ω, определяющая наименьшую неподвижную точку этого оператора в любой строго частично упорядоченной модели Крипке с обрывом возрастающих цепей.*

Если условие обрыва возрастающих цепей не выполняется, то Теорема 1 о неподвижной точке также не выполняется. Тем не менее, используя результаты, полученные для модального случая можно доказать следующую теорему.

Теорема 4. *Для любого позитивного считающего оператора F_φ существует сохраняющая позитивность параметров формула ω, определяющая наименьшую неподвижную точку этого оператора в любой модели Крипке, основанной на натуральных числах $\langle N, <\rangle$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Здесь все нетрудно сводится к модальному случаю. В любой такой модели можно выразить $\Diamond_k$ через $\Diamond$ следующим образом:

$$\Diamond_k \alpha = \Diamond(\alpha \wedge \Diamond(\alpha \wedge \Diamond(\ldots(\alpha \wedge \Diamond\alpha)\ldots)))$$

(в правой части k штук $\Diamond$). Ранее [4] был доказано, что наименьшие неподвижные точки модальных позитивных операторов определимы с сохранением позитивности параметров в так называемых SE-моделях. Модели, основанные на $\langle N, <\rangle$, являются SE-моделями. Поэтому, существует сохраняющая позитивность параметров модальная формула ω.

Литература

[1] *P. Aczel*, An introduction to inductive definitions, in Handbook in Mathematical Logic, edited by J. Barwise, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 90, North-Holland Publishing Company, 1977, 739–782, перевод: *П. Ацел*, Введение в теорию индуктивных определений, в кн.: Справочная книга по математической логике, часть 3, под ред. Ю. Л. Ершова, Москва, Наука, 1982, 224–268.

[2] *C. Bernardi*, The fixed-point theorem for diagonalizable algebras, Studia Logica **34**, No. 3 (1975), 239–251.

[3] *A. Chagrov and M. Zakharyaschev*, Modal Logic, Oxford Logic Guides, vol. 35, Clarendon Press, 1997.

[4] *S. I. Mardaev*, Least Fixed Points in Modal Logic, Proceedings of International Conferences on Mathematical logic, edited by S. S. Goncharov a.o., Novosibirsk State University, Novosibirsk, 2002, 92–103.

[5] *L. Reidhaar-Olson*, A new proof of the fixed-point theorem of provability logic, Notre Dame Journal of Formal Logic **31**, No. 1 (1990), 37–43.

[6] *V. V. Rybakov*, Admissibility of Logical Inference Rules, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, vol. 136, Elsevier Science Publishers B.V., 1997.

[7] *G. Sambin*, An effective fixed-point theorem in intuitionistic diagonalizable algebras, Studia Logica **35**, No. 4 (1976), 345–361.

[8] *G. Sambin, S. Valentini*, The modal logic of provability: The sequential approach, J. of Philosophical Logic **11**, No. 3 (1982), 311–342.

[9] *K. Segerberg*, An Essay in Classical Modal Logic, Filosofiska Studier, No. 13, Uppsala Universitet, Uppsala, 1971.

[10] *C. Smoryński*, Consistency and related metamathematical properties, Univ. of Amsterdam, Mathematics Institute Technical Report 75–02, 1975.

Поступило 2 ноября 2005 г.

Адрес автора:

МАРДАЕВ Сергей Ильич,

РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск,

просп. Академика Коптюга, 4

Институт математики СО РАН,

e-mail: mardaev@math.nsc.ru