УДК 517.518.15+517.518.17+517.518.23+517.987.1

М. Б. Карманова

МЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА РАДЕМАХЕРА И ФОРМУЛА ПЛОЩАДИ ДЛЯ ЛИПШИЦЕВЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В МЕТРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ*

Мы приводим новое доказательство метрического аналога теоремы Радемахера и формулы площади для отображений, принимающих значения в метрическом пространстве.

Работа посвящена основам геометрической теории меры на метрических пространствах. Известно, что многие важные результаты геометрической теории меры в $\mathbb{R}^n$ основаны на дифференциальных свойствах отображений. Если же отображение принимает значения в метрическом пространстве, в котором может не быть линейной структуры, то дифференциальные свойства нельзя интерпретировать в классических терминах. Адекватная характеристика локального поведения отображений из $\mathbb{R}^n$ в метрическое пространство $\mathbb{X}$ введена Б. Кирхаймом в работе [3] и называется метрической дифференцируемостью.

Определение 1 [3]. *Пусть E — подмножество $\mathbb{R}^n$, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство. Отображение $f : E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ метрически дифференцируемо, или m-дифференцируемо, в точке $x \in E$, если существует такая полунорма L на $\mathbb{R}^n$, что выполняется соотношение*

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - L(x)(z - y) = o(|z - x| + |y - x|) \tag{1}$$

при $z, y \to x$, $z, y \in E$. Полунорма $L(x)$ называется метрическим дифференциалом, или m-дифференциалом, отображения f в точке x и обозначается символом $MD(f, x)$.

В работе [3] доказано, что липшицевы отображения, действующие из открытого множества евклидова пространства в метрическое, дифференцируемы в «метрическом» смысле почти всюду, и «метрический дифференциал» отображения характеризует локальное искажение меры. Результат о дифференцируемости будем называть метрической теоремой Радемахера (m-теоремой Радемахера). Случай, когда отображение определено на произвольном измеримом множестве евклидова пространства, в [3] сведен к случаю открытого множества изометрическим вложением метрического пространства в банахово. В данной работе приводится новое, «прямое» доказательство этих результатов, не использующее изометрических вложений. В доказательстве формулы площади используются методы, разработанные в [7]. Заметим, что «прямые» методы оказываются полезными в неголономной геометрии [6, 8].

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант 05-01-00482) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (грант НШ 8526.2006.1).

Класс липшицевых отображений, определенных на множестве $E \subset \mathbb{R}^n$ и принимающих значения в $\mathbb{X}$, будем обозначать $\mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$.

Теорема 1 (m-теорема Радемахера). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда f m-дифференцируемо почти всюду на E.*

Теорема 1 обобщает классическую теорему Радемахера о дифференцируемости почти всюду липшицевых отображений.

Работа состоит из двух параграфов.

В § 1 доказываются различные утверждения для липшицева отображения f, определенного на измеримом множестве $E \subset \mathbb{R}^n$, со значениями в метрическом пространстве $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$:

1) существование почти всюду предела

$$\lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ \alpha<0<\beta\\ x+\alpha u, x+\beta u\in E}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+\beta u), f(x+\alpha u))}{|\alpha-\beta|} \stackrel{\mathrm{def}}{=} MD(f,x)(u); \tag{2}$$

2) для всякого ограниченного множества $E' \subset E$ и любого $\varepsilon > 0$ доказано существование компакта $K \subset E'$, $|E' \setminus K| < \varepsilon$, на котором для липшицева отображения f справедлива следующая оценка:

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f,x)(z-y) = o(|z-y|), \quad x \in K,$$

при $z, y \to x$, $y \in K$, $z \in E$, где $o(\cdot)$ равномерно на K;

3) приведено *новое* доказательство m-теоремы Радемахера; доказаны измеримость и однородность m-дифференциала.

Отметим, что существование предела (2), однородность m-дифференциала, m-теорема Радемахера и формула площади для липшицевых отображений со значениями в метрическом пространстве другим способом доказаны в [3].

В § 2 мы получаем формулу площади для отображений, удовлетворяющих условию Липшица. Мы приводим *новое* доказательство формулы площади для липшицевых отображений. Оно базируется на доказываемых в § 1 леммах о том, что

1) $d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) - MD(f,x)(y-z) = o(MD(f,x)(y-z))$ при некоторых условиях на липшицево отображение f во всех точках $x, z \in E \setminus \Sigma$, где $|\Sigma| = 0$, для $y, z \in Q(x,r) \cap E$;

2) $\mathcal{H}^n(f(Z)) = 0$, где $Z = \{x \in E : \exists u_0 \in \mathbb{S}^{n-1} : MD(f,x)(u_0) = 0\}$.

Здесь и далее в статье символом $\mathcal{H}^n$ обозначена n-мерная мера Хаусдорфа:

$$\mathcal{H}^n(A) = \lim_{\delta\to 0} \frac{\omega_n}{2^n} \inf\Big\{\sum_{i\in\mathbb{N}} (\operatorname{diam} E_i)^n : \operatorname{diam} E_i < \delta, A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i\Big\},$$

где $A \subset \mathbb{X}$, $\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$, а нижняя грань берется по всем счетным покрытиям множества A.

Автор выражает благодарность профессору С. К. Водопьянову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и неоценимую помощь в реализации различных возможностей, возникших в ходе решения задачи.

§ 1. Метрический дифференциал и его свойства

Для получения теорем 4 и 1 докажем несколько вспомогательных утверждений. Напомним, что в силу замечания 1 можно рассматривать замкнутое множество $E \subset \mathbb{R}^n$.

Замечание 1. В доказательстве ряда вспомогательных лемм и теорем о m-дифференцируемости (см. § 1, 2) для продолжения f на замыкание $\overline{E}$ его области определения удобно рассматривать полное метрическое пространство $\mathbb{X}$. Известно, что для неполного метрического пространства $\mathbb{X}$ существует единственное с точностью до изометрии, оставляющей неподвижными точки из $\mathbb{X}$, пополнение $\overline{\mathbb{X}}$. Следовательно, теорема 1 верна для отображения $\overline{f} : \overline{E} \to \overline{\mathbb{X}}$, где $\overline{f}$ — продолжение f на замыкание $\overline{E}$. Для получения соответствующего результата для $f : E \to \mathbb{X}$ достаточно в соотношении (1) рассматривать $x, y, z \in E$. Поэтому в данной работе, если специально не оговорено, $\mathbb{X}$ — произвольное метрическое пространство.

Также, без ограничения общности, в доказательстве ряда лемм можно считать, что f определено на замкнутом множестве E.

Определение 2. Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, а $|\cdot|$ — мера Лебега на $\mathbb{R}^n$. Точка $x \in E$ называется *точкой плотности множества* E, если

$$\lim_{\substack{B_r \ni x \\ r \to 0}} \frac{|E \cap B_r|}{|B_r|} = 1, \tag{3}$$

где B_r — шар радиуса r (не обязательно с центром в точке x).

Следующие два утверждения — переформулировка результатов из [5].

Теорема 2. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, то (3) справедливо для $|\cdot|$-почти всех $x \in E$.*

Теорема 3. *Если $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, то в окрестности $U(x)$ каждой точки плотности $x \in E$ множества E для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого y из δ-окрестности точки x существует $z \in E$ такое, что $|y - z| < \varepsilon |y - x|$.*

Лемма 1. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$ — замкнутое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$, а $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Пусть еще на E определена метрика*

$$\rho(x, y) = |x - y| + d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y)),$$

и открытое множество $(\alpha, \beta) \setminus E = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} U_i$ (U_i попарно не пересекаются) покрыто такими интервалами $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, что каждый $U_i \subset V_i$, и $\sup V_i > \sup U_i$, $\inf V_i < \inf U_i$. Тогда для любого покрытия $[\alpha, \beta] \cap E$ открытыми множествами $\{E_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ выполняется соотношение:

$$\mathrm{diam}_\rho([\alpha, \beta] \cap E) \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(V_i) + \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(E_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что каждое открытое множество $E_j = \bigcup\limits_{t \in \mathbb{N}} E_{j,t}$, где $E_{j,t}$ — интервал. Обозначим элементы совокупности $\{V_i, E_{j,t}, i, j, t \in \mathbb{N}\}$ символом A_m, $m \in \mathbb{N}$. Тогда $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} A_m \supset [\alpha, \beta]$.

Так как функция $\rho(x,y)$ непрерывна, то на компакте $[\alpha,\beta]\cap E$ она принимает максимальное значение, т. е. существуют точки $a,b\in[\alpha,\beta]$ такие, что $\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)=$ $=\rho(a,b)$. Если a и b содержатся одновременно в каком-либо E_j или V_i, то неравенство доказано.

Пусть теперь $a\in E_{j1,t1}\subset E_{j1}$, $b\in E_{j2,t2}\subset E_{j2}$, $E_{j1}\neq E_{j2}$. Выберем конечную совокупность интервалов $\bigcup\limits_{l=1}^{L} C_l\supset[a,b]$, $C_1=E_{j,t1}, C_L=E_{j,t2}$. Используем выбранные интервалы для построения покрытия отрезка $[a,b]$ такого, что каждое непустое пересечение двух произвольных интервалов покрытия отрезка $[a,b]$ содержало хотя бы одну точку из E.

Вначале заметим, что $\bigcup\limits_{l=1}^{L} C_l$ можно выбрать таким образом, чтобы никакие три интервала не пересекались. Рассмотрим

$$C_l'=(\inf C_l\cap E,\sup C_l\cap E)=(c_l,d_l)\subset C_l.$$

Возможны три случая.

1. $d_l<c_{l+1}$. Следовательно, $(d_l,c_{l+1})\cap E=\emptyset$. Тогда найдется такой V_i, что $[d_l,c_{l+1}]\subset$ $\subset V_i$, и такие $d_l'>d_l$ и $c_{l+1}'<c_{l+1}$, что $D_{l1}=(c_l,d_l')\subset C_l$, $D_{l2}=(c_{l+1}',d_{l+1})\subset C_{l+1}$, и три новых интервала: D_{l1}, D_{l2}, $D_{l3}=V_i$ не пересекаются, т. е. $D_{l1}\cap D_{l2}\cap D_{l3}=\emptyset$.

2. $d_l=c_{l+1}$. Если это изолированная точка для $C_l\cap E$ и $C_{l+1}\cap E$, а следовательно, и внутренняя точка для C_l и C_{l+1} (точная нижняя (верхняя) грань достигается либо на предельной точке множества, либо на изолированной, а значит, принадлежащей множеству), то существует $\tau>0$ такое, что $C_l\cap C_{l+1}\supset[d_l-\tau,d_l+\tau]$ и $[d_l-\tau,d_l+\tau]\cap E=\{d_l\}$. Положим $D_l=(c_l,d_l+\tau)$, $D_{l+1}=(d_l-\tau,d_{l+1})$. Покажем, что d_l не может быть предельной для $C_l\cap E$ (слева) и $C_{l+1}\cap E$ (справа). Действительно, предположим, что d_l — предельная, например, для $C_l\cap E$ (слева). Так как $C_l\cap C_{l+1}$ — интервал, то легко проверить, что d_l — предельная для $C_l\cap C_{l+1}$ (слева), и C_{l+1} содержит d_l. Но тогда C_{l+1} принадлежат и некоторые точки, лежащие левее d_l, что противоречит выбору d_l.

3. $d_l>c_{l+1}$. Полагаем $D_l=C_l$, $D_{l+1}=C_{l+1}$.

Обозначим все полученные таким образом интервалы $\bigcup\limits_{q=1}^{Q} F_q$, возьмем $a_{q+1}\in F_q\cap$ $\cap F_{q+1}\cap E$ (они найдутся по построению F_q), $a_1=a$, $a_{Q+1}=b$. Заметим, что для каждого F_q существует $A_{m_q}\supset F_q$. Далее, положим $\alpha_1=a_1=a$, а каждое α_{s+1} выберем следующим образом: если $\alpha_s=a_{q(s)}\in E_{j(s)}$ или $\alpha_s=a_{q(s)}\in V_{i(s)}$, то

$$\alpha_{s+1}=\max\Big\{\max_q\{a_{q+1}:a_{q+1}\in E_{j(s)},\exists t:F_q\subset E_{j(s),t}\};a_{q(s)+1}\Big\}.$$

Тогда в силу неравенства треугольника получаем

$$\rho(a,b)\le\sum_s\rho(\alpha_s,\alpha_{s+1})\le\sum_s\operatorname{diam}_\rho(E_{j(s)})+\sum_s\operatorname{diam}_\rho(V_{i(s)})\le$$
$$\le\sum_{i\in\mathbb{N}}\operatorname{diam}_\rho(V_i)+\sum_{j\in\mathbb{N}}\operatorname{diam}_\rho(E_j).$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $E\subset\mathbb{R}$ — замкнутое множество, $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, $f\in\operatorname{Lip}(E,\mathbb{X})$, а $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$. Пусть еще на E определена метрика $\rho(x,y)=|x-y|+$*

$+ d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))$. *Тогда для всякого* $\varepsilon > 0$ *для любого ограниченного множества* $V \subset E$ *существует открытое множество* $U \supset V$ *такое, что* $\operatorname{diam}_\rho(U) \leq \operatorname{diam}_\rho(V) + \varepsilon$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что так как $V \subset E$, то $\operatorname{diam}_\rho(V) = \operatorname{diam}_\rho \overline{V}$. Для замкнутого множества $\overline{V}$ существует такое открытое множество $U \supset \overline{V}$, что $|U \setminus \overline{V}| \leq \leq \frac{\varepsilon}{4(\operatorname{Lip}(f)+1)} = \delta$, при этом U можно выбрать таким образом, что пересечение каждого его интервала с $\overline{V}$ непусто. Рассмотрим множество пар точек $(a, b) \in \overline{V} \times \overline{V}$ таких, что $\operatorname{diam}_\rho(V) \geq \rho(a, b) \geq \operatorname{diam}_\rho(V) - 2\delta$. Тогда в δ-окрестностях этих пар значение функции ρ может измениться не более, чем на ε. При этом из построения U следует, что любая точка $z \in U$ содержится в δ-окрестности некоторой точки $x \in \overline{V}$. Следовательно,

$$\operatorname{diam}_\rho(U) = \sup_{a,b \in U \cap E} \rho(a, b) \leq \operatorname{diam}(\overline{V}) + \varepsilon.$$

Лемма 3. *Пусть* $E \subset \mathbb{R}$ *— замкнутое множество,* $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ *— метрическое пространство,* $f \in \operatorname{Lip}(E, \mathbb{X})$, *а* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. *Пусть еще на* E *определена метрика* $\rho(x, y) = |x - y| + + d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))$. *Тогда для точек плотности* $x \in E$ *справедливо следующее равенство:*

$$\lim_{|\alpha-\beta| \to 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha, \beta) \cap E)}{\operatorname{diam}_\rho((\alpha, \beta) \cap E)} : x \in (\alpha, \beta) \cap E \right\} = 1. \tag{4}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем вначале, что

$$\varliminf_{|\alpha-\beta| \to 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha, \beta) \cap E)}{\operatorname{diam}_\rho((\alpha, \beta) \cap E)} : x \in (\alpha, \beta) \cap E \right\} \geq 1. \tag{5}$$

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и точку плотности $x \in E$. Тогда существует $0 < \delta < \varepsilon$ такое, что

$$\frac{|\langle \alpha, \beta \rangle \cap E|}{|\langle \alpha, \beta \rangle|} > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \tag{6}$$

для всех промежутков $\langle \alpha, \beta \rangle \ni x$ таких, что $|\alpha - \beta| < \delta$. Отсюда

$$|\langle \alpha, \beta \rangle \setminus E| = |\langle \alpha, \beta \rangle| - |\langle \alpha, \beta \rangle \cap E| < \frac{\varepsilon}{4} |\alpha - \beta|.$$

Так как множество $[\alpha, \beta] \setminus E$ измеримо, то для него существует открытое множество $\bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} V_i \supset ([\alpha, \beta] \setminus E)$ с мерой меньше $\frac{\varepsilon|\alpha-\beta|}{2}$, которое представимо в виде счетной совокупности интервалов $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Для каждого множества $V_i = (v_{i,1}, v_{i,2})$ возьмем интервал $V'_i = (v'_{i,1}, v'_{i,2}) \supset V_i$ такой, что $|v'_{i,1} - v_{i,1}| = |v'_{i,2} - v_{i,2}| = \frac{\varepsilon|\alpha-\beta|}{2^{i+2}}$. Тогда в каждом V'_i найдутся хотя бы две точки из области определения функции f, и сумма их диаметров относительно метрики ρ не будет превосходить $\varepsilon|\alpha - \beta|(\operatorname{Lip}(f) + 1)$.

Из леммы 2 следует, что для всякого счетного покрытия $[\alpha, \beta] \cap E$ множествами $\{E_i\}$ такими, что $\operatorname{diam}(E_i) \leq \sigma$ для некоторого $\sigma > 0$, существует счетное покрытие открытыми множествами $\{U_i \supset E_i\}$ такими, что $\operatorname{diam}_\rho(U_i) \leq \operatorname{diam}_\rho(E_i) + \frac{\sigma}{2^i}$. Тогда по лемме 1 имеем

$$\begin{aligned} &\operatorname{diam}_\rho((\alpha, \beta) \cap E) \leq \operatorname{diam}_\rho([\alpha, \beta] \cap E) \leq \\ &\qquad\qquad \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}_\rho(V'_i) + \sum_{(\alpha,\beta) \cap E \subset \bigcup E_i} \operatorname{diam}_\rho(U_i) \leq \end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon|\alpha-\beta|(\mathrm{Lip}(f)+1)+\sum_{(\alpha,\beta)\cap E\subset\bigcup E_i}\mathrm{diam}_\rho(E_i)+\sigma. \quad (7)$$

Переходя к точной нижней грани по покрытиям множествами E_i и устремляя σ к 0, имеем

$$\mathrm{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)\leq \varepsilon|\alpha-\beta|(\mathrm{Lip}(f)+1)+\mathcal{H}^1_\rho((\alpha,\beta)\cap E). \quad (8)$$

Заметим, что $\mathrm{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)\geq(1-\varepsilon)|\alpha-\beta|$. Следовательно,

$$1\leq\frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}{\mathrm{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}+\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}(\mathrm{Lip}(f)+1).$$

Так как данное неравенство справедливо для всех интервалов $(\alpha,\beta)\ni x$, то, переходя к нижнему пределу при $\varepsilon\to0$, получаем (5).

Далее, покажем, что для почти всех $x\in E$

$$\varlimsup_{|\alpha-\beta|\to0}\left\{\frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}{\mathrm{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}:x\in(\alpha,\beta)\cap E\right\}\leq1. \quad (9)$$

Для произвольного $K<\infty$ определим $E_0=(-K,K)\cap E\subset E$. Тогда все точки плотности множества E, лежащие в E_0, являются точками плотности E_0.

Заметим, что так как $\mathcal{H}^1_{|\cdot|}(E_0)<\infty$, то и $\mathcal{H}^1_\rho(E_0)<\infty$. Действительно, это следует из того, что $\mathrm{diam}_\rho(A)\leq(\mathrm{Lip}(f)+1)\,\mathrm{diam}_{|\cdot|}(A)$ для всякого множества A, поэтому $\mathcal{H}^1_\rho(A)\leq$ $\leq(\mathrm{Lip}(f)+1)\mathcal{H}^1_{|\cdot|}(A)$.

Обозначим символом S_ε подмножество E_0, в точках которого верхний предел (9) больше $1+\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon>0$. Отметим, что из определения верхнего предела вытекает, что S_ε открыто в индуцированной на E_0 топологии и, следовательно, измеримо. Предположим, множество S_ε имеет положительную меру.

По определению, для всех $x\in S_\varepsilon$ существует система интервалов $\mathcal{A}_x=\{(\alpha_{n,x},\beta_{n,x})\}$, $|\alpha_{n,x}-\beta_{n,x}|\to0$ при $n\to\infty$, для элементов которой

$$\frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha_{n,x},\beta_{n,x})\cap E)}{\mathrm{diam}_\rho((\alpha_{n,x},\beta_{n,x})\cap E)}>1+\varepsilon.$$

Будем рассматривать такие $x\in E_0$, которые являются точками плотности E. Поэтому можно считать, что для всех x существует $\delta_x\leq\delta$ такое, что при $|\alpha_{n,x}-\beta_{n,x}|\leq\delta_x$ выполняется неравенство (6) для $0<\tilde\varepsilon<\frac14$. Тогда $\mathrm{diam}_\rho(\alpha_{n,x},\beta_{n,x})\geq(1-\tilde\varepsilon)|\alpha_{n,x}-\beta_{n,x}|>$ $>\frac34|\alpha_{n,x}-\beta_{n,x}|$.

Фиксируем $0<\delta<\frac{|S_\varepsilon|}{2}$. Из теоремы Витали следует, что для $\delta>0$ существует конечная дизъюнктная система интервалов $\{\Delta_n\}_1^N$ ($\Delta_n\in\mathcal{A}_x$, $x\in S_\varepsilon$, $\mathrm{diam}(\Delta_n)<\delta$), покрывающая S_ε за исключением множества меры δ. Для каждого Δ_n справедлива оценка

$$\mathcal{H}^1_\rho(\Delta_n\cap E)>(1+\varepsilon)\,\mathrm{diam}_\rho(\Delta_n\cap E)\geq\mathrm{diam}_\rho(\Delta_n\cap E)+\frac34\varepsilon|\Delta_n|,$$

из которой получаем

$$\sum_{n=1}^N\mathcal{H}^1_\rho(\Delta_n\cap E)>\sum_{n=1}^N\mathrm{diam}_\rho(\Delta_n\cap E)+\varepsilon(\frac34|S_\varepsilon|-\delta). \quad (10)$$

Возьмем $M > \frac{8K(\mathrm{Lip}(f)+1)}{|S_\varepsilon|}$. Заметим, что по доказанному выше во всех точках плотности y множества $E_1 = E_0 \setminus \bigcup\limits_{n=1}^{N} \Delta_n$ при достаточно малых длинах интервалов $(\alpha, \beta) \ni y$ (можно считать, что $|\alpha - \beta| < \delta$ и $\alpha, \beta \in E_0$) имеем

$$\frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}{\mathrm{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)} > 1 - \frac{\varepsilon}{M}.$$

Такие интервалы покрывают E_1 в смысле Витали. Выберем из него такую не более чем счетную систему $\{P_k\} \subset (-K, K)$, что $|E_1 \setminus \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} P_k| = 0$, и из каждого P_k удалим точки, принадлежащие $\{\Delta_n\}_1^N$. Система $\{T_l\}$, полученная таким образом из $\{P_k\}$, также является не более чем счетной системой интервалов. Заметим, что

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(T_l \cap E) \leq (\mathrm{Lip}(f)+1) \sum_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_{|\cdot|}(T_l \cap E) \leq 2K(\mathrm{Lip}(f)+1).$$

Поэтому для набора $\{T_l\}$ существует оценка, аналогичная (10):

$$\sum_{l\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^1_\rho(T_l \cap E) > \sum_{l\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(T_l \cap E) - \frac{2K\varepsilon}{M}(\mathrm{Lip}(f)+1). \tag{11}$$

Обозначим $\{\Delta_n, T_l\} = \{S_m\}$. Складывая (10) и (11) и используя монотонность меры $\mathcal{H}^1_\rho$ и дизъюнктность $\{S_m\}$, получаем

$$\mathcal{H}^1_\rho(E_0) \geq \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^1_\rho(S_m \cap E) > \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(S_m \cap E) + \frac{\varepsilon(|S_\varepsilon| - 2\delta)}{2}. \tag{12}$$

Множество E_0 покрыто дизъюнктной системой интервалов $\{S_m\}$, диаметр которых не превосходит δ, за исключением множества меры 0. Покроем оставшееся множество $E_0 \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} S_m$ не более чем счетной системой интервалов $\{U_j\}$, сумма мер которых меньше δ, таким образом, что в каждом из них найдутся хотя бы две точки из области определения f (см. доказательство леммы 3). Тогда сумма их диаметров относительно метрики ρ не превосходит $\delta(\mathrm{Lip}(f)+1)$. Заметим, что множества $\{S_m, U_j, m, j \in \mathbb{N}\}$ покрывают E_0. Тогда

$$\lim_{\delta\to 0} \sum_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(S_m) = \lim_{\delta\to 0}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(S_m) + \delta(\mathrm{Lip}(f)+1)\Big) \geq$$
$$\geq \lim_{\delta\to 0}\Big(\sum_{m\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(S_m) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \mathrm{diam}_\rho(U_j)\Big) \geq \mathcal{H}^1_\rho(E_0).$$

Переходя к пределу при $\delta \to 0$, из (12) имеем $\mathcal{H}^1_\rho(E_0) \geq \mathcal{H}^1_\rho(E_0) + \frac{\varepsilon|S_\varepsilon|}{2}$. Полученное противоречие показывает, что соотношение (9) справедливо для почти всех $x \in E$.

Заметим, что соотношение (4) остается верным и в случае, когда интервалы (α, β) заменены на отрезки $[\alpha, \beta]$.

Лемма 4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}$, $(\mathbb{X}, d_\mathbb{X})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда для почти всех $x \in E$ существует предел*

$$\lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ x+\alpha, x+\beta\in E,\ \alpha<0<\beta}} \frac{d_\mathbb{X}(f(x+\beta), f(x+\alpha))}{|\alpha - \beta|} \stackrel{\mathrm{def}}{=} MD(f, x). \tag{13}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать, что E замкнуто, так как f продолжается по непрерывности на замыкание $\overline{E}$. Рассмотрим определенную ранее на E метрику

$$\rho(x,y) = |x-y| + d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y)).$$

Заметим, что так как множество E измеримо, то по теореме 2 почти все точки $x \in E$ являются точками плотности. Следовательно, по лемме 3 для почти всех x справедливо равенство

$$\lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \left\{ \frac{\mathcal{H}^1_\rho((\alpha,\beta)\cap E)}{\operatorname{diam}_\rho((\alpha,\beta)\cap E)} : x \in (\alpha,\beta)\cap E \right\} = 1. \tag{14}$$

Рассмотрим функцию множества $\Phi((\alpha,\beta)) = \mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)$, определенную на интервалах. Из свойств меры $\mathcal{H}^1_\rho$ следует, что такая функция квазиаддитивна, т. е. для нее выполняются следующие соотношения:

1) для всякой точки $x \in \mathbb{R}$ существует δ такое, что $0 \le \Phi(Q(x,\delta)) < \infty$;

2) для всякого конечного дизъюнктного набора интервалов $\{U_i\}$ таких, что $U_i \subset U$, $i = 1, \dots, n$, где U — интервал, справедливо неравенство $\sum\limits_{i=1}^{n} \Phi(U_i) \le \Phi(U)$.

Поэтому [7] для почти всех $x \in E$ существует предел

$$\Phi'(x) = \lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ (\alpha,\beta)\ni x}} \frac{\Phi((\alpha,\beta))}{|\alpha-\beta|} = \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)}{|\alpha-\beta|} \in [1,\infty). \tag{15}$$

Покажем, что если для ρ выполняются (14) и (15), то существует предел

$$\lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ (\alpha,\beta)\ni x}} \frac{\rho(\alpha,\beta)}{|\alpha-\beta|} = \Phi'(x).$$

Для всех $\alpha, \beta \in E$ таких, что $(\alpha,\beta) \ni x$, имеем $a(\alpha,\beta) = a < b(\alpha,\beta) = b \in [\alpha,\beta]\cap E$, где a и b таковы, что $\rho(a,b) = \operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)$ (напомним, что считаем множество E замкнутым). Отсюда и из (8) получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E) &= \mathcal{H}^1_\rho([\alpha,a]\cap E) + \mathcal{H}^1_\rho([a,b]\cap E) + \mathcal{H}^1_\rho([b,\beta]\cap E) \ge \\ &\ge \rho(a,b) + \rho(\alpha,a) + \rho(b,\beta) + o(|\alpha-\beta|) \ge \\ &\ge \operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E) + (\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E) - \rho(\alpha,\beta)) + o(|\alpha-\beta|). \end{aligned}$$

Далее, из $\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E) \ge |\alpha-\beta|$ и (14) следует

$$1 = \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)}{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} \ge \varlimsup_{|\alpha-\beta|\to 0} \Big(1 + \Big|\frac{\rho(\alpha,\beta)}{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} - 1\Big|\Big).$$

Таким образом,

$$\lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} = \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)}{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\rho(\alpha,\beta)}{|\alpha-\beta|} = \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\rho(\alpha,\beta)}{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} \times$$

$$\times \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\operatorname{diam}_\rho([\alpha,\beta]\cap E)}{\mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)} \times \lim_{|\alpha-\beta|\to 0} \frac{\mathcal{H}^1_\rho([\alpha,\beta]\cap E)}{|\alpha-\beta|} = \Phi'(x).$$

Тогда

$$MD(f,x) = \lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ \alpha,\beta\in E, \alpha<0<\beta}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+\beta), f(x+\alpha))}{|\alpha-\beta|} = \Phi'(x) - 1.$$

Следствие 1. *Полагая $\alpha = -r^2$, $\beta = r - r^2$, для любого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ для почти всех $x \in E$ получим существование предела*

$$\lim_{\substack{r\to 0\\ x+ru\in E}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+ru), f(x))}{r} = MD_+(f,x)(u). \tag{16}$$

Аналогично определим $MD_-(f,x)(u)$, полагая $\alpha = r^2 - r$ и $\beta = r^2$. Заметим, что из существования предела (16) в точке $x \in E$ не следует существование предела (13).

Следствие 2. *Для всех $\lambda \in \mathbb{R}$*

$$MD(f,x)(\lambda u) = |\lambda| MD(f,x)(u).$$

Лемма 5. *Для каждого фиксированного $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ функции $MD_\pm(f,x)(u)$ представимы в виде предела сходящейся почти всюду последовательности измеримых функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим случай $MD_+(f,x)(u)$ (случай $MD_-(f,x)(u)$ доказывается аналогично). Будем считать, что множество E замкнуто. Для всяких $n \in \mathbb{N}$, точек линейной плотности $x \in E$ в направлении u и $r \in [\frac{1}{n} - \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{n} + \frac{2}{\alpha}]$ имеем

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru)) - n d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru))\Big| \le \\
&\qquad \le \Big|\frac{n\alpha}{\alpha - 2n} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru)) - n d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru))\Big| = \\
&\qquad\qquad = \frac{2n^2}{\alpha - 2n} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru)) \le \frac{n(\alpha+2n) 2 \operatorname{Lip}(f)}{\alpha(\alpha - 2n)},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\alpha} = \max\Big\{ &\inf_E \Big\{ |y - (x + \frac{u}{n})| : y \in E \cap x + \mathbb{R}^+ u \Big\}, \\
&\inf_E \Big\{ |y - (x + \frac{u}{n})| : y \in E \cap x + \mathbb{R}^- u \Big\} \Big\} = o\Big(\frac{1}{n}\Big),
\end{aligned}$$

так как x — точка линейной плотности множества E в направлении u. Таким образом,

$$\Big|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru)) - n d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru))\Big| = o(1),$$

причем $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $MD_+(f,x)(u)$ можно представить как

$$MD_+(f,x)(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x),$$

где

$$\Phi_n(x) = \sup_{r \in [\frac{1}{n} - \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{n} + \frac{2}{\alpha}]} n d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+ru)).$$

Рассмотрим функцию $h(x,y) = d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y))$. Покажем, что эта функция липшицева на E^2. Действительно,

$$|h(x,y) - h(w,z)| = \Big| d_{\mathbb{X}}(f(x), f(y)) - d_{\mathbb{X}}(f(w), f(z)) \Big| \le$$
$$\le d_{\mathbb{X}}(f(x), f(w)) + d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) \le \mathrm{Lip}(f)(|x-w| + |y-z|).$$

Поэтому ее можно продолжить на все $\mathbb{R}^{n^2}$. Обозначим это продолжение как $g(x,y)$. Используя теорему 3, нетрудно проверить, что для точки плотности $x \in E$ и $y, z, t \in \in U_\delta(x)$ справедливы следующие соотношения:

1) $g(y,z) \le g(y,t) + g(t,z) + o(\delta)$;

2) $g(y,z) \le \mathrm{Lip}(f)|y-z| + o(\delta)$.

Рассмотрим теперь функцию

$$\Psi_n(x) = \sup_{r \in [\frac{1}{n} - \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{n} + \frac{2}{\alpha}]} n g(x, x+ru)$$

и докажем, что множества

$$E_{\Psi,a} = \{x \in \mathbb{R}^n : \Psi_n(x) \ge a\}$$

замкнуты для всякого $a \in \mathbb{R}$. Пусть последовательность $E_{\Psi,a} \ni \{x_k\} \to x$ и $\Psi_n(x) = = ng(x, x + r_x u)$. Фиксируем $\delta > 0$. Возьмем такое x_k, что $|x - x_k| < \frac{\delta}{n}$. Пусть $\Psi_n(x_k) = = ng(x_k, x_k + r_k u)$. Следовательно,

$$a \le \Psi_n(x_k) \le n(g(x, x_k) + g(x_k + r_k u, x + r_k u) + o\Big(\frac{\delta}{n}\Big) +$$
$$+ g(x, x + r_k u)) \le 2\delta \,\mathrm{Lip}(f) + o(\delta) + \Psi_n(x).$$

Так как $\delta \to 0$ при $k \to \infty$, то $\Psi_n(x) \ge a$, т.е. множество $E_{\Psi,a}$ замкнуто, откуда следует измеримость функции $\Psi_n(x)$.

Заметим, что
$$|\Psi_n(x) - \Phi_n(x)| \le n \,\mathrm{Lip}(f) \cdot o\Big(\frac{1}{n}\Big) = o(1)$$
для почти всех $x \in E$, $o(1) \to 0$ при $n \to \infty$, т.е.

$$MD_+(f,x)(u) = \lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \Psi_n(x),$$

где каждая функция Ψ_n измерима. Следовательно, $MD_+(f,x)(\cdot)$ измерима на E.

Следствие 3. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Пусть еще $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ — произвольный единичный вектор. Тогда для почти всех $x \in E$ существует предел*

$$\lim_{\substack{|\alpha-\beta|\to 0\\ \alpha<0<\beta\\ x+\alpha u, x+\beta u \in E}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+\beta u), f(x+\alpha u))}{|\alpha - \beta|} \stackrel{\text{def}}{=} MD(f,x)(u). \tag{17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что в лемме 5 справедливо равенство

$$\Phi_n(x) = \sup_{r \in [\frac{1}{n} - \frac{2}{\alpha}, \frac{1}{n} + \frac{2}{\alpha}]} n\big(g(x, x+ru)|_{E^2}\big),$$

следовательно, Φ_n измерима для каждого $n \in \mathbb{N}$. Тогда множества $\{x \in E : \exists\, MD\pm(f,x)(u)\} \stackrel{\text{def}}{=} D\pm(u)$ измеримы. Так как $\mathcal{D}_u = \{x \in E : \exists\,(17)\} = \{x \in D_+(u) \cap \cap D_-(u) : MD_+(f,x)(u) = MD_-(f,x)(u)\}$, то и $\mathcal{D}_u$ измеримо. Далее, в силу леммы 4, для всех $y \in \mathbb{R}^n$ пересечение измеримого множества $E \setminus \mathcal{D}_u$, где данный предел не существует, с линией $y + \mathbb{R} \cdot u$ имеет нулевую 1-мерную меру Лебега. Тогда, по [1], n-мерная мера Лебега самого множества $E \setminus \mathcal{D}_u$ равна нулю, т. е. предел (17) существует для почти всех $x \in E$.

Теорема 4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда для любого ограниченного измеримого подмножества $E' \subset E$ и для всякого $\varepsilon > 0$ существует компакт $K \subset E'$ такой, что $|E' \setminus K| < \varepsilon$ и справедливо*

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f,x)(z-y) = o(|z-y|), \tag{18}$$

где $x, z \in K$ и $y \in E$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что E замкнуто. Пусть множество $\{u_m\}_{m=1}^{\infty}$ плотно на $\mathbb{S}^{n-1}$. Согласно следствию 3, для каждого $m \geq 1$ мера множества $E_m^0 \subset E$, на котором $MD(f,x)(u_m)$ не существует, равна нулю. Тогда объединение $\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0$ тоже имеет нулевую меру.

Рассмотрим ограниченное измеримое множество $E_{0,N} \subset B(0,N) \cap \Bigl(E \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0\Bigr)$. По теореме Егорова для всяких $\tilde{\varepsilon} > 0$ и $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ существует компакт $K \subset E_{0,N}$ такой, что мера $|E_{0,N} \setminus K| < \tilde{\varepsilon}$, на котором предел (17) равномерен по x для каждого $u \in \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$, а функция $MD(f,x)(u)$ непрерывна по x для $u \in \{u_m\}_{m=1}^{\infty}$. Следовательно, для любых $\varepsilon > 0$ и $m \geq 1$ найдется такое $r(\varepsilon, m) > 0$, что

$$\Bigl|\frac{1}{|\alpha - \beta|} d_{\mathbb{X}}(f(x + \alpha u), f(x + \beta u)) - MD(f,x)(u)\Bigr| \leq \varepsilon, \tag{19}$$

в частности,

$$\Bigl|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x + ru)) - MD(f,x)(u)\Bigr| \leq \varepsilon \tag{20}$$

на $K \times \{u_k\}_{k=1}^{m}$ при $|\alpha - \beta|, r \in (0, r(\varepsilon, m))$, где $x \in K$.

Докажем, что $MD(f,x)(u) \in \mathrm{Lip}((\mathbb{S}^{n-1}) \cap E)$ для всех $x \in E \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0$. Действительно, для всяких $u, v \in \mathbb{S}^{n-1}$ и точек $x \in E \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0$, которые являются точками линейной плотности E по данным направлениям, существуют r, r_1 такие, что $x + ru \in E$, $x + r_1 v \in E$, $|r - r_1| = o(r)$ (см. теорему 3). Тогда справедливо следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
&|MD(f,x)(u) - MD(f,x)(v)| \leq \\
&\qquad \leq \Bigl|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x + ru)) - MD(f,x)(u)\Bigr| + \\
&\qquad\qquad + \Bigl|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x + r_1 v)) - MD(f,x)(v)\Bigr| + \\
&\qquad\qquad + \Bigl|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x + ru)) - \frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x + r_1 v))\Bigr| \leq \\
&\qquad\qquad\qquad \leq \delta(r) + \mathrm{Lip}(f)|u - v|,
\end{aligned} \tag{21}$$

где $\delta(r) \to 0$ при $r \to 0$ (см. следствие 1.2). Тогда $MD(f,x)(u)$, как липшицеву функцию, можно продолжить на все множество $\mathbb{S}^{n-1}$, причем единственным образом. Действительно, пусть $x \in E \setminus \bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}} E_m^0$ и $\mathbb{S}' = \{u \in \mathbb{S}^{n-1} : \exists MD(f,x)(u)\}$. Так как $\{u_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{S}'$, то функция $MD(f,x)(u)$ единственным образом продолжается на замыкание $\overline{\mathbb{S}'} = \mathbb{S}^{n-1}$. Заметим, что при этом в точке x определены значения $MD(f,x)(u)$ для всех $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Покажем, что при этом непрерывность по x при $x \in K$ сохранится: действительно, пусть $MD(f,x)(u)$ доопределен в точке $x \in K$ на направлении $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Для некоторого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим такое $v \in \{u_k\}_1^m$, что $\operatorname{dist}(u, \{u_k\}_1^m) = |u-v|$. Тогда для каждого фиксированного $\varepsilon_0 > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любого $y \in B(x,\delta) \cap K$, для которого определен $MD(f,y)(u)$, имеем

$$\begin{aligned}|MD(f,x)(u) - MD(f,y)(u)| \le{}& \\ \le |MD(f,x)(u) - MD(f,x)(v)| &+ |MD(f,x)(v) - MD(f,y)(v)| + \\ &+ |MD(f,y)(v) - MD(f,y)(u)| \le 2\operatorname{Lip}(f)|u-v| + \varepsilon_\delta < \varepsilon_0,\end{aligned}$$

где $|u-v| \to 0$ при $m \to \infty$. Таким образом, функция $MD(f,\cdot)(u)$ остается непрерывной в точке $x \in K$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$. Из (20) следует, что существуют $m < \infty$ и $\delta_1 > 0$ такие, что $\operatorname{dist}\{u, \{u_k\}_1^m\} < \varepsilon$ для любого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ и

$$\Big|\frac{1}{r} d_{\mathbb{X}}(f(x), f(x+rv)) - MD(f,x)(v)\Big| \le \varepsilon$$

при $r < \delta_1$, $v \in \{u_k\}_1^m$, $x \in K$. Далее, так как $MD(f,x)(u)$ (равномерно) непрерывен на K, то для фиксированного выше $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta_0 > 0$, что

$$|MD(f,x)(v) - MD(f,y)(v)| < \varepsilon$$

при $x, y \in K$, $|x-y| < \delta_0$, $v \in \{u_k\}_1^m$. Положим $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\delta_1}{2}\}$. Фиксируем $x_0 \in K$, $z \in B(x_0,\delta) \cap K$ и $y \in B(x_0,\delta) \cap E$. Возьмем вектор $u_0 \in \{u_k\}_1^m$, для которого справедливо

$$\Big|\frac{y-z}{|y-z|} - u_0\Big| < \varepsilon.$$

Следовательно,

$$|MD(f,x_0)(|y-z|u_0) - MD(f,x_0)(y-z)| < \varepsilon \operatorname{Lip}(f)|y-z| \tag{22}$$

и

$$|MD(f,x_0)(|y-z|u_0) - MD(f,z)(|y-z|u_0)| < \varepsilon|y-z|. \tag{23}$$

Заметим, что функции $f_i(x) = |\{x - \mathbb{R}^+ u_i\} \cap E \cap B(0,N)|$, $i = 1, \dots, m$, липшицевы на линиях, параллельных соответствующему направлению u_i, и измеримы на E. Действительно, положим $E_x = \{x - \mathbb{R}^+ u_i\} \cap E \cap B(0,N)$, тогда $f_i(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{E_x}(y)\,dy$ (рассматривается интеграл по одномерной мере Лебега). Тогда если функция $\chi_{E_x}(y)$ измерима, то и $f_i(x)$ измерима. Заметим, что для множества E существует счетная последовательность открытых множеств $\{G_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ такая, что $\bigcap\limits_{l\in\mathbb{N}} G_l = E \cup \Sigma$, где $|\Sigma| = 0$. Тогда для $\mathcal{H}^{n-1}$-почти всех прямых, параллельных u_i, т. е. для $\mathcal{H}^n$-почти всех x, имеем $|\{x - \mathbb{R}^+ u_i\} \cap \Sigma| = 0$. Отсюда получаем, что $\chi_{E_x}(y) = \lim\limits_{l\to\infty} \chi_{G_{lx}}(y)$ для почти всех x и для почти всех y, где $\chi_{G_{lx}}(y) = \chi_{\{x - \mathbb{R}^+ u_i\} \cap G_l \cap B(0,N)}(y)$.

Следовательно, для почти всех x имеем $f_i(x) = \lim\limits_{l\to\infty} g_{i,l}(x)$, где $g_{i,l}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \chi_{G_{lx}}(y)\,dy$. Так как G_l открыты, то легко показать, что отображения $g_{i,l}(x)$ полунепрерывны и, следовательно, измеримы (достаточно рассмотреть множество G_{lx}, и покрыть его с точностью до множества сколь угодно малой меры объединением конечного числа отрезков). Тогда каждая из функций $f_i(x)$ измерима.

Отсюда получаем, что $MD(f_i, x)(u_i) = \varliminf\limits_{r\to 0}(f_i(x) - f_i(x+ru_i))/r$ — измеримая функция, причем равная 1 почти всюду.

Следовательно, по доказанному выше можно считать, что K и $\delta > 0$ таковы, что при $r = |y-z| < \delta$ в точках линейной плотности $z \in E$ множества E в направлениях u_i, $i = 1, \ldots, m$, имеем

$$\Big|\frac{1}{r}|f_i(z) - f_i(z+ru_i)| - MD(f_i, z)(u_i)\Big| = \\ = \Big|\frac{|(z, z+|y-z|u_i) \cap E|}{|y-z|} - 1\Big| = \frac{|(z, z+|y-z|u_i) \setminus E|}{|y-z|} < \varepsilon.$$

Следовательно, существует $y' \in (z, z+|y-z|u_0) \cap E$ такое, что $|(z+|y-z|u_0) - y'| < \varepsilon|y-z|$ (здесь символом $(\cdot,\cdot)$ обозначен интервал в $\mathbb{R}^n$). Тогда имеем

$$\begin{aligned}\Big|d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) - MD(f, z)(|y-z|u_0)\Big| &\leq \\ \leq \Big|d_{\mathbb{X}}(f(y), f(z)) - d_{\mathbb{X}}(f(y'), f(z))\Big| &+ \\ + \Big|d_{\mathbb{X}}(f(y'), f(z)) - MD(f, z)(|y'-z|u_0)\Big| &+ \\ + \Big|MD(f, z)(|y'-z|u_0) - MD(f, z)(|y-z|u_0)\Big| &\leq \\ \leq \varepsilon \operatorname{Lip}(f)|y-z| + \varepsilon|y'-z| + \varepsilon MD(f, z)(u_0)|y-z| &< \\ < \varepsilon|y-z|(2\operatorname{Lip}(f) + 1). \end{aligned} \tag{24}$$

Из (22)–(24) получаем

$$\Big|d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f, x_0)(y-z)\Big| < \tilde{\varepsilon}|y-z| = (3\operatorname{Lip}(f) + 2)\varepsilon|y-z|, \tag{25}$$

т. е. соотношение (18) справедливо в точке $x_0 \in K$. Так как $x_0 \in K$ — произвольная точка, то данное соотношение справедливо для всех точек $x \in K$.

Замечание 2. Из (25) в доказательстве теоремы 4 вытекает следующее свойство: $d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f, x)(y-z) = o(1)|y-z|$, где $o(1)$ равномерно на K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (Теоремы 1). Исчерпаем множество E ограниченными измеримыми множествами $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E$. Фиксируем $l \in \mathbb{N}$. По теореме 4 для ограниченного множества E_l и для $\varepsilon_t = \frac{1}{t} > 0$, $t \in \mathbb{N}$, существует компакт $K_t \subset E_l$ такой, что $|E_l \setminus K_t| < \varepsilon_t$ и для всех $x \in K_t$, точек плотности $z \in K_t$ множества K_t и произвольного $y \in E$ справедливо

$$d_{\mathbb{X}}(f(z), f(y)) - MD(f, x)(z-y) = o(|z-y|). \tag{26}$$

Возьмем теперь точку плотности $x \in K_t$ множества K_t и рассмотрим некоторый шар $B(x, r)$. Тогда для произвольного $z \in B(x, r) \cap E$ в $o(|z-x|)$-окрестности существует точка плотности $z' \in K_t$ множества K_t. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Big|d_{\mathbb{X}}(f(z),f(y))-MD(f,x)(z-y)\Big|\le\\ \le\Big|d_{\mathbb{X}}(f(z),f(y))-d_{\mathbb{X}}(f(z'),f(y)\Big|+\\ +\Big|d_{\mathbb{X}}(f(z'),f(y))-MD(f,x)(z'-y)\Big|+\\ +|MD(f,x)(z'-y)-MD(f,x)(z-y)|=\\ =o(|z-y|+|z-x|)=o(|y-x|+|z-x|).\end{aligned}$$

(Чтобы оценить слагаемое $|MD(f,x)(z'-y)-MD(f,x)(z-y)|$, достаточно рассмотреть вектор $\tilde z-y$, совпадающий по направлению с $z-y$, а по длине с $z'-y$. Тогда

$$\begin{aligned}|MD(f,x)(z'-y)-MD(f,x)(z-y)|\le\\ \le|MD(f,x)(z'-y)-MD(f,x)(\tilde z-y)|+\\ +|MD(f,x)(\tilde z-y)-MD(f,x)(z-y)|\le\\ \le\mathrm{Lip}(f)|z'-\tilde z|+\mathrm{Lip}(f)o(|x-z|)=o(|x-z|).)\end{aligned}$$

Так как $\Big|E_l\setminus\bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}}K_t\Big|=0$, то соотношение (1) справедливо для почти всех $x\in E_l$ при $z,y\to x$, $z,y\in E$. Из равенства $E=\bigcup\limits_{l\in\mathbb{N}}E_l$ следует, что оно имеет место для почти всех $x\in E$ при $z,y\to x$, $z,y\in E$.

Покажем теперь, что $MD(f,x)(\cdot)$ — полунорма на $\mathbb{R}^n$ для почти всех $x\in E$.

По неравенству треугольника имеем

$$d_{\mathbb{X}}(f(z),f(x))+d_{\mathbb{X}}(f(y),f(x))\ge d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z)). \tag{27}$$

Фиксируем точку плотности $x_0\in E$, для которой выполняется (1) и обозначим $y-x_0=$ $=r\tilde y$, $z-x_0=-r\tilde z$. Будем рассматривать $\tilde y$ и $\tilde z$, лежащие на направлениях, на которых определен $MD(f,x_0)(\cdot)$. Заметим, что по (1)

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z))=d_{\mathbb{X}}(f(x_0+r\tilde y),f(x_0-r\tilde z))=\\ =MD(f,x_0)(r\tilde y+r\tilde z)+o(r|\tilde y|+r|\tilde z|)=\\ =r\cdot MD(f,x_0)(\tilde y+\tilde z)+r\cdot o(|\tilde y|+|\tilde z|),\end{aligned}$$

а по доказанному ранее

$$d_{\mathbb{X}}(f(z),f(x_0))=r\cdot MD(f,x_0)(\tilde z)+r\cdot o(|\tilde z|)$$

и

$$d_{\mathbb{X}}(f(y),f(x_0))=r\cdot MD(f,x_0)(\tilde y)+r\cdot o(|\tilde y|).$$

Заметим, что в этом случае $o(|\cdot|)\to 0$ при $r\to 0$. Разделив обе части неравенства (27) на r и переходя к пределу при $r\to 0$, получаем, что $MD(f,x_0)(\tilde y)+MD(f,x_0)(\tilde z)\ge$ $\ge MD(f,x_0)(\tilde y+\tilde z)$.

Обозначим символом $\mathbb{S}'\subset\mathbb{S}^{n-1}$ множество всех направлений u, на которых определен $MD(f,x_0)(u)$, $x_0\in E\setminus\bigcup\limits_{m\in\mathbb{N}}E^0_m$. Заметим, что при этом счетное всюду плотное множество $\{u_m\}_1^\infty\subset\mathbb{S}'$. Так как $MD(f,x_0)(u)\in\mathrm{Lip}(\mathbb{S}')$, то $MD(f,x)(u)$ продолжается на

$\overline{\mathbb{S}'} = \mathbb{S}^{n-1}$, причем $MD(f, x_0)(u)$ доопределяется единственным образом в каждой точке $x_0 \in E \setminus \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0$. Для $\tilde{y}$ и $\tilde{z}$, не лежащих на направлениях из $\mathbb{S}'$, при доказательстве неравенства треугольника рассмотрим последовательности $\mathbb{S}' \ni \{\tilde{y_n}\} \to \tilde{y}$ и $\mathbb{S}' \ni \{\tilde{z_n}\} \to \tilde{z}$. Таким образом,

$$MD(f, x_0)(\tilde{y}) + MD(f, x_0)(\tilde{z}) \geq MD(f, x_0)(\tilde{y} + \tilde{z})$$

для всех $\tilde{y}, \tilde{z} \in \mathbb{R}^n$, т. е. $MD(f, x)(\cdot)$ — полунорма.

Следствие 4. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество конечной меры, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E_ε такое, что $|E_\varepsilon| < \varepsilon$ и $MD(f, x)(u)$ непрерывен по x на дополнении $E \setminus E_\varepsilon$ для любого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть множество $\{u_m\}_{m=1}^\infty$ плотно на $\mathbb{S}^{n-1}$. По теореме Егорова — Лузина для каждого $m \geq 1$ и $\varepsilon_m > 0$ существует измеримое множество E_{ε_m} такое, что $|E_{\varepsilon_m}| < \varepsilon_m$ и $MD(f, x)(u_m)$ непрерывен по x на дополнении $E \setminus E_{\varepsilon_m}$.

Фиксируем $\varepsilon > 0$ и полагаем $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon}{2^m}$, а $E_\varepsilon = \bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_{\varepsilon_m}$. Тогда $MD(f, x)(v)$ непрерывен по x для всех $v \in \{u_m\}_{m=1}^\infty$. Покажем, что это свойство выполняется и для произвольного $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. Действительно, для всех $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ и $x, y \in E \setminus E_\varepsilon$ справедливо

$$\begin{aligned}|MD(f, x)(u) - MD(f, y)(u)| &\leq |MD(f, x)(u) - MD(f, x)(u_m)| + \\ &+ |MD(f, x)(u_m) - MD(f, y)(u_m)| + |MD(f, y)(u) - MD(f, y)(u_m)| \leq \\ &\leq |MD(f, x)(u_m) - MD(f, y)(u_m)| + 2\,\mathrm{Lip}(f)|u - u_m|.\end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\sigma > 0$ существуют такие $m \in \mathbb{N}$ и $\delta > 0$, что $|u - u_m| < \frac{\sigma}{4\,\mathrm{Lip}(f)}$ и $|MD(f, x)(u_m) - MD(f, y)(u_m)| < \frac{\sigma}{2}$ при $|x - y| < \delta$. Следовательно, $MD(f, x)(u)$ непрерывен по x для каждого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.

Следствие 5. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество конечной меры, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество E_ε такое, что $|E_\varepsilon| < \varepsilon$, и «разностные отношения» $d_{\mathbb{X}}(f(x + ru), f(x))/r$, $x \in E$, равномерно сходятся на E к метрическому дифференциалу $MD(f, x)(u)$ для каждого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО следует из соотношения (25), где $z = x$.

§ 2. Формула площади

В данном параграфе символом $\widetilde{E}$ будем обозначать множество $E \setminus \Big(\bigcup\limits_{m \in \mathbb{N}} E_m^0\Big)$ (см. теорему 4).

Лемма 5 (о касательном отображении). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Пусть еще $MD(f, x)(u) \neq \neq 0$ для всех точек $x \in \widetilde{E}$, $MD(f, x)(u)$ непрерывен на $\widetilde{E}$, и «разностные отношения»*

$d_{\mathbb{X}}(f(x+ru),f(x))/r$, $x\in E$, равномерно сходятся на $\widetilde{E}$ к метрическому дифференциалу $MD(f,x)(u)$ для каждого $u\in\mathbb{S}^{n-1}$. Тогда для всех точек $x,y,z\in\widetilde{E}$ таких, что $y,z\in Q(x,r)\cap\widetilde{E}$, справедливо

$$|d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z))-MD(f,x)(y-z)|=o(MD(f,x)(y-z)). \tag{28}$$

Если $K\subset\widetilde{E}$ — компакт, то $o(1)$ равномерно на K.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любых точек $x,y,z\in\widetilde{E}$ таких, что $y,z\in Q(x,r)\cap E$, имеем

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z)) &= MD(f,z)(y-z)+o(|y-z|)= \\ &= MD(f,z)(y-z)-MD(f,x)(y-z)+MD(f,x)(y-z)+ \\ &\quad + o(|y-z|)\le |y-z|\Big|MD(f,z)\Big(\frac{y-z}{|y-z|}\Big)-MD(f,x)\Big(\frac{y-z}{|y-z|}\Big)\Big|+ \\ &\quad + MD(f,x)(y-z)+o(1)(|y-z|)\le o(1)|y-z|+MD(f,x)(y-z), \end{aligned} \tag{29}$$

где $o(1)$ равномерно на любом компакте $K\subset\widetilde{E}$.

Заметим, что $M_{\min}=\inf\limits_{u\in\mathbb{S}^{n-1}}MD(f,x)(u)>0$. Действительно, если бы $M_{\min}=0$, то существовало бы такое направление $u_0\in\mathbb{S}^{n-1}$, для которого $MD(f,x)(u_0)=0$ ($MD(f,x)(\cdot)\in\mathrm{Lip}(\mathbb{S}^{n-1})$, $\mathbb{S}^{n-1}$ — компакт), что противоречит условию. Отсюда получаем $|y-z|\le M_{\min}^{-1}MD(f,x)(y-z)$ и (29) переписывается как

$$|d_{\mathbb{X}}(f(y),f(z))-MD(f,x)(y-z)|=o(1)M_{\min}^{-1}MD(f,x)(y-z)=o(MD(f,x)(y-z)),$$

где $o(1)$ равномерно на любом компакте $K\subset\widetilde{E}$.

Пусть P — полунорма на $\mathbb{R}^n$. Из неравенства $P(\cdot)\le C|\cdot|$ для некоторого $C>0$ следует, что мера $\mathcal{H}^n_P$ абсолютно непрерывна относительно меры $\mathcal{H}^n=|\cdot|$. Далее, заметим, что меры $\mathcal{H}^n$ и $\mathcal{H}^n_P$ инвариантны при сдвиге, и рассмотрим $A=B(x,r)$. Тогда

$$\lim_{r\to0}\frac{\mathcal{H}^n_P(B(x,r))}{|B(x,r)|}=\lim_{r\to0}\frac{r^n\mathcal{H}^n_P(B(0,1))}{r^n|B(0,1)|}\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{J}(P).$$

Отсюда и из общих теорем о дифференцировании мер вытекает равенство $\mathcal{H}^n_P(A)=$ $=\mathcal{J}(P)|A|$ для всех измеримых $A\subset\mathbb{R}^n$.

Определение 2. Пусть P — полунорма на $\mathbb{R}^n$. Величина $\mathcal{J}(P)$ называется *якобианом полунормы P*.

Лемма 6 [3]. *Пусть P — полунорма на $\mathbb{R}^n$. Тогда ее якобиан равен*

$$\mathcal{J}(P)=\omega_n n\Big(\int\limits_{\mathbb{S}^{n-1}}[P(x)]^{-n}\,d\mathcal{H}^{n-1}(x)\Big)^{-1}.$$

Лемма 7 [7]. *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$, $A\subset E$ — измеримые множества, $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f\in\mathrm{Lip}(E,\mathbb{X})$. Тогда если множество A таково, что $|A|=0$, то $\mathcal{H}^n(f(A))=0$.*

Лемма 8 (об образе множества вырождения). *Пусть $E\subset\mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X},d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, $Z=\{x\in E:\exists u_0\in\mathbb{S}^{n-1}:$*

$MD(f,x)(u_0)=0\}$ — *множество вырождения, а* $f\in \mathrm{Lip}(E,\mathbb{X})$. *Пусть еще* $MD(f,x)(u)$ *непрерывен на* $\widetilde{E}$ *и предел* $MD(f,x)(u)$ *равномерен на* E *для всех направлений* $u\in\mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда* $\mathcal{H}^n(f(Z))=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что по лемме 7 можно полагать, что все точки являются точками множества $\widetilde{E}$. Пусть $Z\neq\emptyset$. Исчерпаем множество $\widetilde{E}$ счетной последовательностью компактных подмножеств $F_1\subset F_2\subset\dots$. По теореме 4 можно считать, что для всякого $\varepsilon>0$ и $l\in\mathbb{N}$ существует $r_0(F_l)>0$ такое, что для всех точек $x\in F_l$ и всех $y\in Q(x,r)\cap E,\ r\le r_0$, справедливо $|d_{\mathbb{X}}(f(y),f(x))-MD(f,x)(y-x)|\le\varepsilon|y-x|$. Отсюда

$$d_{\mathbb{X}}(f(y),f(x))\le|y-x|(MD(f,x)(u_{y-x})+\varepsilon)=|y-x|MD_\varepsilon(f,x)(u_{y-x}),$$

где $u_{y-x}=\frac{y-x}{|y-x|},\ MD_\varepsilon(f,x)(u_{y-x})=MD(f,x)(u_{y-x})+\varepsilon$. Очевидно, $MD_\varepsilon(f,x)(\cdot)$ является нормой на $\mathbb{R}^n$.

Так как $MD(f,x)(u)$ равномерно непрерывен на компактном подмножестве $\widetilde{E}$, то можно считать, что r таково, что имеет место соотношение $|MD(f,x)(u)-MD(f,z)(u)|\le\varepsilon,\quad x,z\in Q(x,r)\cap E,\ u\in\mathbb{S}^{n-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}d_{\mathbb{X}}(f(z),f(y))=&\\ &=MD(f,z)(y-z)-MD(f,x)(y-z)+MD(f,x)(y-z)+o(|y-z|)\le\\ &\le\varepsilon|y-z|+MD(f,x)(y-z)+\varepsilon|y-z|\le 2MD_\varepsilon(f,x)(y-z).\end{aligned}$$

Таким образом, f — липшицево отображение относительно метрики $\rho_{MD_\varepsilon(f,x)}(y,z)=MD(f,x)(y-z)+\varepsilon|y-z|$. Тогда

$$\mathcal{H}^n_{d_{\mathbb{X}}}(f(Q(x,r)\cap\widetilde{E}))\le 2^n\mathcal{H}^n_{MD_\varepsilon(f,x)}(Q(x,r)\cap\widetilde{E}).$$

По лемме 6

$$\mathcal{H}^n_{MD_\varepsilon(f,x)}(Q(x,r)\cap\widetilde{E})=\mathcal{J}(MD_\varepsilon(f,x))|Q(x,r)\cap\widetilde{E}|=O(\varepsilon\cdot r^n),$$

так как $\mathcal{J}(MD_\varepsilon(f,x))=O(\varepsilon)$.

Покроем $F_l\cap Z$ кубами $Q(x,r)$. Так как $|F_l|<\infty$, то таких кубов будет $O(r^{-n})$. Таким образом, $\mathcal{H}^n_{d_{\mathbb{X}}}(f(F_l\cap Z))=O(\varepsilon)\to0$ при $\varepsilon\to0$. При $l\to\infty$ получаем $\mathcal{H}^n_{d_{\mathbb{X}}}(f(Z))=0$.

Теорема 5 [1]. *Пусть абсолютно непрерывная мера* Φ *определена на* σ*-алгебре* $\mathcal{B}(D)$ *борелевских подмножеств открытого множества* $D\subset\mathbb{R}^k$. *Тогда функция* Φ *дифференцируема почти во всех точках открытого множества* D:

$$\lim_{\delta\to0,\,Q_\delta\ni x}\frac{\Phi(Q_\delta)}{|Q_\delta|}=\Phi'(x),\tag{30}$$

и

$$\int\limits_A\Phi'(x)\,dx=\Phi(A)\tag{31}$$

для любого борелевского множества $A\in\mathcal{B}(D)$.

Лемма 9. *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ — измеримое множество, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, $f : E \to (\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — инъективное липшицево отображение. Пусть еще $MD(f,x)(\cdot)$ непрерывен по x и $MD(f,x)(u) \neq 0$ на $\widetilde{E} \times \mathbb{S}^{n-1}$. Тогда функция $\Phi(A) = \mathcal{H}^n_{d_{\mathbb{X}}}(f(A))$ — абсолютно непрерывная (счетно-аддитивная) мера, при этом $\Phi'(x) = \mathcal{J}(MD(f,x))$ для почти всех $x \in E$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что абсолютная непрерывность меры Φ следует из леммы 7. Далее, так как любое измеримое множество $A = B \cup S$, где B — борелевское, а $|S| = 0$, то в силу леммы 7 можно считать, что Φ определена на борелевских подмножествах. Из взаимной однозначности функции f, леммы 7 и свойств меры $\mathcal{H}^n_{d_{\mathbb{X}}}$ следует, что Φ — (счетно-аддитивная) мера.

Используя лемму о касательном отображении, при достаточно малых $r > 0$ для куба $Q(x,r) = Q$, где x — точка множества $\widetilde{E}$, имеем

$$(1 - o(1))^n \mathcal{H}^n_{MD(f,x)}(Q) \leq \mathcal{H}^n(f(Q)) \leq (1 + o(1))^n \mathcal{H}^n_{MD(f,x)}(Q),$$

откуда по лемме 6 следует

$$(1 - o(1))^n \mathcal{J}(MD(f,x)) \leq \frac{\Phi(Q)}{|Q|} \leq (1 + o(1))^n \mathcal{J}(MD(f,x)),$$

т. е. $\Phi'(x) = \mathcal{J}(MD(f,x))$.

Теорема 6 (формула площади для липшицевых отображений). *Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$, $A \subset E$ — измеримые множества, $(\mathbb{X}, d_{\mathbb{X}})$ — метрическое пространство, а $f \in \mathrm{Lip}(E, \mathbb{X})$. Тогда*

$$\int\limits_A \mathcal{J}(MD(f,x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A)\, d\mathcal{H}^n(y),$$

где $N(f,y,A) = \mathcal{H}^0(\{x \in A : f(x) = y\})$ — функция кратности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По утверждению леммы 8 можно считать, что $A \subset E \setminus Z$, где Z — множество вырождения. Далее, для каждого $m \in \mathbb{N}$ положим $\varepsilon_m = \frac{1}{m}$. Фиксируем $q \in \mathbb{N}$ и рассмотрим множество $A \setminus A_{\varepsilon_q}$, на котором $MD(f,x)(\cdot)$ непрерывен по x для всех $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, и «разностные отношения» $d_{\mathbb{X}}(f(x+ru), f(x))/r$, $x \in E$, равномерно сходятся на E к метрическому дифференциалу $MD(f,x)(u)$ для каждого $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, такое, что $|A_{\varepsilon_q}| < \varepsilon_q$ (такое множество существует по следствиям 4 и 5). Положим

$$A_k = \Big\{x \in A \setminus A_{\varepsilon_q} : \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+ru), f(x))}{r} > \frac{1}{k} \text{ для всех } u \in \mathbb{S}^{n-1},\ r < \frac{1}{k}\Big\}.$$

Заметим, что множества A_k измеримы как множества Лебега измеримой функции

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\frac{1}{n} < |y| < \frac{1}{k}} \frac{d_{\mathbb{X}}(f(x+y), f(x))}{|y|},$$

и почти все $x \in A \setminus A_{\varepsilon_q}$ попадают хотя бы в одно из множеств A_k. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$ и представим $A_k = \bigcup\limits_{l \in \mathbb{N}} A_{k,l}$, где $\mathrm{diam}(A_{k,l}) < \frac{1}{k}$ и $A_{k,l_1} \cap A_{k,l_2} = \emptyset$ для $l_1 \neq l_2$. По определению A_k и $A_{k,l}$ получаем, что отображение f взаимно однозначно на $A_{k,l}$. Действительно,

$$d_{\mathbb{X}}(f(x+ru), f(x)) > \frac{r}{k} > 0.$$

Так как любое измеримое множество $M = B \cup S$, где B — борелевское, а $|S| = 0$, то по леммам 7 и 9 и теореме 5 на каждом $A_{k,l}$ имеем

$$\int\limits_{A_{k,l}} \mathcal{J}(MD(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} \chi_{f(A_{k,l})}(y)\,d\mathcal{H}^n(y). \tag{32}$$

Просуммировав (32) по $l \in \mathbb{N}$, получим

$$\int\limits_{A_k} \mathcal{J}(MD(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} \sum_{l\in\mathbb{N}} \chi_{f(A_{k,l})}(y)\,d\mathcal{H}^n(y) = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A_k)\,d\mathcal{H}^n(y)$$

(по определению функции кратности $N(f,y,A_k) = \sum\limits_{l\in\mathbb{N}} \chi_{f(A_{k,l})}(y)$). Обозначим $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = B_q$. Тогда $A = \bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} B_q$ с точностью до множества нулевой меры. Представим объединение $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} B_q$ как $\bigsqcup\limits_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{B_m}$, где каждое $\widetilde{B_m}$ содержится в B_q для некоторого q, и совокупность $\{\widetilde{B_m}\}$ дизъюнктна. Следовательно,

$$\int\limits_{A} \mathcal{J}(MD(f,x))\,dx = \int\limits_{\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} B_q} \mathcal{J}(MD(f,x))\,dx =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{X}} \sum_{m\in\mathbb{N}} N(f,y,\widetilde{B_m})\,d\mathcal{H}^n(y) = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,\bigsqcup_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{B_m})\,d\mathcal{H}^n(y) =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,\bigcup_{q\in\mathbb{N}} B_q)\,d\mathcal{H}^n(y) = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A)\,d\mathcal{H}^n(y),$$

так как функции $N(f,y,A) \neq N(f,y,\bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} B_q)$ только на множестве нулевой меры $f\Big(A \setminus \bigcup\limits_{q\in\mathbb{N}} B_q\Big)$. Таким образом,

$$\int\limits_{A} \mathcal{J}(MD(f,x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{X}} N(f,y,A)\,d\mathcal{H}^n(y).$$

В работе [2] приводятся обобщения формулы площади на более широкие классы отображений с использованием результатов [6, 7]. В частности, формула площади доказана для отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве [4]. Теоремы о дифференцируемости и формуле площади применяются также в серии работ [9–11].

Список литературы

1. *Federer H.* Geometric measure theory. N.Y.: Springer, 1969.
2. *Карманова М. Б.* Формулы площади и коплощади для отображений классов Соболева со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 2007 (принято к печати).
3. *Kirchheim B.* Rectifiable metric spaces: local structure and regularity of the Hausdorff measure // Proc. AMS. 1994. Vol. 121. P. 113–123.

4. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 657–675.
5. *Stein E. M.* Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton: Princeton Univ. Press, 1970.
6. *Водопьянов С. К.* $\mathcal{P}$-differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics // Тр. по анализу и геометрии. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2000. С. 603–670.
7. *Водопьянов С. К.* Теория интеграла Лебега, Записки лекций по математическому анализу. Новосибирск: Изд-во НГУ, 2003.
8. *Водопьянов С. К.* Геометрия пространств Карно — Каратеодори, квазиконформный анализ и геометрическая теория меры // Мат. журн. Владикавказ. 2003. Т. 5, № 1. С. 1–14.
9. *Карманова М. Б.* Метрическая дифференцируемость отображений и геометрическая теория меры // Докл. АН. 2005. Т. 401, № 4. С. 443–447.
10. *Карманова М. Б.* Спрямляемые множества и формула коплощади для отображений со значениями в метрическом пространстве // Докл. АН. 2006. Т. 408, № 1. С. 16–21.
11. *Maria Karmanova*, Geometric Measure Theory Formulas on Rectifiable Metric Spaces, Analysis and Geometry in Their Interaction // Contemporary Mathematics. AMS. 2007 (to appear).

Материал поступил в редколлегию 16.09.2005

Контактный адрес автора
КАРМАНОВА Мария Борисовна
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск
просп. Академика Коптюга, 4
Институт математики СО РАН