УДК 510.53, 512.572, 512.53, [510 + 519.7] : 519.68

Е. Н. Павловский

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ РАСПОЗНАВАЕМОСТЬ СВОЙСТВА КОНЕЧНОСТИ КОНЕЧНО-ОПРЕДЕЛЕННЫХ СИСТЕМ

Объектом исследования данной работы является свойство конечности конечно-определенных систем, задаваемых с помощью набора квазитождеств. Цель работы заключается в выявлении тех конкретных случаев, когда существует алгоритм, определяющий конечность таких систем. В исследовании применяются методы теории алгоритмов. Использованы результаты предыдущих исследований (С. И. Адян, В. Ю. Попов) в смежных областях (алгоритмических свойств конечно-определенных полугрупп и групп). Получены следующие результаты: в сигнатуре с одной унарной операцией и константами существует единый алгоритм, распознающий конечность свободных систем; в сигнатуре с одной бинарной операцией и хотя бы одной константой, так же как в сигнатуре с несколькими $(n+1)$-арными операциями не существует общего алгоритма.

Результаты данной работы могут быть применены в исследовании корректности описания абстрактных типов данных с помощью квазитождеств.

Введение

В описании абстрактных типов данных известной конструкцией является описание с помощью квазитождеств. При этом сам тип данных представляется в виде некоторой свободной системы квазимногообразия, порожденного этими квазитождествами. Элементы этой системы являются состояниями типа данных. Поэтому естественно требовать от типа данных, чтобы он принимал конечное количество состояний.

В соответствии с этим стоит проблема: *определить, существует ли алгоритм, определяющий по конечной системе Δ квазитождеств конечность свободной системы F, факторизованной по отношению $\sim_\Delta$ (совокупность квазитождеств индуцирует на свободной системе отношение конгруэнтности).*

В данной работе исследуется вопрос конечности свободных систем квазимногообразия в произвольной конечной функциональной сигнатуре. Работа содержит четыре части:

– основные понятия;
– сигнатура с одной унарной операцией;
– несколько унарных операций;
– одна бинарная операция, общий случай.

Во второй части указан алгоритм, распознающий конечность, в третьей — приведено доказательство несуществования общего алгоритма (на основе теоремы Адяна–Рабина [1]). В четвертой части работы рассмотрен случай, когда в сигнатуре присутствуют одна константа и одна бинарная операция; нераспознаваемость конечности также сле-

ISSN 1818-7943. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, вып. 4. С. 83–92.

дует из результатов Адяна–Рабина для конечно-порожденных полугрупп. Также рассмотрен случай конечной сигнатуры, в которой присутствуют либо несколько унарных операций, либо одна $(n+2)$-арная операция $(n \geqslant 0)$ с одной константой и, показана нераспознаваемость конечности. В случае когда в сигнатуре только одна $(n+2)$-арная операция, ответ получить пока не удается, да и вряд ли этот случай представляет особый интерес.

§ 1. Основные понятия

Исходя из поставленной задачи понадобится несколько определений.

Определение 1. Формулы вида

$$(\forall \bar{x})(a_1(\bar{x}) \mathbin{\&} a_2(\bar{x}) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} a_m(\bar{x})),$$
$$(\forall \bar{x})((a_1(\bar{x}) \mathbin{\&} a_2(\bar{x}) \mathbin{\&} \ldots \mathbin{\&} a_m(\bar{x})) \to a_0(\bar{x})),$$

где a_i — атомарные формулы от переменных $\{x_1, \ldots, x_n\}$ (переменные могут входить фиктивно), называются соответственно *тождествами* и *квазитождествами*.

Мы будем рассматривать сигнатуру только с функциональными символами, поэтому все атомарные формулы представляют собой равенство термов:

$$t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n).$$

Определение 2. Класс $\mathbf{K}$ алгебраических систем сигнатуры Σ называется *квазимногообразием*, если существует набор квазитождеств Δ таких, что $\mathfrak{M} \in \mathbf{K} \Leftrightarrow \mathfrak{M} \models \Delta$. Будем обозначать такой класс $\mathbf{K}_\Delta$.

В данной работе используются понятия независимых элементов и свободных систем [6, гл. V, § 12.2].

Определение 3. Пусть заданы алгебраическая система $\mathcal{F}$ и квазимногообразие $\mathbf{K}$ некоторой сигнатуры Σ. Непустая совокупность S каких-то элементов из $\mathcal{F}$ называется *независимой* в $\mathcal{F}$ *относительно класса* $\mathbf{K}$ ($\mathbf{K}$-независимой), если произвольное отображение S в любую $\mathbf{K}$-систему $\mathfrak{M}$ может быть продолжено до гомоморфизма $\bar{S}$ в $\mathfrak{M}$, где $\bar{S}$ — подсистема, порожденная элементами S, в $\mathcal{F}$.

Алгебраическая система $\mathcal{F}$ называется *свободной относительно класса* $\mathbf{K}$, если в $\mathcal{F}$ существует совокупность S элементов, $\mathbf{K}$-независимая и порождающая систему $\mathcal{F}$. Совокупность S, обладающая этими свойствами, называется $\mathbf{K}$-*свободным базисом* системы $\mathcal{F}$.

Система $\mathcal{F}$ называется *свободной системой ранга* $\mathfrak{n}$ *в классе* $\mathbf{K}$ (символически $\mathcal{F} = \mathbb{F}_\mathfrak{n}$), если $\mathcal{F} \in \mathbf{K}$ и в $\mathcal{F}$ существует $\mathbf{K}$-свободный базис мощности $\mathfrak{n}$.

Важно отметить, что любая $\mathbf{K}$-система с порождающей совокупностью мощности $\mathfrak{n}$ является гомоморфным образом свободной системы $\mathbb{F}_\mathfrak{n}$ [6, § 12.2], которая существует и единственна (до изоморфизма) в квазимногообразии. Эти факты имеют большое значение для возможности описания абстрактных типов данных и имеют большое количество полезных, практически применимых следствий. Именно поэтому существенным является то, что мы рассматриваем не произвольную систему из $\mathbf{K}$, а только свободную некоторого конечного ранга.

Определение 4. *Абсолютно свободной системой сигантуры* Σ *с порождающими* X называется множество $\mathcal{F}_\Sigma(X)$ всех термов сигнатуры Σ над множеством переменных X (более подробное определение дано в [3, § 1.1.3]).

Теорема 1. *Конечное множество квазитождеств* Δ *конечной функциональной сигнатуры* Σ *индуцирует на абсолютно свободной системе* $\mathcal{F}_\Sigma(X)$ *отношение конгруэнтности* $\sim_\Delta$. *При этом фактор система* $\mathcal{F}_\Sigma(X)/\sim_\Delta$ *является свободной* $\mathbf{K}_\Delta$*-системой ранга* $|X|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\sim_\Delta$ является ядром эпиморфизма абсолютно свободной системы $\mathcal{F}_\Sigma(X)$ на свободную систему квазимногообразия $\mathbf{K}_\Delta$ ранга $|X|$ [6, § 12.2, следствие 10].

Следовательно, для того, чтобы определить конечность свободной системы конечного ранга $\mathfrak{n}$ квазимногообразия $\mathbf{K}$, заданного конечным набором квазитождеств Δ, достаточно определить конечность системы $\mathcal{F}_\Sigma(X)/\sim_\Delta$ (далее просто $\mathbb{F}_\mathfrak{n}$) для произвольного конечного $|X| = \mathfrak{n}$. Значит, наша постановка задачи, сформулированная вначале, корректна.

§ 2. Решение проблемы в случае одной унарной операции

Пусть задана сигнатура $\Sigma = \{f^1\}$ (верхний индекс означает местность операции). Квазитождество имеет вид

$$(\forall \bar{x})\,((\mathop{\&}_{t=1}^{s} f^{k_t}(x_{i_t}) = f^{l_t}(x_{j_t})) \to f^{k_0}(x_{i_0}) = f^{l_0}(x_{j_0})), \tag{1}$$

где $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $1 \leqslant i_t, j_t \leqslant n$, $k_t, l_t \geqslant 0$ $(t = 0, \ldots, s)$ и $f^0(x) = x$.

Пусть Δ — конечное множество таких квазитождеств, $\mathbf{K}_\Delta$ — класс всех алгебраических систем сигнатуры Σ, удовлетворяющих этой системе квазитождеств.

Исследуем вопрос о конечности свободной системы в $\mathbf{K}_\Delta$ с конечным числом порождающих.

Для начала рассмотрим однопорожденную свободную систему.

Предложение 1. $\mathbb{F}_1$ *конечна* $\iff$ *существуют натуральные* k *и* $l > 0$ *такие, что* $\mathbb{F}_1 \vDash (\exists x) f^k(x) = f^{k+l}(x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $(\Rightarrow)$ Допустим противное, т. е. для любых k и $l \neq 0$ выполняется

$$\mathbb{F}_1 \nvDash (\exists x) f^k(x) = f^{k+l}(x)$$

или

$$\mathbb{F}_1 \vDash (\forall x) f^k(x) \neq f^{k+l}(x).$$

Это означает, что каждый элемент $\mathcal{F}_\Sigma(\xi)$ образует в $\mathbb{F}_1 = \mathcal{F}_\Sigma(\xi)/\sim_\Delta$ свой одноэлементный класс. Из чего следует, что существует бесконечно много попарно различных классов в $\mathbb{F}_1$.

$(\Leftarrow)$ $\mathbb{F}_1 \vDash (\exists x) f^k(x) = f^{k+l}(x)$. Допустим $x = [f^m(\xi)]_{\sim_\Delta}$. Тогда

$$f^k([f^m(\xi)]) = f^{k+l}([f^m(\xi)]),$$

т. е.

$$[f^{k+m}(\xi)] = [f^{k+l+m}(\xi)].$$

Теперь применяем слева и справа f^s:

$$[f^{k+m+s}(\xi)] = [f^{k+m+l+s}(\xi)].$$

Это означает, что любой элемент $f^t(\xi)$, где $t \geqslant k+l+m$ эквивалентен $f^p(\xi)$, где $p = k+m+((t-(k+m)) \bmod l) < k+l+m$.

Предложение 2. $\mathbb{F}_1$ — *конечна* $\Longleftrightarrow$ *для любого натурального* $\mathfrak{n}$ $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ — *конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) очевидно (берем $\mathfrak{n} = 1$).

($\Rightarrow$) Рассмотрим отображения

$$\sigma_i : \xi \mapsto \xi_i \ (i = 1 \ldots \mathfrak{n}).$$

Каждое σ_i можно продолжить до гомоморфизма. Тогда для любого l выполнено $f^l(\xi_i) = \sigma_i f^l(\xi)$. Конечность $\mathbb{F}_1$ означает, что существует N такое, что для любого $l \geqslant N$ найдется $k < N$, что

$$[f^l(\xi)] = [f^k(\xi)].$$

Следовательно, их образы при произвольном отображении f^m тоже равны. То есть, $\overline{\{\xi_i\}}$ — конечное множество.

Ясно теперь, что для исследования вопроса о конечности $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ для произвольного конечного $\mathfrak{n}$ достаточно исследовать конечность $\mathbb{F}_1$.

Опишем далее *алгоритм* α:

$$\alpha(\Delta) = \begin{cases} 0, \text{если } \mathcal{F}_\Sigma(\xi)/\sim_\Delta \text{ конечна;} \\ 1, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Пусть все квазитождества занумерованы: $\Delta = \{r_1, r_2, \ldots, r_d\}$. В алгоритме мы будем последовательно просматривать каждое квазитождество, предполагая, что никакие нетривиальные равенства еще не выполнены. Будем искать эти нетривиальные равенства (в правой части квазитождества), которые следуют из требования выполнимости квазитождеств. Если мы находим нетривиальное равенство, то по предложению 1 система $\mathbb{F}_1$ конечна. Если же квазитождество выполняется в $\mathcal{F}_\Sigma(\xi)$, то оно выполняется и в $\mathcal{F}_\Sigma(\xi)/\sim_\Delta$, поэтому мы просто переходим к рассмотрению следующего.

Алгоритм.

(1) $i := 0$;

(2) $i := i+1$. Если $i > d$, то $\alpha(\Delta) = 1$ и алгоритм заканчивает работу. Иначе, рассмотрим r_i, оно имеет вид квазитождества (1).

  (a) r_i можно переписать в виде

$$(\forall \bar{z})(\mathop{\&}_{t=1}^{s} a_t(\bar{z}) \to a_0(\bar{z})), \quad (*)$$

  где $a_t(\bar{z}) \rightleftharpoons (f^{k_t}(x_t) = f^{k_t+l_t}(y_t))$, переменные x_t, y_t выбраны из $\bar{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_m)$.

(b) Рассмотрим $a_s(\bar{z})$. Ясно, что эта формула выполняется только тогда, когда $x_s = f^{l_s}(y_s)$.

i. Если переменные x_s и y_s совпадают и $l_s \neq 0$, то формула не выполняется, переходим на п.(2). Иначе на п. (2)(b)ii.

ii. Если $s > 1$, то заменяем во всем квазитождестве все вхождения переменной x_s на $f^{l_s}(y_s)$, а из посылки вычеркиваем $a_s(\bar{z})$ (нетрудно убедиться, что такое преобразование приводит к эквивалентной формуле), $s := s - 1$ и переходим на п. (2)a, иначе на п. (2)(b)iii.

iii. $s = 1$. Заменяем в правой части квазитождества x_s на $f^{l_s}(y_s)$, а посылку убираем (нетрудно проверить, что такое преобразование приводит к эквивалентному тождеству). Рассмотрим полученное тождество. Оно имеет либо вид

$$(\forall x \forall y) f^k(x) = f^l(y), \tag{1}$$

либо вид

$$(\forall x) f^k(x) = f^l(x). \tag{2}$$

В случае (1) по предложению 1 получаем конечность, т. е. $\alpha(\Delta) = 0$. То же самое получаем в случае (2) при $k \neq l$. Если же в случае (2) $k = l$, то получаем тривиальное тождество и переходим на п. (2). □

Замечание 1. Если квазитождество имеет вид

$$(\forall x \forall \bar{z}) \mathop{\&}_{t=0}^{s} a_t(x, \bar{z}) \to f^k(x) = f^{k+l}(x),$$

то его можно переписать в эквивалентном виде

$$(\forall x \forall y \forall \bar{z}) \mathop{\&}_{t=0}^{s} a_t(x, \bar{z}) \& x = y \to f^k(x) = f^{k+l}(y).$$

Если кроме одной унарной операции задано еще несколько констант и они присутствуют только в посылках квазитождеств, то их можно заменить переменными. Следующий пример иллюстрирует это (c — константа):

$$\begin{aligned}
&(\forall x, y, z) f(x) = f^2(c) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow \\
&(\forall y, z)((\exists x) f(x) = f^2(c)) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow \\
&(\forall y, z)((\exists x \exists u) f(x) = f^2(u)) \to f^3(y) = f^4(z) \Longleftrightarrow \\
&(\forall x, y, z, u) f(x) = f^2(u) \to f^3(y) = f^4(z)
\end{aligned}$$

Если же константы присутствуют в правой части, то в проверке конечности можно использовать следующие эквивалентности:

$$\begin{aligned}
&f^k(c) = f^{k+l}(x) \Longleftrightarrow f^l(x) = c \Longleftrightarrow \\
&(\exists p, q)\ c = f^p(\xi) \,\&\, x = f^q(\xi) \,\&\, c = f^l(x) \Longleftrightarrow f^p(\xi) = f^{q+l}(\xi).
\end{aligned}$$

Случай $f^k(c) = f^{k+l}(d)$ (c, d — константы) разбирается аналогично.

§ 3. Неразрешимость для сигнатуры с несколькими унарными операциями

Пусть $\Sigma = \{f^1, g^1\}$. Покажем, что проблема конечности $\mathcal{F}_\Sigma(X)/\sim_\Delta$ неразрешима для совокупности Δ тождеств вида

$$(\forall x) w_1(x) = w_2(x),$$

где $w_1, w_2 \in \Sigma^{*}$[1].

Воспользуемся здесь известным результатом об алгоритмической нераспознаваемости свойства конечности конечно-определенных групп [1]. Далее мы будем работать в определениях, данных в упомянутой статье.

Определение 5. Инвариантное групповое свойство (т. е. не меняющееся при изоморфизме) α называется *марковским*, если существует конечно-определенная группа со свойством α и конечно-определенная группа, не вложимая ни в какую конечно-определенную группу со свойством α.

Свойство конечности группы, очевидно, является марковским. Оно сохраняется при изоморфизме.

Теорема 2 (С. И. Адян, М. О. Рабин). *Не существует общего алгоритма распознавания марковского свойства всех конечно-определенных групп.*

На самом деле, верен даже более сильный результат о том, что не существует общего алгоритма для фиксированного количества порождающих [1].

Следовательно, для конечно-определенных групп не существует алгоритма распознавания конечности.

Теперь укажем соответствие между конечно-определенной группой и фактор системой $\mathcal{F}_\Sigma(X)/\sim_\Delta$. Вспомним задание конечно-определенной группы.

$$\begin{aligned} G = \langle\langle\, a_1, \ldots, a_n \,|\, A_1 = 1, \ldots, A_m = 1\,\rangle\rangle = \\ = \langle\, a_1, \ldots, a_n, {a_1}^{-1}, \ldots, {a_n}^{-1} \,|\, \{A_j = 1\}_{j=1}^m, \{{a_i}^{-1} a_i = a_i {a_i}^{-1} = 1\}_{i=1}^n \,\rangle = \langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D}\,\rangle. \end{aligned}$$

Далее каждому элементу a_i и ${a_i}^{-1}$ сопоставим унарную операцию в Σ — a_i и ${a_i}^{-1}$ соответственно, т. е. $\Sigma = \mathcal{S}$. Можно считать, что в сигнатуре у нас две унарных операции, так как лишнюю одноместную функцию можно свести к другой тождеством $(\forall x) f(x) = h(x)$. Каждому определяющему соотношению $A = 1 \in \mathcal{D}$ сопоставим тождество

$$A = 1 \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow ((\forall x) A(x) = x) \in \Delta.$$

Получили совокупность тождеств Δ.

Предложение 3. $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}} = \mathcal{F}_\Sigma(\mathfrak{n})/\sim_\Delta$ *конечна* $\Longleftrightarrow G = \langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D}\,\rangle$ *конечна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. ($\Leftarrow$) $\langle\, \mathcal{S} \,|\, \mathcal{D}\,\rangle$ конечна, значит, существует конечное количество слов $w_1, w_2, \ldots, w_n$ таких, что они неэквивалентны в группе G и любой другой элемент $w \in \mathcal{S}^*$ эквивалентен некоторому w_i. Возьмем произвольный элемент $[w(\xi_{\mathfrak{m}})] \in \mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$, тогда

[1] Здесь и далее Σ^* означает множество всех слов над алфавитом Σ.

для некоторого i в группе G $w \sim_{\mathcal{D}} w_i$, т.е. существует цепочка левых и правых преобразований $w = P_0 \to \ldots \to P_l = w_i$, где $P_j \to P_{j+1}$ получается следующим образом:

$$P_j = UV \to UAV = P_{j+1}$$
$$\text{или}$$
$$P_j = UAV \to UV = P_{j+1},$$

где $U, V \in \mathcal{S}^*$, $A = 1 \in \mathcal{D}$. Рассмотрим тождество $(\forall x) x = A(x)$. Возьмем $x = [V(\xi_{\mathfrak{m}})]_{\sim_\Delta}$, тогда в $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ выполнено $[V(\xi_{\mathfrak{m}})] = [AV(\xi_{\mathfrak{m}})]$. Применим последовательно операции, соответствующие буквам слова U, тогда $[UV(\xi_{\mathfrak{m}})] = [UAV(\xi_{\mathfrak{m}})]$. Получили, что $[P_j(\xi_{\mathfrak{m}})] = [P_{j+1}(\xi_{\mathfrak{m}})]$. Далее по транзитивности равенства: $[w(\xi_{\mathfrak{m}})] = [w_i(\xi_{\mathfrak{m}})]$. Значит, в $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ произвольный элемент $w(\xi_{\mathfrak{m}})$ эквивалентен некоторому элементу из конечного множества, т.е. система $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ конечна.

($\Rightarrow$) Рассмотрим тождества из Δ:

$$(\forall x) A_i(x) = x.$$

Теперь, подставляя вместо $x = [V(\xi)],\ \xi \in \{\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$, получим

$$[A_i V(\xi)] = [V(\xi)].$$

Применяем последовательно операции $c_k, c_{k-1}, \ldots, c_1$ $(c_1 c_2 \ldots c_k = U)$, получим

$$[U A_i V(\xi)] = [UV(\xi)].$$

Если $w(\xi) \sim_\Delta v(\xi)$, то $\exists P_0(\xi), P_1(\xi), \ldots, P_l(\xi)$ такие, что

$$P_j(\xi) = UV(\xi) \sim U A_i V(\xi) = P_{j+1}(\xi),$$
$$\text{или}$$
$$P_j(\xi) = U A_i V(\xi) \sim UV(\xi) = P_{j+1}(\xi).$$

Но это выполняется тогда и только тогда, когда $w \sim_{\mathcal{D}} v$ в группе G.

Если $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ конечна, то в ней есть конечное множество элементов, которым все остальные эквивалентны. Заметим, что произвольные элементы $w(\xi)$ и $v(\eta)$, где $\xi \neq \eta$, $\xi, \eta \in \{\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$, не могут быть эквивалентны ввиду того, что в тождествах участвует только один порождающий элемент. Поэтому система $\mathbb{F}_{\mathfrak{n}}$ разбивается на объединение $\mathfrak{n}$ изоморфных друг другу подсистем (изоморфизм строится простой заменой $\xi_{\mathfrak{i}} \mapsto \xi_{\mathfrak{j}}$). Итак, если F конечна, то существует конечное множество $w_1, \ldots, w_n$ слов из Σ^* такое, что любое слово $w(\xi),\ \xi \in \{\xi_1, \ldots, \xi_{\mathfrak{n}}\}$ эквивалентно некоторому $w_i(\xi)$. Это и означает, что $w \sim_{\mathcal{D}} w_i$, т.е. конечность G.

§ 4. Случай произвольной сигнатуры

Рассмотрим случай, когда сигнатура содержит одну бинарную операцию и одну константу, т.е. $\Sigma = \{\cdot^2, e^0, \ldots\}$. Покажем, что в этом случае также не существует общего алгоритма, распознающего конечность свободных систем квазимногообразия $\mathbf{K}_\Delta$. Для этого покажем, что к нашей проблеме сводится другая неразрешимая проблема, например проблема распознавания конечности конечно-определенных полугрупп с двумя порождающими.

Выполним сведение следующим образом: рассмотрим подмногообразие в $\mathbf{K}_\Delta$, такое что в нем можно закодировать все конечно-определенные двупорожденные полугруппы.

Рассмотрим следующее многообразие $\mathbf{M}$, заданное тождествами

$$
\begin{aligned}
(e \cdot e) \cdot e &= e \cdot (e \cdot e) && \text{(Конст)}\\
(\forall x \forall y \forall z)\ ((x \cdot y) \cdot z) \cdot e &= ((x \cdot y) \cdot z) && \text{(ЛЛ)}\\
(\forall x \forall y \forall z)\ (x \cdot (y \cdot z)) \cdot e &= (x \cdot (y \cdot z)) && \text{(ЛП)}\\
(\forall x \forall y \forall z)\ e \cdot ((x \cdot y) \cdot z) &= ((x \cdot y) \cdot z) && \text{(ПЛ)}\\
(\forall x \forall y \forall z)\ e \cdot (x \cdot (y \cdot z)) &= (x \cdot (y \cdot z)) && \text{(ПП)}\\
(\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall z_2)(x_1 \cdot x_2) \cdot ((y_1 \cdot y_2) \cdot (z_1 \cdot z_2)) &= \\
= ((x_1 \cdot x_2) \cdot (y_1 \cdot y_2)) \cdot (z_1 \cdot z_2) & && \text{(ПАсс)}
\end{aligned}
$$

Обозначим $\mathbf{a} := e \cdot e, \mathbf{b} := (e \cdot e) \cdot e, \Delta = \{$(Конст), (ЛЛ), (ЛП), (ПЛ), (ПП), (ПАсс)$\}$. Покажем, что свободная система многообразия $\mathbf{M}$ выглядит следующим образом:

$$\mathcal{F}_\Sigma(e)/\sim_\Delta = \{e, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{aa}, \mathbf{ab}, \mathbf{ba}, \mathbf{bb}, \mathbf{aaa}, \ldots\}$$

(если убрать первый элемент, то мы заметим, что это - свободная полугруппа на порождающих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$).

Пусть $F = \mathcal{F}_\Sigma(e)$ — алгебра, порожденная константным символом e и операцией «$\cdot$». Ее элементы можно записывать в виде слов, правильно расставляя скобки (у нас нет ассоциативности), например: $(ee)(ee)$. Операция «$\cdot$» сходна с операцией конкатенации, только необходимо ставить скобки.

Введем обозначение:

$$|w| = \begin{cases} 1, & w = e; \\ |v| + |u|, & w = v \cdot u. \end{cases}$$

В некотором смысле это *длина терма* w.

Предложение 4. *Любое слово $w \in F$, для которого $|w| \geqslant 2$, однозначно представимо в $F/\sim_\Delta$ в виде слова из букв $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, где $\mathbf{a} = [(ee)]$ и $\mathbf{b} = [(ee)e]$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся индукцией по $n = |w|$. Поскольку $|w| \geqslant 2$, то $w = u \cdot v$.

БАЗА:

- $|w| = 2$. Очевидно, что $w = (e \cdot e)$, т. е. $[w] = \mathbf{a}$.
- $|w| = 3$. Тогда $w = (ee)e$, либо $w = e(ee)$, т. е. $[w] = \mathbf{b}$.

ШАГ ИНДУКЦИИ: $|w| \geqslant 4$.
Рассмотрим по порядку следующие случаи: 1) $u = e, |v| \geqslant 3$; 2) $u = (ee), |v| \geqslant 2$; 3) $u = (ee)e$ или $u = e(ee), |v| \geqslant 1$; 4) $|u| \geqslant 4, |v| \geqslant 1$.

(1) $u = e, |v| \geqslant 3$. Тогда $v = v_1 \cdot v_2$. Возможны два подслучая:

а) $v_1 = e$, тогда $|v_2| \geqslant 2$ и $v_2 = v_2' \cdot v_2''$. Поэтому

$$[w] = [uv] = [e(v_1 v_2)] = [e(e(v_2' v_2''))] \overset{\text{(ПП)}}{=} [(e(v_2' v_2''))] = [v]$$

по индукционному предположению v представимо;

б) $|v_1| \geqslant 2$, тогда $v_1 = v_1' \cdot v_1''$. Поэтому

$$[w] = [uv] = [e((v_1' v_1'')v_2)] \overset{\text{(ПЛ)}}{=} [((v_1' v_1'')v_2)] = [v].$$

(2) Пусть $u = (ee), |v| \geqslant 2$. Тогда $[u] = \mathbf{a}$ и $v = v_1 \cdot v_2$. Возможны три подслучая:

а) $|v| \geqslant 4$, тогда v представимо, и $[w] = \mathbf{a}[v]$ — искомое слово;

б) $|v| = 3$, т. е. $[v] = \mathbf{b}$. Тогда $[w] = [uv] = \mathbf{ab}$;

в) $|v| = 2$, т. е. $[v] = \mathbf{a}$. Тогда $[w] = [uv] = [(ee)(ee)] = \mathbf{aa}$.

(3) Пусть $|u| = 3, |v| \geqslant 1$. Тогда $[u] = \mathbf{b}$ и для v возможны четыре подслучая:

а) $|v| \geqslant 4$, тогда v представимо, и $[w] = \mathbf{b}[v]$ — искомое слово;

б) $|v| = 3$, т. е. $[v] = \mathbf{b}$. Тогда $[w] = [uv] = \mathbf{bb}$;

в) $|v| = 2$, т. е. $[v] = \mathbf{a}$. Тогда $[w] = [uv] = [(e(ee))(ee)] = \mathbf{ba}$;

г) $|v| = 1$, т. е. $v = e$. Тогда

$$[w] = [uv] = [((ee)e)e] \overset{\text{(ЛЛ)}}{=} \mathbf{b}.$$

(4) Пусть $|u| \geqslant 4, |v| \geqslant 1$. Тогда $u = u_1 \cdot u_2$, где u_1 и u_2 — представимы. Для v возможны четыре подслучая:

а) $|v| \geqslant 4$, тогда v представимо, и $[w] = [u_1][u_2][v]$ — искомое слово;

б) $|v| = 3$. Тогда $[w] = [u_1][u_2]\mathbf{b}$;

в) $|v| = 2$. Тогда $[w] = [u_1][u_2]\mathbf{a}$;

г) $|v| = 1$. Поскольку $|u_1| + |u_2| \geqslant 4$, то либо $u_1 = u_1' \cdot u_1''$, либо $u_2 = u_2' \cdot u_2''$. В первом варианте получаем

$$[w] = [((u_1' \cdot u_1'') \cdot u_2)e] \overset{\text{(ЛЛ)}}{=} [(u_1' \cdot u_1'') \cdot u_2] = [u] \text{ — представимо.}$$

Во втором —

$$[w] = [(u_1 \cdot (u_2' \cdot u_2''))e] \overset{\text{(ЛП)}}{=} [u_1 \cdot (u_2' \cdot u_2'')] = [u] \text{ — представимо.}$$

Заметим, что тождество (ПАсс) обеспечивает нам ассоциативность только тех элементов w, у которых $|w| \geqslant 2$. Поэтому мы можем представить $[w]$ в виде слова без скобок. Ясно, что каждому слову из алфавита $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ соответствует непустое множество (класс) элементов из F, так же как и одному элементу соответствует только одно слово из алфавита $\mathbf{a}, \mathbf{b}$.

Теперь пусть задана свободная полугруппа $\mathfrak{M} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ на двух порождающих $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Очевидно, что $F/\sim_\Delta = \mathfrak{M} \cup \{e\}$ и верно.

Следствие 1. *Проблема распознавания конечности системы* $F/\sim_{\Delta\cup\Delta_1}$, *где* Δ_1 *— дополнительно заданные на системе тождества, эквивалентна проблеме распознавания конечности* $\mathfrak{M}_1 = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \mid \Delta_1 \rangle$.

Теперь пусть задана некоторая конечная сигнатура. Если в ней есть $(n+2)$-арная операция f и хотя бы одна константа, то, задав тождество

$$(\forall xy \forall \bar{x} \forall \bar{y})\ f(x, y, \bar{x}) = f(x, y, \bar{y}),$$

получаем фактическую бинарную операцию (значение функции не зависит от переменных x_i), остальные функции $g \in \Sigma$ определяем тождествами

$$(\forall \bar{x} \forall \bar{y})\ g(\bar{x}) = g(\bar{y}).$$

В этом случае, в силу последней теоремы, конечность не распознается.

Если в сигнатуре присутствуют константы, то там, где не существует алгоритма, распознающего конечность, они ничего не меняют, так как их можно считать порождающими свободной системы.

Таким образом, не существует общего алгоритма распознавания конечности свободных систем в сигнатуре, содержащей одну бинарную операцию и одну константу.

Список литературы

1. *Адян С. И., Дурнев В. Г.* Алгоритмические проблемы для групп и полугрупп // Успехи мат. наук. 2000. Т. 55, № 2. С. 4–94.
2. *Гончаров С. С.* Модели данных и языки их описаний // Вычислительные системы. № 107. С. 52–70.
3. *Горбунов В. А.* Алгебраическая теория квазимногообразий. Новосибирск: Научная книга, 1999.
4. *Ильичева О. А.* О семантике квазитождеств, определяющих модели констант // Вычислительные системы. № 116. С. 16–32.
5. *Касымов Н. Х., Морозов А. С.* Логические аспекты теории абстрактных типов данных // Вычислительные системы. № 122. С. 73–96.
6. *Мальцев А. И.* Алгебраические системы. М.: Наука, 1970. С. 312–322.
7. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. М.: Наука, 1986, Сю 254–263.
8. *Марков А. А.* Теория алгорифмов // Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. 1954. № 42.
9. *Попов В. Ю.* Марковские свойства бернсайдовских многообразий групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 1. С. 94–106.

Материал поступил в редколлегию 23.03.2005

Адрес автора

ПАВЛОВСКИЙ Евгений Николаевич

РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск

ул. Пирогова 2

Новосибирский государственный университет

e-mail: euxsun@gmail.com