УДК 517.9

М. В. Нещадим

КАСАТЕЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЯ КЭЛИ–ДАРБУ*

В работе доказывается, что группа касательных преобразований Ли уравнения Кэли—Дарбу совпадает с группой точечных преобразований Ли и совпадает с группой конформных преобразований.

Ключевые слова: уравнение Кэли–Дарбу, групповой анализ дифференциальных уравнений.

Уравнение Кэли–Дарбу имеет вид [1. С. 69]:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{22} & c_{33} & 2c_{12} & 2c_{23} & 2c_{31} \\ u_{11} & u_{22} & u_{33} & 2u_{12} & 2u_{23} & 2u_{31} \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ u_1 & 0 & 0 & u_2 & 0 & u_3 \\ 0 & u_2 & 0 & u_1 & u_3 & 0 \\ 0 & 0 & u_3 & 0 & u_2 & u_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{1}$$

Здесь $u = u(x_1, x_2, x_3)$ — функция от переменных x_1, x_2, x_3, $u_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $u_{ijk} = \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$, $c_{ij} = \sum_{s=1}^{3}(u_s u_{ijs} - 2u_{is}u_{js})$, $i, j, k = 1, 2, 3$ (функция $u = u(x_1, x_2, x_3)$ и все другие рассматриваемые функции в работе предполагаются достаточно гладкими). Функция $u = u(x_1, x_2, x_3)$ удовлетворяет уравнению Кэли–Дарбу тогда и только тогда, когда семейство поверхностей $u(x_1, x_2, x_3) = C$ (где $C = \mathrm{const}$) можно включить в триортогональную систему поверхностей в пространстве $R^3(x_1, x_2, x_3)$ [1. С. 69; 2. С. 92]. В [1. С. 70] показано, что уравнение (1) выдерживает конформные преобразования и только их. Ортогональным системам координат посвящена обширная литература (см., например, [3–5]).

В настоящей работе на основе техники группового анализа дифференциальных уравнений [6] доказана

Теорема 1. *Группа касательных преобразований уравнения (1) совпадает с группой точечных преобразований Ли.*

В процессе доказательства теоремы передоказывается то, что группа точечных преобразований Ли уравнения (1) совпадает с группой конформных преобразований. Отметим, что в работе рассматриваются только инфинитезимальные преобразования.

Приступим к доказательству того, что группа точечных преобразований Ли уравнения (1) совпадает с группой конформных преобразований.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06–01–00439), Интеграционного гранта СО РАН (проекты № 2.15, 48–2006).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 1. С. 39–44

Пусть
$$V=\eta_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\eta_2\frac{\partial}{\partial x_2}+\eta_3\frac{\partial}{\partial x_3}+\pi\frac{\partial}{\partial u} \tag{2}$$
— оператор инфинитезимального преобразования, где $\eta_i=\eta_i(x_1,x_2,x_3,u)$, $\pi=\pi(x_1,x_2,x_3,u)$, $i=1,2,3$.

Так как уравнение (1) третьего порядка, то необходимо сделать третье продолжение оператора V. По стандартным формулам продолжения [6. С. 56] находим, что третье продолжение V^3 оператора V имеет вид
$$V^3=V+\sum_{i=1}^{3}\pi^i\frac{\partial}{\partial u_i}+\sum_{1\le i\le j\le 3}\pi^{ij}\frac{\partial}{\partial u_{ij}}+\sum_{1\le i\le j\le k\le 3}\pi^{ijk}\frac{\partial}{\partial u_{ijk}}, \tag{3}$$
где
$$\begin{aligned}\pi^i&=D_i(\pi)-\sum_{s=1}^{3}u_sD_i(\eta_s),\\ \pi^{ij}&=D_j(\pi^i)-\sum_{s=1}^{3}u_{is}D_j(\eta_s),\\ \pi^{ijk}&=D_k(\pi^{ij})-\sum_{s=1}^{3}u_{ijs}D_k(\eta_s),\end{aligned} \tag{4}$$
и через D_i обозначен оператор полного дифференцирования по переменной x_i, $i=1,2,3$.

Обозначим через Δ левую часть уравнения (1). Применим оператор V^3 к Δ. Если V^3 допускается уравнением (1), то $V^3(\Delta)=0$ при условии, что $\Delta=0$. Это можно записать следующим образом:
$$V^3(\Delta)=\Delta\cdot F, \tag{5}$$
где $F=F(x_1,x_2,x_3,u,u_1,...,u_{333})$ — некоторая функция, зависящая от переменных x_1, x_2, x_3, функции u и ее производных до третьего порядка. В силу формул (4) коэффициенты оператора V^3 зависят от третьих производных u_{ijk} линейно. Также отметим, что Δ зависит от третьих производных u_{ijk} линейно. Поэтому и $V^3(\Delta)$ зависит от u_{ijk} линейно. Но тогда F не зависит от третьих производных функции u, т. е. $F=F(x_1,x_2,x_3,u,u_1,...,u_{33})$.

Далее найдем коэффициент при u_{111} в $V^3(\Delta)$. Заметим, что u_{111} встречается только в коэффициентах π^{11k}, $k=1,2,3$, продолженного оператора. Опуская вычисления, приведем окончательный результат:
$$\begin{aligned}V^3(\Delta)\equiv u_{111}\quad&\cdot\Big\{\Delta_{11}\Big(u_1\tfrac{\partial\pi}{\partial u}-3u_1\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_1}-4u_1^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}-u_1u_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}-u_1u_3\tfrac{\partial\eta_3}{\partial u}-\\ &-u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}-u_2^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}-u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3}-u_3^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)-\\ &-2u_1\Delta_{12}\Big(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)-2u_1\Delta_{31}\Big(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3}+u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)+V^3(u_1\Delta_{11})\Big\}.\end{aligned}$$
Здесь введены следующие обозначения. 1. Знак $\equiv$ использован для отбрасывания слагаемых, не содержащих u_{111}. 2. Δ_{ij} — алгебраическое дополнение к месту, где стоит c_{ij}, в определителе Δ.

Так как произведение ΔF содержит u_{111} только в слагаемом $u_1\Delta_{11}Fu_{111}$, то должно выполняться равенство
$$\begin{aligned}u_1\Delta_{11}F=\quad&\Delta_{11}\Big(u_1\tfrac{\partial\pi}{\partial u}-3u_1\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_1}-4u_1^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}-u_1u_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}-u_1u_3\tfrac{\partial\eta_3}{\partial u}-\\ &-u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}-u_2^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}-u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3}-u_3^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)-\\ &-2u_1\Delta_{12}\Big(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2}+u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)-2u_1\Delta_{31}\Big(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3}+u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\Big)+\\ &+V^3(u_1\Delta_{11}).\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогично, вычисляя коэффициент при u_{222} в $V^3(\Delta)$ и замечая, что произведение ΔF содержит u_{222} только в слагаемом $u_2\Delta_{22}Fu_{222}$, получаем, что должно выполняться равенство

$$\begin{aligned} u_2\Delta_{22}F = \ & \Delta_{22}\left(u_2\tfrac{\partial\pi}{\partial u} - u_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} - u_1^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u} - 3u_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_2} - 4u_2^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u} - \right. \\ & \left. - u_1u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u} - u_2u_3\tfrac{\partial\eta_3}{\partial u} - u_3\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_3} - u_3^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) - \\ & - 2u_2\Delta_{12}\left(\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + u_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) - 2u_2\Delta_{23}\left(\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_3} + u_3\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) + \\ & + V^3(u_2\Delta_{22}). \end{aligned} \tag{7}$$

Исключая из (6) и (7) неизвестную функцию F, получим соотношение

$$\begin{aligned} & u_2\Delta_{22}\left\{\Delta_{11}\left(u_1\tfrac{\partial\pi}{\partial u} - 3u_1\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_1} - 4u_1^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u} - u_1u_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u} - u_1u_3\tfrac{\partial\eta_3}{\partial u} - \right.\right. \\ & \left. - u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2} - u_2^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u} - u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3} - u_3^2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\right) - \\ & \left. - 2u_1\Delta_{12}\left(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\right) - 2u_1\Delta_{31}\left(\tfrac{\partial\eta_1}{\partial x_3} + u_3\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u}\right) + V^3(u_1\Delta_{11})\right\} = \\ & = u_1\Delta_{11}\left\{\Delta_{22}\left(u_2\tfrac{\partial\pi}{\partial u} - u_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} - u_1^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u} - 3u_2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_2} - 4u_2^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u} - \right.\right. \\ & \left. - u_1u_2\tfrac{\partial\eta_1}{\partial u} - u_2u_3\tfrac{\partial\eta_3}{\partial u} - u_3\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_3} - u_3^2\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) - \\ & \left. - 2u_2\Delta_{12}\left(\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_1} + u_1\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) - 2u_2\Delta_{23}\left(\tfrac{\partial\eta_2}{\partial x_3} + u_3\tfrac{\partial\eta_2}{\partial u}\right) + V^3(u_2\Delta_{22})\right\}, \end{aligned} \tag{8}$$

которое должно выполняться тождественно по переменным x_1, x_2, x_3, u, u_1, u_2, u_3, u_{11}, u_{12}, u_{13}, u_{22}, u_{23}, u_{33}. Причем от производных $u_1, ..., u_{33}$ это соотношение зависит полиномиально.

Подсчитав соотношение (8) при $u_1 = 0$ и сократив на ненулевой множитель, получим

$$u_2\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + u_2^2\frac{\partial\eta_1}{\partial u} + u_3\frac{\partial\eta_1}{\partial x_3} + u_3^2\frac{\partial\eta_1}{\partial u} = \frac{\partial\pi}{\partial x_1} - u_2\frac{\partial\eta_2}{\partial x_1} - u_3\frac{\partial\eta_3}{\partial x_1}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\eta_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\eta_3}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial\eta_1}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = 0.$$

Так как уравнение (1) симметрично относительно переменных x_1, x_2, x_3, то полученную систему соотношений можно дополнить до следующей:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\eta_1}{\partial u} = \frac{\partial\eta_2}{\partial u} = \frac{\partial\eta_3}{\partial u} = 0, \\ & \frac{\partial\pi}{\partial x_1} = \frac{\partial\pi}{\partial x_2} = \frac{\partial\pi}{\partial x_3} = 0, \\ & \frac{\partial\eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial\eta_2}{\partial x_1} = \frac{\partial\eta_1}{\partial x_3} + \frac{\partial\eta_3}{\partial x_1} = \frac{\partial\eta_2}{\partial x_3} + \frac{\partial\eta_3}{\partial x_2} = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Из первой серии соотношений (9) следует, что функции η_1, η_2, η_3 зависят только от переменных x_1, x_2, x_3. Из второй серии соотношений (9) получаем, что $\pi = \pi(u)$.

Нетрудно показать, что если u решение (1), то $f(u)$ также решение для любой функции f. Поэтому и коэффициент $\pi(u)$ может быть произвольным. Значит, можно положить $\pi = 0$.

Далее упростим соотношение (8) с помощью (9) и вышеприведенных замечаний. В так полученном соотношении найдем коэффициент при $u_{33}^2u_1^3u_2^3u_3^3$. Получим

$$\frac{\partial\eta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial\eta_2}{\partial x_2}.$$

Ввиду симметрии уравнения (1) дополним его до системы

$$\frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} = \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} = \frac{\partial \eta_3}{\partial x_3}. \tag{10}$$

Соотношения (9), (10) составляют полную систему определяющих соотношений для нахождения операторов локальных симметрий уравнения (1).

Система соотношений (9), (10) на функции η_1, η_2, η_3 может быть явно проинтегрирована [6. С. 356], и ее общее решение имеет вид

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= a_0 + kx_1 + ax_2 + bx_3 + \alpha(x_1^2 - x_2^2 - x_3^2) + 2x_1(\beta x_2 + \gamma x_3),\\
\eta_2 &= b_0 - ax_1 + kx_2 + cx_3 + \beta(x_2^2 - x_1^2 - x_3^2) + 2x_2(\alpha x_1 + \gamma x_3),\\
\eta_1 &= c_0 - bx_1 - cx_2 + kx_3 + \gamma(x_3^2 - x_1^2 - x_2^2) + 2x_3(\alpha x_1 + \beta x_2),
\end{aligned} \tag{11}$$

где a_0, b_0, c_0, k, a, b, c, α, β, γ — произвольные вещественные числа.

Итак, любой инфинитезимальный оператор точечных преобразований уравнения (1) является линейной комбинацией с постоянными коэффициентами операторов

$$\begin{aligned}
&V_1 = \tfrac{\partial}{\partial x_1},\ V_2 = \tfrac{\partial}{\partial x_2},\ V_3 = \tfrac{\partial}{\partial x_3},\ V_4 = x_1\tfrac{\partial}{\partial x_1} + x_2\tfrac{\partial}{\partial x_2} + x_3\tfrac{\partial}{\partial x_3},\\
&V_5 = x_2\tfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1\tfrac{\partial}{\partial x_2},\ V_6 = x_3\tfrac{\partial}{\partial x_1} - x_1\tfrac{\partial}{\partial x_3},\ V_7 = x_2\tfrac{\partial}{\partial x_3} - x_3\tfrac{\partial}{\partial x_2},\\
&V_8 = (x_1^2 - x_2^2 - x_3^2)\tfrac{\partial}{\partial x_1} + 2x_1x_2\tfrac{\partial}{\partial x_2} + 2x_1x_3\tfrac{\partial}{\partial x_3},\\
&V_9 = 2x_1x_2\tfrac{\partial}{\partial x_1} + (x_2^2 - x_1^2 - x_3^2)\tfrac{\partial}{\partial x_2} + 2x_2x_3\tfrac{\partial}{\partial x_3},\\
&V_{10} = 2x_1x_3\tfrac{\partial}{\partial x_1} + 2x_2x_3\tfrac{\partial}{\partial x_2} + (x_3^2 - x_1^2 - x_2^2)\tfrac{\partial}{\partial x_3},\\
&V_{11} = \pi(u)\tfrac{\partial}{\partial u},
\end{aligned} \tag{12}$$

где $\pi(u)$ — произвольная функция от переменной u. Операторы V_1, V_2, V_3 соответствуют преобразованиям параллельного переноса вдоль координатных осей x_1, x_2, x_3, оператор V_4 соответствует согласованному растяжению переменных x_1, x_2, x_3, операторы V_5, V_6, V_7 соответствуют преобразованиям поворота относительно координатных осей x_3, x_2, x_1, операторы V_8, V_9, V_{10} соответствуют проективным преобразованиям относительно координатных осей x_1, x_2, x_3 и оператор V_{11} соответствует произвольному преобразованию функции u.

Перейдем к нахождению касательных преобразований уравнения (1).

Как известно [6. С. 360], группа касательных преобразований порождается оператором

$$\begin{aligned}
V^1 = {}&\tfrac{\partial W}{\partial u_1}\tfrac{\partial}{\partial x_1} + \tfrac{\partial W}{\partial u_2}\tfrac{\partial}{\partial x_2} + \tfrac{\partial W}{\partial u_3}\tfrac{\partial}{\partial x_3} + \Big(u_1\tfrac{\partial W}{\partial u_1} + u_2\tfrac{\partial W}{\partial u_2} + u_3\tfrac{\partial W}{\partial u_3} - W\Big)\tfrac{\partial}{\partial u} -\\
&- \Big(\tfrac{\partial W}{\partial x_1} + u_1\tfrac{\partial W}{\partial u}\Big)\tfrac{\partial}{\partial u_1} - \Big(\tfrac{\partial W}{\partial x_2} + u_2\tfrac{\partial W}{\partial u}\Big)\tfrac{\partial}{\partial u_2} - \Big(\tfrac{\partial W}{\partial x_3} + u_3\tfrac{\partial W}{\partial u}\Big)\tfrac{\partial}{\partial u_3},
\end{aligned} \tag{13}$$

где $W = W(x_1, x_2, x_3, u, u_1, u_2, u_3)$ — некоторая функция от указанных переменных.

Вычисление группы (определение функции W) происходит по стандартной схеме: 1. Находится второе продолжение V^3 оператора (13). 2. Оператор V^3 применяется к уравнению (1), и полученное соотношение рассматривается при условии, что справедливо соотношение (1).

В силу формул (4) коэффициенты продолженного оператора V^3 зависят от третьих производных u_{ijk} линейно. Поэтому и $V^3(\Delta)$ зависит от u_{ijk} линейно. Значит, так же как и в случае точечных преобразований, получаем равенство

$$V^3(\Delta) = \Delta \cdot F, \tag{14}$$

где $F = F(x_1, x_2, x_3, u, u_1, ..., u_{33})$ — некоторая функция, зависящая от переменных x_1, x_2, x_3, функции u и ее производных до второго порядка. Причем соотношение (14) является тождеством.

Пусть $L(i,j,k)$ и $\Delta(i,j,k)$ — коэффициенты при u_{ijk} в левой части уравнения (14) и в выражении Δ, соответственно. Тогда разность

$$R(i,j,k;p,q,r) = L(i,j,k)\Delta(p,q,r) - L(p,q,r)\Delta(i,j,k),$$

ввиду того, что (14) тождество линейное по производным u_{ijk}, должна тождественно обращаться в нуль для всех наборов $(i,j,k;p,q,r)$.

Вычисления показывают, что при u_{33}^3 в $R(1,1,1;2,2,2)$ с точностью до ненулевого множителя стоит разность $u_2\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_3} - u_1\frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_3}$. Следовательно,

$$u_2\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_3} - u_1\frac{\partial^2 W}{\partial u_2 \partial u_3} = 0. \tag{15}$$

Аналогично, получаем соотношение

$$u_2\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_3} - u_3\frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = 0. \tag{16}$$

По модулю соотношений (15), (16) можно показать, что коэффициенты при $u_{11}u_{12}u_{22}$, $u_{11}u_{13}u_{22}$, $u_{11}u_{22}u_{33}$ в $R(1,1,1;2,2,2)$ равны, соответственно,

$$\begin{aligned}
&W_{11}u_1u_2\left(3u_3^2 + 3u_1^2 - u_2^2\right) + W_{12}\left(u_2^4 + u_2^2u_3^2 - u_1^2u_3^2 - u_1^4\right) + \\
&+ W_{22}u_1u_2\left(u_1^2 - 3u_2^2 - 3u_3^2\right) = 0, \\
&W_{11}u_1u_2\left(4u_3^2 - 3u_1^2\right) + W_{12}\left(u_1^4 + u_2^4 + u_2^2u_3^2 - 4u_1^2u_2^2 - 6u_1^2u_3^2\right) - \\
&- W_{22}u_1u_2\left(3u_2^2 + 3u_3^2\right) = 0, \\
&W_{11}u_1u_2 + W_{12}\left(u_2^2 - u_1^2\right) - W_{22}u_1u_2 = 0,
\end{aligned}$$

где $W_{ij} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j}$. Рассмотрим эти соотношения как систему линейных однородных уравнений относительно производных W_{ij}. Ее определитель не равен нулю. Следовательно,

$$\frac{\partial^2 W}{\partial {u_1}^2} = \frac{\partial^2 W}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 W}{\partial {u_2}^2} = 0.$$

Учитывая соотношения (15), (16) и симметрию уравнения (1) относительно переменных x_1, x_2, x_3, получаем, что

$$\frac{\partial^2 W}{\partial u_i \partial u_j} = 0, \quad i,j = 1,2,3. \tag{17}$$

Следовательно, W — линейная функция относительно переменных u_1, u_2, u_3.

Представим ее в виде

$$W = W_0 + W_1u_1 + W_2u_2 + W_3u_3,$$

где $W_i = W_i(x_1, x_2, x_3, u)$, $i = 0,1,2,3$, и подставим данное представление в формулу (13). Получим, что оператор V^1 является первым продолжением оператора

$$V = W_1\frac{\partial}{\partial x_1} + W_2\frac{\partial}{\partial x_2} + W_3\frac{\partial}{\partial x_3} - W_0\frac{\partial}{\partial u}. \tag{18}$$

Сравнивая (18) и (2), делаем вывод, что оператор (13) касательных преобразований является первым продолжением оператора точечных преобразований. Следовательно, группа касательных преобразований совпадает со своей подгруппой точечных преобразований.

Теорема доказана.

Список литературы

1. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей. ОГИЗ. Гостехиздат. 1948. Т. 2.

2. *Аминов Ю. А.* Геометрия векторного поля. М.: Наука. 1990.

3. *Егоров Д. Ф.* Работы по дифференциальной геометрии. М.: Наука. 1970.

4. *Павлов М. В.* Интегрируемость егоровских систем гидродинамического типа // ТМФ. 2007. Т. 150, № 2. С. 263–285.

5. *Zakharov V. E.* Description of the n-orthogonal Curvilinear Coordinate Systems and Hamiltonian Integrable Systems of Hydrodynamic Type, I:Integration of the Lame Equations// Duke Math. J. 1998. Vol. 94. No. 1. P. 103–140.

6. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука. 1978.

Материал поступил в редколлегию 19.11.2007

Адрес автора

НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: neshch@math.nsc.ru