УДК 539.3+517.958

Г. В. Алексеев, А. М. Хлуднев

ТРЕЩИНА В УПРУГОМ ТЕЛЕ, ВЫХОДЯЩАЯ НА ГРАНИЦУ ПОД НУЛЕВЫМ УГЛОМ*

В работе исследуются вопросы разрешимости краевых задач о равновесии упругих тел, содержащих трещину. Предполагается, что трещина выходит на границу под нулевым углом, а упругое тело может содержать жесткое включение. При этом на берегах трещины заданы краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств и описывающие взаимное непроникание берегов трещины.

Ключевые слова: трещина, негладкая граница, разрешимость, нелинейные краевые условия, жесткое включение, неравенство Корна.

Введение

Как известно, при доказательстве разрешимости краевых задач теории упругости значительную роль играет справедливость неравенства Корна в рассматриваемой области. Для выполнения неравенства Корна нужно располагать определенной гладкостью границы области. В случае, если граница не гладкая, в частности, если разрез (трещина) выходит на внешнюю границу под нулевым углом, неравенство Корна может не выполняться (см., например, [1–3]). Как следствие, доказательство разрешимости задачи равновесия упругого тела, имеющего такую границу, становится серьезной проблемой. В работе предлагается способ, позволяющий доказывать разрешимость указанных задач. Этот способ базируется на методе фиктивных областей, примененном к нелинейной задаче о равновесии упругого тела, содержащего трещину. Основные идеи метода фиктивных областей для задач с краевыми условиями типа неравенств и с границами, не содержащими нулевых углов, были изложены в [4–5]. Суть метода состоит в следующем. В расширенной области, содержащей трещину, рассматривается семейство краевых задач, зависящих от параметра. При каждом значении параметра задача однозначно разрешима, поскольку геометрия расширенной области позволяет использовать неравенство Корна. Оказывается, что при стремлении параметра к нулю решения семейства вспомогательных задач сходятся к решению исходной задачи. В данной работе показано, что метод фиктивных областей может применяться и в случаях границ, имеющих нулевые углы, что позволяет установить разрешимость широкого класса задач о равновесии упругих тел с трещинами, выходящими на внешнюю границу под нулевым углом. Важно отметить, что на берегах трещины задаются краевые условия, имеющие вид равенств и неравенств. Эти условия не позволяют противоположным берегам трещины проникать друг в друга. Как следствие, рассматриваемые краевые задачи являются нелинейными. В то же время все установленные в работе утверждения о разрешимо-

*Работа выполнена при финансовой поддержке интеграционного проекта СО РАН, выполняемого совместно со сторонними организациями (проект № 90).

сти краевых задач будут справедливы и в более простом линейном случае, т. е. если на берегах трещины задавать равенство нулю поверхностных сил. Для удобства читателя в первом пункте мы формулируем линейную задачу о равновесии упругого тела с трещиной, выходящей на внешнюю границу под нулевым углом, однако все последующие рассуждения и обоснования приводим для нелинейных задач, т. е. задач с нелинейными краевыми условиями на берегах трещины. Не составляет труда сформулировать постановки и соответствующие утверждения о разрешимости для линейных краевых задач во втором и последующих пунктах.

§ 1. Краевое условие Дирихле на внешней границе

§ 1.1. *Линейная задача*

Пусть $\Omega_1 \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ_1, а $\gamma \subset \Omega_1$ — гладкая кривая без самопересечений, выходящая одним концом на Γ_1 под нулевым углом (рис. 1). Предполагается, что другой конец кривой γ может быть продолжен так, что продолжение пересекает границу Γ_1 под ненулевым углом. Обозначим через $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2)$ единичный вектор нормали к γ, $\Omega_1^\gamma = \Omega_1 \setminus \bar{\gamma}$. В области Ω_1^γ будем рассматривать задачу о равновесии неоднородного анизотропного упругого тела с трещиной (разрезом) γ. Постановка такой задачи состоит в следующем. Требуется найти функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{1}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{3}$$

$$\sigma\nu = 0 \quad \text{на} \quad \gamma^\pm. \tag{4}$$

Здесь u — вектор перемещений, σ — тензор напряжений, $\sigma\nu = (\sigma_{1j}\nu_j, \sigma_{2j}\nu_j)$, компоненты тензора деформаций обозначены $\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})$;

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}, \quad i, j = 1, 2.$$

Тензор модулей упругости $A = \{a_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, задан и удовлетворяет обычным свойствам симметрии и положительной определенности

$$a_{ijkl}\,\xi_{kl}\,\xi_{ij} \geq c_0|\xi|^2, \quad \forall\ \xi_{ij}\ \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 > 0 - \mathrm{const},$$

$a_{ijkl} = a_{klij} = a_{jikl}$, $a_{ijkl} \in L^\infty_{loc}(R^2)$. Считаем также $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \in L^2_{loc}(R^2)$. Эти же условия на тензор A и внешние нагрузки $\mathbf{f}$ считаются выполненными и во всех последующих пунктах.

Отметим, что (1) является уравнением равновесия, а (2) — закон Гука, $\sigma = \sigma(\mathbf{u})$.

Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам. По повторяющимся индексам проводится суммирование.

Поскольку область Ω_1^γ не является липшицевой, первое неравенство Корна в этой области, вообще говоря, не справедливо. Таким образом, прямой вариационный метод

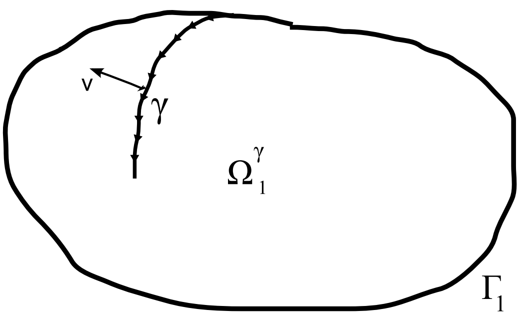

Рис. 1. Область Ω_1^γ с разрезом γ

минимизации функционала энергии для доказательства существования решения задачи (1)–(4) не приводит к цели. Мы предложим метод фиктивных областей применительно к задаче (1)–(4), позволяющий доказать разрешимость этой задачи. Как уже было отмечено во введении, все рассуждения будем проводить для более сложной модели, именно, когда вместо (4) на γ заданы нелинейные краевые условия. Соответствующие утверждения о разрешимости для линейной задачи (1)–(4) в этом случае будут являться простым следствием.

§ 1.2. *Нелинейная задача*

Пусть выполнены все предположения о входящих данных и о геометрии области, принятые в предыдущем пункте (см. рис. 1). Вместо краевых условий (4) рассмотрим нелинейные краевые условия на берегах трещины. Постановка задачи о равновесии упругого тела с трещиной γ такая. Найти функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{5}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{6}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{7}$$

$$[\mathbf{u}]\nu \geq 0, \ [\sigma_\nu] = 0, \ \sigma_\nu \cdot [\mathbf{u}]\nu = 0, \ \sigma_\nu \leq 0, \ \sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{8}$$

Здесь $[v] = v^+ - v^-$ — скачок функции v на γ, а знаки $\pm$ соответствуют положительному и отрицательному направлениям нормали ν;

$$\sigma_\nu = \sigma_{ij}\nu_j\nu_i, \quad \sigma_\tau = \sigma\nu - \sigma_\nu \cdot \nu, \quad \sigma_\tau = (\sigma_\tau^1, \sigma_\tau^2),$$

Первое условие в (8) описывает взаимное непроникание берегов трещины, а два последних соотношения в (8) следует понимать так: $\sigma_\nu \leq 0$, $\sigma_\tau = 0$ на $\gamma^\pm$ (по поводу краевых условий (8) можно обратиться к [6; 7]).

Ниже предлагается метод фиктивных областей, примененный к задаче (5)–(8) и приводящий к доказательству разрешимости. Как уже было отмечено, этот же метод применим и к линейной задаче (1)–(4). Введем в рассмотрение тензор $A^\lambda = \{a_{ijkl}^\lambda\}$, $i, j, k, l = 1, 2$, с положительным параметром λ :

$$a_{ijkl}^\lambda = \begin{cases} a_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega_1, \\ \lambda^{-1} a_{ijkl} & \text{в} \quad \Omega_2. \end{cases}$$

Фиктивная область Ω_2 выбирается так, как указано на рис. 2. Считаем, что граница $\partial\,\Omega_2$ области Ω_2 удовлетворяет условию Липшица (в частности, не содержит нулевых углов). Это же предположение считается выполненным и во всех последующих пунктах. Расширенная область $\Omega^\gamma = \Omega_1^\gamma \cup \Omega_2 \cup int(\Gamma_1 \cap \partial\Omega_2)$ обладает тем свойством, что для нее справедливо первое неравенство Корна, и, таким образом, можно доказать существование решения задачи о равновесии упругого тела, занимающего область Ω^γ с трещиной γ.

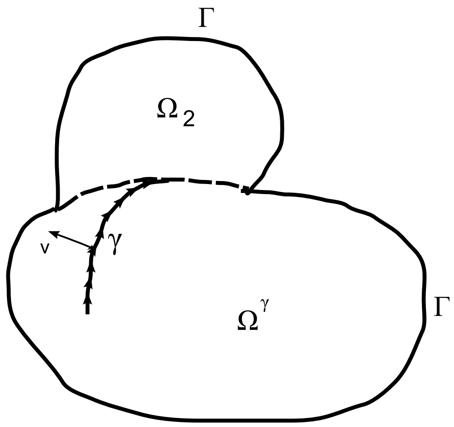

Рис. 2. Расширенная область Ω^γ и фиктивная область Ω_2

В области Ω^γ рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач. Необходимо найти функции $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\mathrm{div}\sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega^\gamma, \tag{9}$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda \varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^\gamma, \tag{10}$$

$$\mathbf{u}^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{11}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]\nu \geq 0,\ [\sigma_\nu^\lambda] = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \cdot [\mathbf{u}^\lambda]\nu = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \leq 0,\ \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{12}$$

Задача (9)–(12) при каждом $\lambda > 0$ разрешима. Приведем ее вариационную формулировку. Введем множество допустимых перемещений

$$K(\Omega^\gamma) = \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H_\Gamma^1(\Omega^\gamma) \;|\; [\mathbf{v}]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma \,\},$$

где пространство Соболева $H_\Gamma^1(\Omega^\gamma)$ определяется так:

$$H_\Gamma^1(\Omega^\gamma) = \{\, v \in H^1(\Omega_\gamma) \;|\; v = 0 \text{ на } \Gamma \,\}.$$

Задача минимизации

$$\inf_{\mathbf{v} \in K(\Omega^\gamma)} \{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \int\limits_{\Omega^\gamma} f_i v_i \}$$

имеет решение u^λ, удовлетворяющее вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^\lambda \in K(\Omega^\gamma), \tag{13}$$

$$\int\limits_{\Omega^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda) \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i^\lambda) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega^\gamma). \tag{14}$$

Из (14) следует

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) = \int\limits_{\Omega^\gamma} f_i u_i^\lambda.$$

Из этого соотношения получаем равномерные по $0 < \lambda < \lambda_0$ оценки

$$\|\mathbf{u}^\lambda\|_{H^1_\Gamma(\Omega^\gamma)} \le c, \ \|\mathbf{u}^\lambda\|^2_{H^1(\Omega_2)} \le c\lambda.$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, можно предполагать, что при $\lambda \to 0$

$$\mathbf{u}^\lambda \to \mathbf{u} \ \text{ слабо в } \ H^1_\Gamma(\Omega^\gamma), \quad \mathbf{u}^\lambda \to 0 \ \text{ сильно в } \ H^1(\Omega_2).$$

Перейдем к пределу в (13)–(14) при $\lambda \to 0$. Запишем (14) в виде

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) \ge \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i^\lambda) + \int\limits_{\Omega_2} f_i(\bar{u}_i - u_i^\lambda). \tag{15}$$

Возьмем $\bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega^\gamma)$ так, что $\bar{\mathbf{u}} = 0$ в Ω_2, и подставим в (15) в качестве тестовой функции. После перехода к пределу получим

$$\mathbf{u} \in K(\Omega_1^\gamma), \ \int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \ge \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_1^\gamma). \tag{16}$$

Здесь

$$\begin{aligned} K(\Omega_1^\gamma) &= \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1^\gamma) \ | \ [\mathbf{v}]\nu \ge 0 \ \text{ на } \ \gamma \,\}, \\ H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1^\gamma) &= \{\, v \in H^1(\Omega_1^\gamma) \ | \ v = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1 \,\}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь и далее во всех следующих пунктах после перехода к пределу при $\lambda \to 0$ мы будем говорить о сужении предельной функции на исходную область, не вводя при этом специальных обозначений для сужения.

В предположении достаточной регулярности решения $\mathbf{u}$ задачи (16) и (5)–(8) эквивалентны. Таким образом, разрешимость задачи (5)–(8) доказана. В то же время множество $K(\Omega_1^\gamma)$ выпукло, поэтому задача (16) эквивалентна задаче минимизации функционала энергии

$$\inf_{\mathbf{v} \in K(\Omega_1^\gamma)} \Big\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i v_i \Big\}.$$

Сказанное означает, что, несмотря на отсутствие коэрцитивности функционала энергии, решение задачи минимизации существует.

Нетрудно видеть, что решение задачи (16) будет единственным. В самом деле, пусть $\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2 \in K(\Omega_1^\gamma)$ — два различных решения. Имеем

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^1)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^2 - \mathbf{u}^1) \ge \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(u_i^2 - u_i^1), \ \int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^2)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2) \ge \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(u_i^1 - u_i^2).$$

Отсюда получаем

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = 0,$$

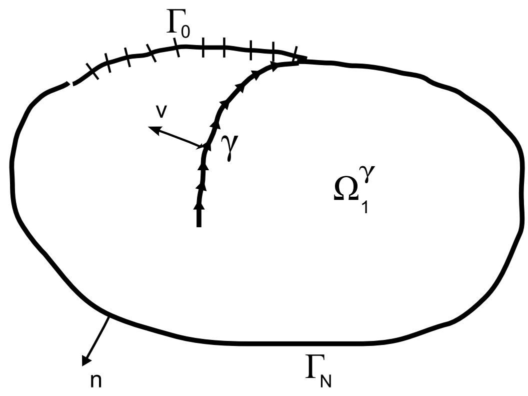

Рис. 3. Смешанные краевые условия на Γ_1

где $\mathbf{u} = \mathbf{u}^1 - \mathbf{u}^2$. Следовательно, $\mathbf{u} = \rho$, $\rho \in R(\Omega_1^\gamma)$. Через $R(\Omega_1^\gamma)$ здесь обозначено пространство инфинитезимальных жестких перемещений

$$R(\Omega_1^\gamma) = \{ \rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C,\ x \in \Omega_1^\gamma \},$$

где B — постоянная кососимметрическая матрица, C — постоянный вектор,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2); \quad b, c^1, c^2 = \mathrm{const}\,.$$

Однако $\mathbf{u} = 0$ на Γ_1, поэтому $\mathbf{u} = 0$ в Ω_1^γ, что и требовалось.

§ 2. Смешанные краевые условия на внешней границе

Рассмотрим случай других краевых условий по сравнению с (7) на внешней границе Γ_1. Предположим, что граница Γ_1 разбита на две гладкие кривые Γ_0 и Γ_N: $\Gamma_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_N$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_N = \emptyset$, причем $\mathrm{meas}\,\Gamma_0 > 0$ (см. рис. 3). На рис. 3 кривая Γ_0 заштрихована, а Γ_N не заштрихована. На Γ_0 будем задавать условие Дирихле, а на Γ_N — условие Неймана. Считаем, что кривая γ выходит на внешнюю границу Γ_1 в точке, являющейся точкой смены краевых условий, причем угол между γ и Γ_0 в этой точке является нулевым. Обозначим через $n = (n_1, n_2)$ единичный вектор внешней нормали к Γ_1. Рассмотрим следующую краевую задачу. В области Ω_1^γ найти функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\},\ i, j = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{17}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{18}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{19}$$

$$\sigma n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N, \tag{20}$$

$$[\mathbf{u}]\nu \ge 0,\ [\sigma_\nu] = 0,\ \sigma_\nu \cdot [\mathbf{u}]\nu = 0,\ \sigma_\nu \le 0,\ \sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{21}$$

Расширим область Ω_1^γ так, как указано на рис. 4, добавляя фиктивную область Ω_2. Расширенную область обозначим через Ω_Σ^γ. Эта область имеет разрез $\gamma \cup \Sigma$, а ее внешняя граница обозначена через Γ.

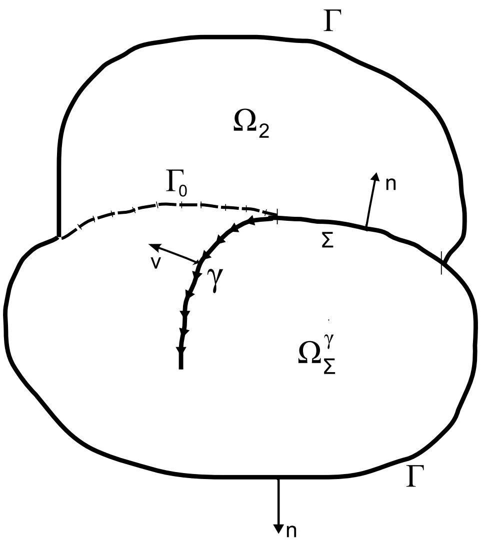

Рис. 4. Расширенная область Ω_Σ^γ и фиктивная область Ω_2

В области Ω_Σ^γ рассмотрим задачу, зависящую от параметра $\lambda > 0$. Именно, введем тензор A^λ так же, как и в предыдущем разделе. Требуется найти функции $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div} \sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega_\Sigma^\gamma, \tag{22}$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda \varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\Sigma^\gamma, \tag{23}$$

$$\mathbf{u}^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_2 \setminus (\Gamma_0 \cup \Sigma), \tag{24}$$

$$\sigma^\lambda n = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma^\pm, \tag{25}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]\nu \geq 0,\ [\sigma_\nu^\lambda] = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \cdot [\mathbf{u}^\lambda]\nu = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \leq 0,\ \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{26}$$

$$\sigma^\lambda n = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N \setminus \Sigma. \tag{27}$$

В области Ω_Σ^γ выполнено первое неравенство Корна, поэтому задача (22)–(27) разрешима и допускает вариационную постановку. Именно, пусть множество допустимых перемещений определено следующим образом:

$$K(\Omega_\Sigma^\gamma) = \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1(\Omega_\Sigma^\gamma) \mid [\mathbf{v}]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma,\ \ \mathbf{v} = 0 \text{ на } \partial\,\Omega_2 \setminus (\Gamma_0 \cup \Sigma) \,\}.$$

Тогда задача минимизации

$$\inf_{\mathbf{v} \in K(\Omega_\Sigma^\gamma)} \left\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{v}) \varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} f_i v_i \right\}$$

имеет решение $\mathbf{u}^\lambda$ и эквивалентна вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^\lambda \in K(\Omega_\Sigma^\gamma), \tag{28}$$

$$\int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda) \varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i^\lambda) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_\Sigma^\gamma). \tag{29}$$

Из (29) следует равенство

$$\int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda) \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) = \int\limits_{\Omega_\Sigma^\gamma} f_i u_i^\lambda,$$

откуда получаем равномерные по $0 < \lambda < \lambda_0$ оценки

$$\|\mathbf{u}^\lambda\|_{H^1(\Omega_\Sigma^\gamma)} \le c_1, \quad \|\mathbf{u}^\lambda\|^2_{H^1(\Omega_2)} \le c_2\lambda.$$

Таким образом, выбирая подпоследовательность, можно предполагать, что при $\lambda \to 0$ имеет место сходимость

$$\mathbf{u}^\lambda \to \mathbf{u} \ \text{ слабо в } \ H^1(\Omega_\Sigma^\gamma), \quad \mathbf{u}^\lambda \to 0 \ \text{ сильно в } \ H^1(\Omega_2). \tag{30}$$

Выберем $\bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_\Sigma^\gamma)$ так, что

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{cases} \tilde{\mathbf{u}} & \text{в} \quad \Omega_1^\gamma \\ 0 & \text{в} \quad \Omega_2. \end{cases}$$

Эту функцию подставим в (29) в качестве тестовой. Получим соотношение

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(-\mathbf{u}^\lambda) \ge \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\tilde{u}_i - u_i^\lambda) - \int\limits_{\Omega_2} f_i u_i^\lambda.$$

В силу (30) здесь можно перейти к пределу при $\lambda \to 0$, что дает

$$\mathbf{u} \in K(\Omega_1^{\gamma,\Gamma_0}), \tag{31}$$

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \ \ge \ \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\tilde{u}_i - u_i) \quad \forall \tilde{\mathbf{u}} \in K(\Omega_1^{\gamma,\Gamma_0}). \tag{32}$$

Здесь

$$K(\Omega_1^{\gamma,\Gamma_0}) \ = \ \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1^\gamma) \ | \ [\mathbf{v}]\nu \ge 0 \text{ на } \gamma \,\}.$$

Задача (31)–(32) может быть записана в дифференциальной форме (17)–(21) и наоборот, любое гладкое решение задачи (17)–(21) удовлетворяет (31)–(32). Таким образом, существование решения задачи (17)–(21) доказано.

Здесь следует заметить, что для решений вспомогательных задач (22)–(27) мы имеем краевое условие

$$\sigma^\lambda n = 0 \quad \text{на } \Sigma^+,$$

однако в предельной задаче (31)–(32) вектор σn не определен на Σ^+.

§ 3. Условия Синьорини на внешней границе

В условиях предыдущего пункта рассмотрим задачу вида (17)–(21), где вместо (20) зададим краевые условия Синьорини, описывающие контакт упругого тела с жестким препятствием (см. [1; 8]). Постановка такой задачи будет следующая. В области Ω_1^γ требуется найти функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\mathrm{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{33}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1^\gamma, \tag{34}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0, \tag{35}$$

$$\mathbf{u}n \le 0, \ \sigma_n \le 0, \ \sigma_n \cdot \mathbf{u}n = 0, \ \sigma_s = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N, \tag{36}$$

$$[\mathbf{u}]\nu \ge 0, \ [\sigma_\nu] = 0, \ \sigma_\nu \cdot [\mathbf{u}]\nu = 0, \ \sigma_\nu \le 0, \ \sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{37}$$

Здесь $s = (-n_2, n_1)$.

Поскольку угол между γ и Γ_0 нулевой, прямой вариационный метод минимизации функционала энергии не дает разрешимости краевой задачи (33)–(37).

Так же, как и в предыдущем пункте, введем тензор упругости A^λ и фиктивную область Ω_2, где область Ω_2 строится аналогичным образом (см. рис. 4), и рассмотрим вспомогательную задачу с параметром $\lambda > 0$ для нахождения функций $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $i, j = 1, 2$:

$$-\operatorname{div}\sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega_\Sigma^\gamma, \tag{38}$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\Sigma^\gamma, \tag{39}$$

$$\mathbf{u}^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_2 \setminus (\Gamma_0 \cup \Sigma), \tag{40}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]n \geq 0,\ [\sigma_n^\lambda] = 0,\ \sigma_n^\lambda \cdot [\mathbf{u}^\lambda]n = 0,\ \sigma_n^\lambda \leq 0,\ \sigma_s^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Sigma, \tag{41}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]\nu \geq 0,\ [\sigma_\nu^\lambda] = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \cdot [\mathbf{u}^\lambda]\nu = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \leq 0,\ \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{42}$$

$$\mathbf{u}^\lambda n \leq 0,\ \sigma_n^\lambda \leq 0,\ \sigma_n^\lambda \cdot \mathbf{u}^\lambda n = 0,\ \sigma_s^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_N \setminus \Sigma. \tag{43}$$

Задача (38)–(43) допускает вариационную постановку и имеет единственное решение. Можно показать, что при $\lambda \to 0$ решение этой задачи сходится к решению задачи (33)–(37). Именно, при $\lambda \to 0$ имеет место сходимость

$$\mathbf{u}^\lambda \to \mathbf{u} \text{ слабо в } H^1(\Omega_\Sigma^\gamma), \quad \mathbf{u}^\lambda \to 0 \text{ сильно в } H^1(\Omega_2).$$

Сужение предельной функции $\mathbf{u}$ на Ω_1^γ является решением вариационного неравенства

$$\mathbf{u} \in K^s(\Omega_1^\gamma),$$

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \geq \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^s(\Omega_1^\gamma).$$

Здесь множество допустимых перемещений $K^s(\Omega_1^\gamma)$ определяется следующим образом:

$$K^s(\Omega_1^\gamma) = \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1^\gamma) \mid [\mathbf{v}]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma \,\},$$

где

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega_1^\gamma) = \{\, v \in H^1(\Omega_1^\gamma) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0 \,\}.$$

Таким образом, можно проверить, что $\mathbf{u}$ удовлетворяет всем соотношениям (33)–(37), и, значит, разрешимость краевой задачи (33)–(37) доказана.

§ 4. Трещина на границе жесткого включения

Пусть $\Omega_1 \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ_1, а $\omega \subset \Omega_1$ — подобласть с гладкой границей $\partial\omega$, такая что $\partial\omega \cup \Gamma_1 = \{x_0\}$. Считаем, что угол между $\partial\omega$ и Γ_1 в точке x_0 нулевой. Граница $\partial\omega$ состоит из двух частей: $\partial\omega = \gamma \cup (\partial\omega \setminus \gamma)$, причем γ — гладкая кривая положительной длины, выходящая на внешнюю границу Γ_1 в точке x_0. В области $\Omega_1^\gamma = \Omega_1 \setminus \bar{\gamma}$ рассмотрим следующую задачу. Найти функцию $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ в Ω_1^γ, такую что $\mathbf{u} = \rho_0$ на ω; $\rho_0 \in R(\omega)$; а в области $\Omega_1 \setminus \bar{\omega}$ найти $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, так что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1 \setminus \bar{\omega}, \tag{44}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1 \setminus \bar{\omega}, \tag{45}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1, \tag{46}$$

$$[\mathbf{u}]\nu \geq 0, \quad \sigma_\nu^+ \cdot [\mathbf{u}]\nu = 0, \ \sigma_\nu^+ \leq 0, \ \sigma_\tau^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{47}$$

$$-\int\limits_{\partial\omega} \sigma\nu \cdot \rho = \int\limits_{\omega} f\rho \quad \forall \rho \in R(\omega). \tag{48}$$

Здесь пространство инфинитезимальных жестких перемещений вводится следующим образом:

$$R(\omega) = \{\, \rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Bx + C, \ x \in \omega \,\},$$

где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}, \quad C = (c^1, c^2); \quad b, c^1, c^2 = \mathrm{const}\,.$$

Знак $+$ в соотношениях (47) означает, что значения σ_{ij} следует брать на γ^+.

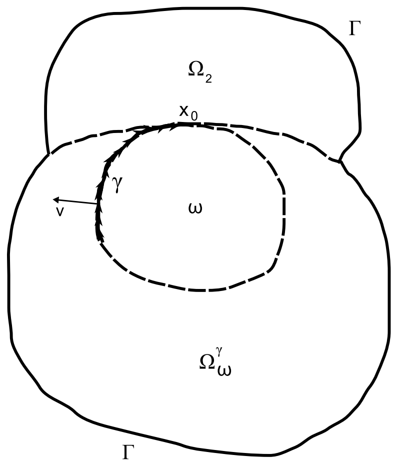

Рис. 5. Расширенная область Ω_ω^γ с трещиной γ и фиктивная область Ω_2

Для доказательства существования решения задачи (44)–(48) применим метод фиктивных областей. Рассмотрим расширенную область $\Omega_\omega^\gamma = \Omega_1^\gamma \cup \Omega_2 \cup \operatorname{int}(\Gamma_1 \cap \partial\,\Omega_2)$ с разрезом γ и внешней границей Γ (рис. 5) и в расширенной области Ω_ω^γ будем решать краевую задачу: найти функцию $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, определенную в Ω_ω^γ, такую что $\mathbf{u}^\lambda = \rho^\lambda$ на ω; $\rho^\lambda \in R(\omega)$, а в области $\Omega_\omega^\gamma \setminus \bar{\omega}$ найти $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}, i, j = 1, 2$, так что

$$-\operatorname{div}\sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega_\omega^\gamma \setminus \bar{\omega}, \tag{49}$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_\omega^\gamma \setminus \bar{\omega}, \tag{50}$$

$$\mathbf{u}^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{51}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]\nu \geq 0, \ (\sigma_\nu^\lambda)^+ \cdot [\mathbf{u}^\lambda]\nu = 0, \ (\sigma_\nu^\lambda)^+ \leq 0, \ (\sigma_\tau^\lambda)^+ = 0 \quad \text{на} \quad \gamma, \tag{52}$$

$$-\int\limits_{\partial\omega} \sigma^\lambda\nu \cdot \rho = \int\limits_{\omega} f\rho \quad \forall \rho \in R(\omega). \tag{53}$$

При каждом фиксированном $\lambda > 0$ задача (49)–(53) описывает равновесие упругого тела, содержащего жесткое включение ω и трещину γ, расположенную на границе жесткого включения. Геометрия области Ω_ω^γ такова, что справедливо первое неравенство Корна, и, таким образом, можно доказать существование решения задачи (49)–(53) для каждого фиксированного $\lambda > 0$. Приведем вариационную постановку этой задачи, а затем перейдем к пределу при $\lambda \to 0$. Обозначим

$$K(\Omega_\omega^\gamma) \;=\; \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_\Gamma(\Omega_\omega^\gamma) \;\mid\; [\mathbf{v}]\nu \ge 0 \text{ на } \gamma,\;\; \mathbf{v} = \rho \text{ на } \omega;\;\; \rho \in R(\omega)\,\}.$$

Задача минимизации

$$\inf_{\mathbf{v}\in K(\Omega_\omega^\gamma)} \Big\{ \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\omega^\gamma\setminus\bar\omega} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \int\limits_{\Omega_\omega^\gamma} f_i v_i \Big\}$$

имеет решение и эквивалентна вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^\lambda \in K(\Omega_\omega^\gamma), \tag{54}$$

$$\int\limits_{\Omega_\omega^\gamma\setminus\bar\omega} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) \ge \int\limits_{\Omega_\omega^\gamma} f_i(\bar u_i - u_i^\lambda) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_\omega^\gamma). \tag{55}$$

Из (55) получаем соотношение

$$\int\limits_{\Omega_\omega^\gamma\setminus\bar\omega} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) = \int\limits_{\Omega_\omega^\gamma} f_i u_i^\lambda. \tag{56}$$

Поскольку $\mathbf{u}^\lambda = \rho^\lambda$ на ω, $\rho^\lambda \in R(\omega)$, получаем $\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0$ в ω. Считая, что в области ω выполнен закон Гука вида (50), имеем $\sigma^\lambda(\mathbf{u}^\lambda) = 0$ в ω. Поэтому в левой части (56) можно интегрировать по Ω_ω^γ, что дает

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) = \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i u_i^\lambda + \int\limits_{\Omega_2} f_i u_i^\lambda.$$

Из полученного равенства имеем две равномерные по λ оценки

$$\|\mathbf{u}^\lambda\|_{H^1_\Gamma(\Omega_\omega^\gamma)} \le c_3, \quad \|\mathbf{u}^\lambda\|^2_{H^1(\Omega_2)} \le c_4\lambda.$$

Выбирая при необходимости подпоследовательность, предполагаем, что при $\lambda \to 0$

$$\mathbf{u}^\lambda \to \mathbf{u} \;\text{ слабо в } H^1_\Gamma(\Omega_\omega^\gamma), \quad \mathbf{u}^\lambda \to 0 \;\text{ сильно в } H^1(\Omega_2).$$

На основе этой сходимости можно осуществить переход к пределу в (54)–(55). Обозначим

$$K^\omega(\Omega_1^\gamma) \;=\; \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1^\gamma) \;\mid\; [\mathbf{v}]\nu \ge 0 \text{ на } \gamma;\;\; \mathbf{v} = \rho \text{ на } \omega;\;\; \rho \in R(\omega)\,\}.$$

Выберем тестовую функцию $\bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_\omega^\gamma)$ в (55) так, что $\bar{\mathbf{u}} = 0$ на Ω_2. После перехода к пределу при $\lambda \to 0$ получим

$$\mathbf{u} \in K^\omega(\Omega_1^\gamma), \tag{57}$$

$$\int\limits_{\Omega_1\setminus\bar\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \ge \int\limits_{\Omega_1} f_i(\bar u_i - u_i) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^\omega(\Omega_1^\gamma). \tag{58}$$

Еще раз отметим, что в (57)–(58) мы имеем в виду ограничение предельной функции $\mathbf{u}$ на область Ω_1^γ.

Задача (57)–(58) допускает дифференциальную постановку в виде (44)–(48), следовательно, существование решения задачи (44)–(48) доказано.

Заметим также, что в силу выпуклости множества $K^\omega(\Omega_1^\gamma)$ вариационное неравенство (57)–(58) эквивалентно задаче минимизации

$$\inf_{\mathbf{v}\in K^\omega(\Omega_1^\gamma)}\Big\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1\setminus\bar\omega}\sigma_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})-\int\limits_{\Omega_1} f_i v_i\Big\},$$

которая, согласно доказанному, имеет решение, удовлетворяющее (57)–(58).

§ 5. Трещина, выходящая на жесткое включение под нулевым углом

Пусть $\Omega_1\subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ_1, а $\omega\subset\Omega_1$ — подобласть с гладкой границей $\partial\omega$, такая, что $\partial\,\omega\cap\Gamma_1=\emptyset$. Предположим, что γ — трещина, выходящая под нулевым углом на границу $\partial\,\omega$ жесткого включения. Постановка задачи о равновесии упругого тела с жестким включением ω и трещиной γ состоит в следующем. В области $\Omega_1^\gamma=\Omega_1\setminus\bar\gamma$ требуется найти функцию $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$ такую, что $\mathbf{u}=\rho_0$ на ω, $\rho_0\in R(\omega)$, и одновременно требуется найти функцию $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$ в области $\Omega_1^\gamma\setminus\bar\omega$, так что

$$-\operatorname{div}\sigma=f\quad\text{в}\quad\Omega_1^\gamma\setminus\bar\omega,\tag{59}$$

$$\sigma-A\varepsilon(\mathbf{u})=0\quad\text{в}\quad\Omega_1^\gamma\setminus\bar\omega,\tag{60}$$

$$\mathbf{u}=0\quad\text{на}\quad\Gamma_1,\tag{61}$$

$$[\mathbf{u}]\nu\ge 0,\ [\sigma_\nu]=0,\ \sigma_\nu\cdot[\mathbf{u}]\nu=0,\ \sigma_\nu\le 0,\ \sigma_\tau=0\quad\text{на}\quad\gamma,\tag{62}$$

$$-\int\limits_{\partial\,\omega}\sigma\nu\cdot\rho=\int\limits_{\omega} f\rho\quad\forall\rho\in R(\omega).\tag{63}$$

Пусть множество $K^\omega(\Omega_1^\gamma)$ определено так же, как и в предыдущем пункте. Несмотря на то, что трещина γ в данном пункте не лежит на границе $\partial\omega$ жесткого включения ω и само жесткое включение ω не выходит на внешнюю границу Γ_1, формально определение множества допустимых перемещений $K^\omega(\Omega_1^\gamma)$ применительно к задаче (59)–(63) совпадает с приведенным в предыдущем пункте применительно к задаче (44)–(48).

Задача минимизации

$$\inf_{\mathbf{v}\in K^\omega(\Omega_1^\gamma)}\Big\{\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_1^\gamma\setminus\bar\omega}\sigma_{ij}(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v})-\int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i v_i\Big\}$$

имеет решение, поскольку трещину γ можно продолжить и разбить Ω_1 на две подобласти с липшицевыми границами. Решение задачи минимизации удовлетворяет вариационному неравенству

$$\mathbf{u}\in K^\omega(\Omega_1^\gamma),\tag{64}$$

$$\int\limits_{\Omega_1^\gamma\setminus\bar\omega}\sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\ \ge\ \int\limits_{\Omega_1^\gamma} f_i(\bar u_i-u_i)\quad\forall\bar{\mathbf{u}}\in K^\omega(\Omega_1^\gamma).\tag{65}$$

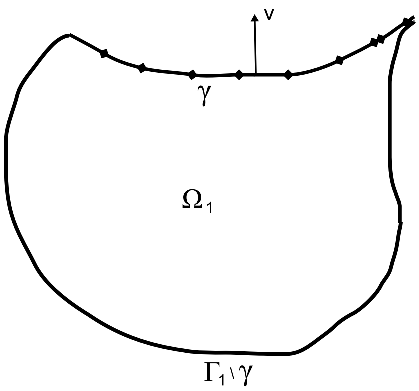

Рис. 6. Граница с внешним заострением

Задачи (59)–(63) и (64)–(65) эквивалентны. Это означает, что любое гладкое решение задачи (59)–(63) удовлетворяет (64)–(65) и наоборот, из (64)–(65) можно получить все соотношения (59)–(63).

Таким образом, получается, что нулевой угол между трещиной γ и границей $\partial\omega$ жесткого включения ω не создает дополнительных трудностей с точки зрения разрешимости краевой задачи вида (59)–(63).

§ 6. Негладкая граница в контактной задаче Синьорини

Как следует из результатов работы [5], контактная задача Синьорини при гладкой внешней границе является предельной для семейства задач о равновесии упругих тел, содержащих трещину с краевыми условиями взаимного непроникания берегов. При негладкой внешней границе разрешимость задачи Синьорини также можно доказать с помощью метода фиктивных областей. В этом разделе будет исследован случай, когда внешняя граница в задаче Синьорини имеет заострение, направленное вне области.

Пусть $\Omega_1 \subset R^2$ — ограниченная область с границей Γ_1, содержащей нулевое заострение (которое направлено вне области) (рис. 6). Вне этого заострения (угла) граница Γ_1 считается достаточно гладкой. Предполагаем, что $\gamma \subset \Gamma_1$ — гладкая кривая, один из концов которой совпадает с вершиной указанного угла. Единичную внешнюю нормаль к Γ_1 обозначим через $\nu = (\nu_1, \nu_2)$.

Рассмотрим контактную задачу Синьорини о равновесии упругого тела, занимающего область Ω_1. Требуется найти функции $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, такие что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad \Omega_1, \tag{66}$$

$$\sigma - A\varepsilon(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_1, \tag{67}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \setminus \gamma, \tag{68}$$

$$\mathbf{u}\nu \le 0, \quad \sigma_\nu \cdot \mathbf{u}\nu = 0, \ \sigma_\nu \le 0, \ \sigma_\tau = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{69}$$

Введем расширенную область $\Omega_s^\gamma = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup int(\partial\Omega_2 \cap (\Gamma_1 \setminus \bar{\gamma}))$ с разрезом γ, добавляя фиктивную область Ω_2 так как указано на рис. 7. Внешнюю границу области Ω_s^γ обозначим через Γ. В области Ω_s^γ будем рассматривать следующую краевую задачу с положительным параметром λ. Найти функции $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda, u_2^\lambda)$, $\sigma^\lambda = \{\sigma_{ij}^\lambda\}$, $i, j = 1, 2$,

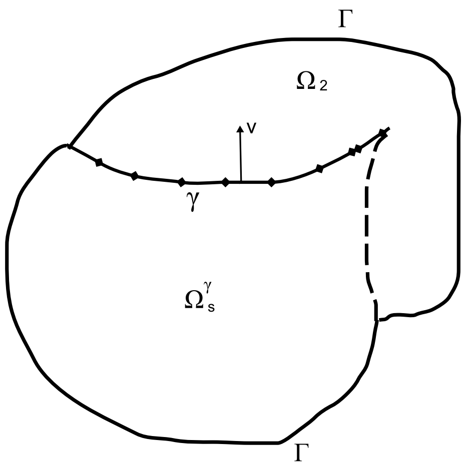

Рис. 7. Расширенная область Ω_s^γ и фиктивная область Ω_2

такие что

$$-\operatorname{div}\sigma^\lambda = f \quad \text{в} \quad \Omega_s^\gamma, \tag{70}$$

$$\sigma^\lambda - A^\lambda\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega_s^\gamma, \tag{71}$$

$$\mathbf{u}^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma, \tag{72}$$

$$[\mathbf{u}^\lambda]\nu \geq 0,\ [\sigma_\nu^\lambda] = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \cdot [\mathbf{u}^\lambda]\nu = 0,\ \sigma_\nu^\lambda \leq 0,\ \sigma_\tau^\lambda = 0 \quad \text{на} \quad \gamma. \tag{73}$$

Поскольку в области Ω_s^γ справедливо первое неравенство Корна, мы можем установить разрешимость задачи (70)–(73) для любого фиксированного $\lambda > 0$. Введем множество допустимых перемещений

$$K(\Omega_s^\gamma) \ = \ \{\, \mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_\Gamma(\Omega_s^\gamma) \ \mid \ [\mathbf{v}]\nu \geq 0 \text{ на } \gamma \,\}.$$

Можно доказать существование решения задачи минимизации

$$\inf_{\mathbf{v}\in K(\Omega_s^\gamma)} \Big\{ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_s^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{v})\varepsilon_{ij}(\mathbf{v}) - \int\limits_{\Omega_s^\gamma} f_i v_i \Big\},$$

решение которой удовлетворяет вариационному неравенству

$$\mathbf{u}^\lambda \in K(\Omega_s^\gamma), \tag{74}$$

$$\int\limits_{\Omega_s^\gamma} \sigma_{ij}^\lambda(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda) \geq \int\limits_{\Omega_s^\gamma} f_i(\bar{u}_i - u_i^\lambda) \quad \forall \bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_s^\gamma). \tag{75}$$

Из (75) получаем равенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) + \frac{1}{\lambda}\int\limits_{\Omega_2} \sigma_{ij}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) \ = \int\limits_{\Omega_s^\gamma} f_i u_i^\lambda,$$

из которого следует равномерно по $0 < \lambda < \lambda_0$

$$\|\mathbf{u}^\lambda\|_{H^1_\Gamma(\Omega_s^\gamma)} \leq c_5, \quad \|\mathbf{u}^\lambda\|^2_{H^1(\Omega_2)} \leq c_6\lambda.$$

Не уменьшая общности, предполагаем, что при $\lambda \to 0$

$$\mathbf{u}^\lambda \to \mathbf{u} \ \text{ слабо в } H^1_\Gamma(\Omega_s^\gamma), \quad \mathbf{u}^\lambda \to 0 \ \text{ сильно в } H^1(\Omega_2).$$

Выбирая $\bar{\mathbf{u}} \in K(\Omega_s^\gamma)$ так, что $\bar{\mathbf{u}} = 0$ в Ω_2, в соотношениях (74)–(75) можно перейти к пределу при $\lambda \to 0$. Предельное вариационное неравенство имеет вид

$$\mathbf{u} \in K^s(\Omega_1), \quad \int\limits_{\Omega_1} \sigma_{ij}(\mathbf{u})\varepsilon_{ij}(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}) \geq \int\limits_{\Omega_1} f_i(\bar{u}_i - u_i) \ \ \forall \bar{\mathbf{u}} \in K^s(\Omega_1), \tag{76}$$

где

$$K^s(\Omega_1) = \{\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in H^1_{\Gamma_1 \setminus \gamma}(\Omega_1) \mid \mathbf{v}\nu \leq 0 \text{ на } \gamma\}.$$

Таким образом, решение вариационного неравенства (76) существует. Легко также проверить, что это решение единственно. Как видно, задача (76) эквивалентна (66)–(69), так что решение задачи (66)–(69) также существует.

Список литературы

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974. (*Fichera G.* Boundary Value Problems of Elasticity with Unilateral Constraints // Handbuch der Physik. Berlin-Heidelberg; N.Y.: Springer-Verlag, 1972. Bd 6a/2).

2. *Grisvard P.* Singularities in Boundary Value Problems / Masson, Springer-Verlag, 1992.

3. *Назаров С. А.* Неравенства Корна для упругих сочленений массивных тел, тонких пластин и стержней // Успехи мат. наук. 2008. Т. 64, вып. 1 (379). С. 37–110.

4. *Степанов В. Д., Хлуднев А. М.* Метод фиктивных областей в задаче Синьорини // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1350–1364.

5. *Hoffmann K.-H., Khludnev A. M.* Fictitious Domain Method for the Signorini Problem in a Linear Elasticity // Adv. Math. Sci. Appl. 2004. Vol. 14. No. 2. P. 465–481.

6. *Khludnev A. M.* Analysis of Cracks in Solids / A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

7. *Хлуднев А. М.* Теория трещин с возможным контактом берегов // Успехи механики. 2005. Т. 3, № 4. С. 41–82.

8. *Сьярле Ф.* Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992. (*Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity. North-Holland; Amsterdam; N.-Y.; Oxford; Tokyo, 1988. Vol. 1: Three-Dimensional Elasticity.)

Материал поступил в редколлегию 18.02.2009

Адреса авторов

АЛЕКСЕЕВ Геннадий Валентинович
РОССИЯ, 690042, Владивосток
ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН
тел. (4232) 311397
e-mail: alekseev@iam.dvo.ru

ХЛУДНЕВ Александр Михайлович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики СО РАН
тел. (383) 3333123,
e-mail: khlud@hydro.nsc.ru