УДК 510.53 + 510.67

А. Н. Гаврюшкин

О КОНСТРУКТИВНЫХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИЙ С ЛИНЕЙНЫМ ПОРЯДКОМ РУДИНА–КЕЙСЛЕРА*

В [7] Судоплатовым была получена синтаксическая характеризация класса эренфойхтовых теорий. Было доказано, что в качестве параметров, задающих любую эренфойхтову теорию, можно взять конечный предпорядок (предпорядок Рудина–Кейслера) и функцию, действующую из этого предпорядка в множество натуральных чисел.

Одним из основных результатов данной работы является следующий. Для всех $1 \leqslant n \in \omega$ существует эренфойхтова теория T_n, такая, что $RK(T_n) \cong L_n$, все квази-простые модели теории T_n не конструктивизируемы, существует конструктивизируемая модель теории T_n.

Ключевые слова: эренфойхтова теория, предпорядок Рудина–Кейслера, разрешимая теория, разрешимая модель, конструктивная модель.

Введение

В данной работе рассматривается класс полных теорий, имеющих конечное с точностью до изоморфизма множество счетных моделей, не являющихся счетно-категоричными (обычно такие теории называют *эренфойхтовыми* в честь первого автора примеров этих теорий).

Рассмотрение будем вести с позиции теории конструктивных моделей, одним из основных вопросов которой является вопрос связи между алгоритмическими и теоретико-модельными свойствами[1].

До недавнего времени основными и хорошо известными типами изоморфизма эренфойхтовой теории были типы простой, насыщенной и слабо насыщенной, но не насыщенной, моделей. Лишь последняя модель среди указанных не является однородной. О сложности работы с обсуждаемым классом теорий говорит тот удивительный факт, что до сих пор нет ответа на совершенно естественный давно известный и легко формулируемый вопрос: «Любая ли счетная модель эренфойхтовой теории является почти однородной, т. е. однородной в некотором конечном обогащении константами?»[2]

Автором в [2] и [3] было предпринято некоторое исследование возможных связей теоретико модельных и вычислительных свойств в рамках класса эренфойхтовых теорий, когда можно говорить только о трех упомянутых типах изоморфизма счетных моделей.

В 2004 г. в работе С. В. Судоплатова [7] была получена синтаксическая характеризация класса эренфойхтовых теорий. Это послужило толчком к появлению гораздо более

---

*Работа частично поддержана грантом ведущих научных школ НШ-335.2008.1 и РФФИ (проект № 08-01-00336).

[1] Основные результаты и проблемы теории моделей, теории вычислимости и теории конструктивных (вычислимых) моделей рассмотрены в [1; 4; 6].

[2] Формулировка проблемы принадлежит С. С. Гончарову.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 30–37

широкого класса вопросов, относящихся к теории конструктивных моделей. В частности, значительный интерес представляет расположение конструктивных (равно как и разрешимых) моделей относительно остальных моделей данной эренфойхтовой теории.

Невозможно не вспомнить, что весь спектр затронутых проблем своим появлением обязан до сих пор не решенной (но уже ставшей фольклором) проблеме М. Морли: «Существует ли неразрешимая модель эренфойхтовой теории, имеющей лишь разрешимые типы?» — и подобным вопросам, сформулированным позже Т. Милларом, С. С. Гончаровым и др.

Предлагаемая статья посвящена изучению возможностей типов эренфойхтовой теории быть разрешимыми, а моделей — иметь вычислимые представления. При этом упорядочивать типы и модели теории мы будем согласно характеризационной теореме из [7].

§ 1. Используемые определения и результаты

Обозначим через $\omega(T)$ число попарно неизоморфных счетных моделей счетной полной теории T. А через $S(T)$ — множество типов такой теории.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M} \models T$ называется *квази-простой*, если она проста над реализацией некоторого типа теории T.

Через $\mathfrak{M}_p$ обозначим класс (изоморфных) простых над реализацией типа p моделей.

Следующий набор определений и результатов взят из [7].

Определение 2. Тип p *не превосходит* тип q *по предпорядку Рудина–Кейслера* ($p \leqslant_{RK} q$), если $\mathfrak{M}_q \models p$.[3]

$p \sim_{RK} q \Leftrightarrow (p \leqslant_{RK} q \;\&\; q \leqslant_{RK} p)$.[4]

Обозначим через $RK(T)$ множество типов изоморфизма моделей $\mathfrak{M}_p$ по всем $p \in S(T)$. Отношение $\leqslant_{RK}$ естественным образом переносится на множество $RK(T)$, поэтому индуцированное отношение будем обозначать так же: $\leqslant_{RK}$, а само множество $RK(T)$ считать предупорядоченным.

Определение 3. Тип p теории T называется *властным*, если из того, что p реализуется в некоторой модели $\mathfrak{M}$ теории T, следует, что в $\mathfrak{M}$ реализуются все типы из $S(T)$.

Определение 4. Последовательность $\mathfrak{M}_0 \preceq \mathfrak{M}_1 \preceq \ldots$ называется *элементарной цепью над типом* p, если $\mathfrak{M}_n \cong \mathfrak{M}_p$ для всех $n \in \omega$.

Определение 5. Модель $\mathfrak{M}$ называется *предельной над типом* p, если $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}_n$, для некоторой элементарной над типом p цепи $(\mathfrak{M}_n)_{n\in\omega}$, но $\mathfrak{M} \not\cong \mathfrak{M}_p$.

Лемма 1 (С. В. Судоплатов [7]). *Любая модель эренфойхтовой теории либо квази-проста, либо предельна.*

[3] Равносильно $\mathfrak{M}_p \preceq \mathfrak{M}_q$.

[4] В случае, когда типы p и q находятся в некотором отношении по RK-порядку, говорят, что и модели $\mathfrak{M}_p$ и $\mathfrak{M}_q$ находятся в этом же отношении.

Для $\widetilde{\mathbf{M}} \in RK(T)/\sim_{RK}$ обозначим через $IL(\widetilde{\mathbf{M}})$ число попарно неизоморфных моделей, предельных над элементами из $\widetilde{\mathbf{M}}$.

Теорема 1 (С. В. Судоплатов [7]). *Следующие условия эквивалентны:*

(1) $\omega(T) < \omega$;

(2) $|S(T)| = \omega$, $|RK(T)| < \omega$, $IL(\widetilde{\mathbf{M}}) < \omega$ *для всех* $\widetilde{\mathbf{M}} \in RK(T)/\sim_{RK}$.

Кроме этого, нам потребуются некоторые сведения из теории вычислимости. Следующие определение и результат цитируются по [5].

Определение 6. Функция f называется *предельно монотонной*, если существует вычислимая функция $\varphi(x,t)$, такая что $\varphi(x,t) \leqslant \varphi(x,t+1)$ для всех $x,t \in \omega$, $\lim_t \varphi(x,t)$ существует для всех $x \in \omega$, и $f(x) = \lim_t \varphi(x,t)$.

Лемма 2 (Б. Хусаинов, А. Нис, Р. Шор [5]). *Существует Δ^0_2-множество, не являющееся областью значений никакой предельно монотонной функции.*

§ 2. Теории с линейным порядком Рудина–Кейслера

Обозначим через L_n линейный порядок, состоящий из $n+1$ элемента: $\{x_0 < x_1 < \ldots < x_n\}$.

Определение 7. Теория называется *наследственно разрешимой*, если все ее типы разрешимы.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbb{N} \ni n \geqslant 1$. *Существует наследственно разрешимая эренфойхтова теория* T_n, *для которой* $RK(T_n) \cong L_n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сразу отметим, что случай $n = 1$ хорошо известен. Например, классические примеры Эренфойхта реализуют этот случай.

Традиционно для упрощения понимания построим сначала теорию T_2, т. е. рассмотрим случай $n = 2$, а затем укажем способ обобщения конструкции на случай произвольного n.

Рассмотрим множество $M = \mathbb{Q}^2 = \{(a^1,a^2) | a^1, a^2 \in \mathbb{Q}\}$ упорядоченных пар рациональных чисел. Определим счетное число отношений:

$$(a^1,a^2) < (b^1,b^2) \Leftrightarrow (a^1 < b^1 \,\&\, a^2 < b^2),$$
$$R^2((a^1,a^2),(b^1,b^2)) \Leftrightarrow (a^1 < b^1 \ \vee\ a^2 < b^2),$$
$$\ldots$$
$$R^k((a^1_1,a^2_1),\ldots,(a^1_k,a^2_k)) \Leftrightarrow (a^1_1 < \ldots < a^1_k \ \vee\ a^2_1 < \ldots < a^2_k),$$
$$\ldots$$
$$Q^2((a^1,a^2),(b^1,b^2)) \Leftrightarrow (a^1 = b^1 \ \vee\ a^2 = b^2),$$
$$\ldots$$
$$Q^k((a^1_1,a^2_1),\ldots,(a^1_k,a^2_k)) \Leftrightarrow (a^1_1 = \ldots = a^1_k \ \vee\ a^2_1 = \ldots = a^2_k).$$
$$\ldots$$

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}_1 = \langle M; <, R^2, R^3, \ldots, Q^2, Q^3, \ldots \rangle$. Обозначим $T_1 \leftrightharpoons Th(\mathfrak{M}_1)$.[5]

Лемма 3. *Теория T_1 счетно-категорична.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любое семейство конечных изоморфизмов любых счетных моделей теории T_1 удовлетворяет челночному свойству.

Заметим, что для произвольных элементов a, b произвольной модели $\mathfrak{M} \models T_1$ выполнено в точности одно из следующих условий:

0) $a = b$. В этом случае $Q^2(a, b)$, остальные сигнатурные отношения ложны.

1) $(Q^2(a, b) \,\&\, a \neq b)$. В этом случае $a \not< b$ и $b \not< a$.

  1.1) $R^2(a, b)$.

  1.2) $R^2(b, a)$.

2) $(\neg Q^2(a, b) \,\&\, a \neq b)$.

  2.1) $a < b$. В этом случае $R^2(a, b)$.

  2.2) $b < a$. В этом случае $R^2(b, a)$.

  2.3) $a \not< b$, и $b \not< a$. В этом случае $R^2(a, b)$ и $R^2(b, a)$.

Аналогичные условия можно выписать для троек, четверок, пятерок, … элементов, используя для этого отношения R^3, Q^3, R^4, Q^4, R^5, Q^5,…

Если для некоторого набора выполнено $R^k(a_1, \ldots, a_k)$, будем говорить, что этот набор *правильно упорядочен*.

Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ — счетные модели теории T_1. Пусть $f : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ — конечный частичный изоморфизм, $f(a_i) = b_i$, $i = 0, \ldots, n$. Пусть[6] $a_{n+1} \in A$, тогда для каждой пары вида (a_i, a_{n+1}) выполнено в точности одно из условий 1)–2.3). Для троек вида (a_i, a_j, a_{n+1}), где $i \neq j \in \{0, \ldots, n\}$ — одно из списка аналогичных условий, и т. д. Несложно проверить, что можно найти $b_{n+1} \in B$ такие, что для наборов $(b_{i_1}, \ldots, b_{i_t}, b_{n+1})$, где $\{i_1, \ldots, i_t\} \subseteq \{0, \ldots, n\}$, выполнены те же условия, что и для наборов $(a_{i_1}, \ldots, a_{i_t}, a_{n+1})$, соответственно. Расширим изоморфизм f добавлением пары $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$.[7]

Таким образом, выполняется челночное свойство «туда». Свойство «обратно» проверяется аналогично. □

Обогатим модель $\mathfrak{M}_1$ до модели $\mathfrak{M}_2 = \langle \mathfrak{M}_1; c_0, c_1, \ldots \rangle$, где $c_n = (n + 1, n + 2)$, $n \in \omega$, т. е. $c_0 < c_1 < \ldots$

Положим $T_2 = Th(\mathfrak{M}_2)$.

Лемма 4. *T_2 эренфойхтова.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неглавные типы теории T_2 определяются следующими множествами формул:

$$p_1(x) = \{R^{n+2}(c_0, \ldots, c_n, x) | n \in \omega\},$$
$$p_2(x) = \{c_n < x | n \in \omega\}.$$

[5] В терминах формулировки теоремы это теория T_0.

[6] Заглавными латинскими буквами обозначаются носители соответствущих моделей, например, $A \leftrightharpoons |\mathfrak{A}|$.

[7] Другими словами, всегда можно указать, какие наборы упорядочены правильно, а какие — нет.

Еще 3 типа изоморфизма получаются за счет отсутствия (наличия) «минимальных» элементов среди реализаций указанных типов[8]. □

Лемма 5. *$RK(T_2)$ представляет собой линейный порядок из трех элементов. Имеются одна предельная модель над реализацией единственного неглавного невластного типа и две предельных модели над реализацией неглавного властного типа (рис. 1).*

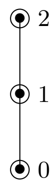
$RK(T_2) =$ 

Рис. 1

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как всегда, главный тип соответствует наименьшему элементу порядка. Затем идет неглавный невластный тип p_1. Наибольшим, как и везде, является неглавный властный тип. В нашем случае это p_2.

$p_1 \leqslant_{RK} p_2$, $p_2 \nleqslant_{RK} p_1$, так как модель, реализующая тип p_1 и опускающая тип p_2 элементарно вкладывается в модель, реализующую тип p_2, причем возможность обратного вложения отсутствует.

Модели без «минимальных»[9] элементов в нестандартных частях не являются простыми над реализациями типов, поэтому они предельны. □

Лемма 6. *T_2 наследственно разрешима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Все модели теории T_2 разрешимы. □

Перейдем к рассмотрению случая произвольного $n \geqslant 2$.

Носителем модели $\mathfrak{M}_n$ будет множество $\{(a^1, \ldots, a^n) \in \mathbb{Q}^n\}$ упорядоченных n-ок рациональных чисел. Сигнатура состоит из предикатов и констант:

$$\Sigma = \langle R_1^i, \ldots, R_{n-1}^i, <, Q_1^j, \ldots, Q_{n-1}^j; c_k \rangle,$$

где $2 \leqslant i, j < \omega$, $k \in \omega$. Предикаты и константы определяются следующим образом:

$$R_1^2\big((a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n)\big) \Leftrightarrow (a^1 < b^1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ a^n < b^n),$$

$$R_1^3\big((a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n), (c^1, \ldots, c^n)\big) \Leftrightarrow (a^1 < b^1 < c^1 \ \vee \ \ldots \ \vee \ a^n < b^n < c^n),$$

$$\ldots$$

$$R_2^2\big((a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n)\big) \Leftrightarrow \exists \{k_1, k_2\} \subseteq \{1, \ldots, n\}(a^{k_1} < b^{k_1} \ \& \ a^{k_2} < b^{k_2}),$$

$$R_2^3\big((a^1, \ldots, a^n), (b^1, \ldots, b^n), (c^1, \ldots, c^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists \{k_1, k_2\} \subseteq \{1, \ldots, n\}(a^{k_1} < b^{k_1} < c^{k_1} \ \& \ a^{k_2} < b^{k_2} < c^{k_2}),$$

$$\ldots$$

[8] Элементы, реализующие неглавные типы, будем называть *нестандартными*. А множество таких элементов — *нестандартной частью* модели.

[9] Слово «минимальный» взято в кавычки, поскольку в случае отношений R^i о порядке говорить сложно. В случае же отношения $<$, т. е. в случае типа p_2, кавычки можно опустить.

$$R^2_{n-1}\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\{k_1,\dots,k_{n-1}\} \subseteq \{1,\dots,n\}(a^{k_1} < b^{k_1} \ \&\ \dots\ \&\ a^{k_{n-1}} < b^{k_{n-1}}),$$
$$R^3_{n-1}\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n),(c^1,\dots,c^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\{k_1,\dots,k_{n-1}\} \subseteq \{1,\dots,n\}\ (a^{k_1} < b^{k_1} < c^{k_1} \ \&\ \dots\ \&\ a^{k_{n-1}} < b^{k_{n-1}} < c^{k_{n-1}}),$$
$$\dots$$
$$(a^1,\dots,a^n) < (b^1,\dots,b^n) \Leftrightarrow (a^1 < b^1 \ \&\ \dots\ \&\ a^n < b^n),$$
$$Q^2_1\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n)\big) \Leftrightarrow (a^1 = b^1 \vee \dots \vee a^n = b^n),$$
$$Q^3_1\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n),(c^1,\dots,c^n)\big) \Leftrightarrow (a^1 = b^1 = c^1 \vee \dots \vee a^n = b^n = c^n),$$
$$\dots$$
$$Q^2_2\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n)\big) \Leftrightarrow \exists\,\{k_1,k_2\} \subseteq \{1,\dots,n\}\ (a^{k_1} = b^{k_1} \ \&\ a^{k_2} = b^{k_2}),$$
$$Q^3_2\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n),(c^1,\dots,c^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\{k_1,k_2\} \subseteq \{1,\dots,n\}\ (a^{k_1} = b^{k_1} = c^{k_1} \ \&\ a^{k_2} = b^{k_2} = c^{k_2}),$$
$$\dots$$
$$Q^2_{n-1}\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\{k_1,\dots,k_{n-1}\} \subseteq \{1,\dots,n\}\ (a^{k_1} = b^{k_1} \ \&\ \dots\ \&\ a^{k_{n-1}} = b^{k_{n-1}}),$$
$$Q^3_{n-1}\big((a^1,\dots,a^n),(b^1,\dots,b^n),(c^1,\dots,c^n)\big) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists\,\{k_1,\dots,k_{n-1}\} \subseteq \{1,\dots,n\}\ (a^{k_1} = b^{k_1} = c^{k_1} \ \&\ \dots\ \&\ a^{k_{n-1}} = b^{k_{n-1}} = c^{k_{n-1}}),$$
$$\dots$$
$$c_k = (k+1, k+2, \dots, k+n).$$

Искомой будет элементарная теория $T_n = Th(\mathfrak{M}_n)$ модели $\mathfrak{M}_n = \langle M; \Sigma\rangle$.

Аналогично случаю $n = 2$ в простой модели не будет элемента, «большего» всех констант по отношениям $R^i_1, i \geqslant 2$ (а значит, и по всем остальным R). Типы изоморфизма простых над реализациями неглавных типов моделей будут определяться наличием нестандартных элементов по одним отношениям R_{i_1} и отсутствием таковых по другим R_{i_2}. В предельных моделях не будет «минимальных» элементов в нестандартной части.

Если положить для $1 \leqslant i \leqslant n-1$

$$p_i(x) = \{\, R^{n+2}_i(c_0,\dots,c_n,x) \mid n \in \omega \,\},$$
$$p_n(x) = \{\, c_n < x \mid n \in \omega \,\},$$

то мы получим все неглавные типы теории T_n, и будет верно: $p_1 \leqslant_{RK} p_2 \leqslant_{RK} \dots \leqslant_{RK} p_n$. При этом никакие из этих типов не будут RK-эквивалентными.

Все модели теории T_n разрешимы. □

§ 3. Конструктивные модели теорий с линейным порядком Рудина–Кейслера

Теорема 3. *Для любого $1 \leqslant m \in \omega$ существует эренфойхтова теория T_m, $RK(T_m) \cong$ $\cong L_m$, все квази-простые модели T_m не конструктивны (не имеют вычислимых представлений), существует конструктивная модель теории T_m.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть S Δ^0_2-множество, не являющееся областью значений никакой предельно монотонной функции[10]. Тогда существует вычислимая функция g такая, что для всех l $\lim_s g(l,s)$ существует[11] и $\rho \lim_s g(l,s) = S$. Положим $h(l) = \lim_s g(l,s)$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{M}_m$, полученную при доказательстве теоремы 2. Расширим носитель этой модели следующим образом: $N_m = M_m \cup V$, где $V = \{v_{q,1}, v_{q,2}, \ldots, v_{q,t} : q \in M_m, t \in \omega\}$, $M_m \cap V = \varnothing$. В сигнатуру добавим новый одноместный функциональный символ f. Положим, что f является тождественной функцией на M_m (т. е. на «старых» элементах): $(\forall q \in M_m) f(q) = q$. Далее, фиксируем $1 \leqslant n_0 < m$. Определим f на V так, чтобы стандартные элементы модели (и только они) имели конечное число f-прообразов, причем количество этих прообразов соответствовало элементам множества S: для всех $t \in \omega$, всех $0 < s < \omega$, и всех $1 \leqslant k \leqslant h(t)$, положим

$$\begin{aligned} f(v_{c_t,k}) \ &= \ q_{c_t} \ \& \\ &\& \ (\forall q_1, \ldots, q_s)\Big(R^{s+2}_{n_0}(c_t, q_1, \ldots, q_s, c_{t+1}) \to (f(v_{q_1,k}) = q_1 \ \& \ \ldots \ \& \ f(v_{q_s,k}) = q_s)\Big). \end{aligned}$$

Все отношения модели $\mathfrak{M}_m$ на новых элементах (из V) определяются как ложные.

Положим $T_m = Th(\mathfrak{N}_m)$.

Несложно проверить, что $RK(Th(\mathfrak{N}_m)) \cong RK(Th(\mathfrak{M}_m))$. Это следует из того, что элемент нестандартен в смысле типа p_{n_0} тогда и только тогда, когда он имеет бесконечно много f-прообразов.

Лемма 7. *Если модель теории T_m не предельна над типом p_{n_0}, то она не конструктивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В непредельных моделях теории T_m тип p_{n_0} либо опускается, либо среди его реализаций есть «минимальный» элемент. Если тип опускается, а модель имеет вычислимое представление, то несложно показать, что множество S будет областью значений предельно монотонной функции, что противоречит выбору этого множества. Если же среди реализаций типа p_{n_0} в модели $\mathfrak{M}$ есть «минимальный» элемент, то модель, в которой этот тип опускается, будет рекурсивно перечислимой подмоделью модели $\mathfrak{M}$, а значит, будет иметь вычислимое представление. □

Лемма 8. *Предельные над типом p_{n_0} модели теории T_m конструктивны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если в определении модели $\mathfrak{N}_m$ заменить модель $\mathfrak{M}_m$ на классическую $\langle \mathbb{Q}; \leqslant \rangle$, то получится пример модели, теория которой обладает в точности тремя типами изоморфизма счетных моделей, из [5]. Там же, в [5], доказано, что среди всех моделей такой теории лишь насыщенная обладает вычислимым представлением. Абсолютно такое же доказательство проходит и здесь[12]. □

Таким образом, конструктивными окажутся в точности модели, не имеющие в нестандартной относительно типа p_{n_0} части «минимального» элемента. □

Следствие 1. *Для любого $1 \leqslant m \in \omega$ существует эренфойхтова теория T_m, $RK(T_m) \cong$ $\cong L_m$, единственная конструктивная модель которой — насыщенная.*

[10] См. лемму 2.

[11] Через ρ обозначается область значений.

[12] См. в [5] доказательство утверждений claim 2.15 и claim 2.16 на с. 174–175.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует заменить в доказательстве тип p_{n_0} на тип p_n. В этом случае функция f на элементах из V определится так:

$$\forall q\,(c_t \leqslant q < c_{t+1} \to f(v_{q,k}) = q). \qquad \square$$

Следствие 2. *Для любого $1 \leqslant m \in \omega$ существует эренфойхтова теория T_m, $RK(T_m) \cong \cong L_m$, все квази-простые модели T_m не конструктивны, любая модель теории T_m, не являющаяся квази-простой, конструктивна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $n_0 = 1$. $\square$

В заключение хочется добавить, что у автора есть серьезные основания считать, что справедлива следующая пока еще

Гипотеза. *Пусть $\mathbb{N} \ni n \geqslant 1$, $0 \leqslant k \leqslant n$. Существует эренфойхтова теория T_n, для которой $RK(T_n) \cong L_n$, при этом разрешимы лишь модели, соответствующие элементам $x_0, x_1, \ldots, x_k$ порядка L_n.*

Список литературы

1. *Чэн, Кейслер.* Теория моделей. М.: Мир, 1973.

2. *Гаврюшкин А. Н.* Сложность эренфойхтовых моделей // Алгебра и логика. 2006. Т. 45, № 5. С. 507–519.

3. *Гаврюшкин А. Н.* Спектры вычислимых моделей эренфойхтовых теорий // Алгебра и логика. Т. 46, № 3. С. 275–289.

4. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

5. *Khoussaainov B., Nies A., Shore R.* Computable Models of Theories with Few Models // Notre Dame J. Form. Log. 1997. Vol. 38. No. 2. P. 165–178.

6. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

7. *Судоплатов С. В.* Полные теории с конечным числом счетных моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 1. С. 110–124.

Материал поступил в редколлегию 01.12.2008

Адрес автора

ГАВРЮШКИН Александр Николаевич

РОССИЯ, 630090, Новосибирск

ул. Пирогова, 2, Новосибирский

государственный университет

e-mail: gavryushkin@gmail.com