УДК 512.816

В. А. Кыров, Р. М. Мурадов

НЕКОТОРЫЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ И ИХ ИНВАРИАНТЫ

В данной работе устанавливается связь физической структуры ранга $(n+1, 2)$ с группами Ли преобразований. Находятся инварианты групп Ли преобразований, задающих однометрические и двуметрические физические структуры.

Ключевые слова: физическая структура, квазигруппа, группа преобразований, инвариант.

§ 1. Физическая структура ранга $(n+1, 2)$

Рассмотрим гладкие многообразия N и B, $\dim B = s$, а также гладкое отображение $f : B \times N \to B$, называемое *метрическим*. Построим вспомогательное отображение $F : B^n \times N \to B^n$ по формуле

$$F(i_1, \ldots, i_n; \alpha) = (f(i_1\alpha), \ldots, f(i_n\alpha)),$$

где n — натуральное число, $B^n = \underbrace{B \times \cdots \times B}_{n}$, $\langle i_1, \ldots, i_n\rangle \in B^n$, $\alpha \in N$. Обозначим $\Omega_N \subset N$, $\Omega_{B^n} \subset B^n$ — открытые и плотные подмногообразия, причем область значений ограничения отображения F на подмногообразие $\Omega_{B^n} \times \Omega_N$ равна Ω_{B^n}. Пусть выполняются аксиомы [1]:

A1. $\forall\langle i_1, \ldots, i_n\rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\forall\langle b_1, \ldots, b_n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\exists!\ \alpha \in N$ такая, что $F(i_1, \ldots, i_n; \alpha) = \langle b_1, \ldots, b_n\rangle$.

A2. $\forall\alpha \in \Omega_N$ и $\forall b \in B$, $\exists!\ i \in M$ такая, что $f(i\alpha) = b$.

Зафиксируем точки $\langle j_1, \ldots, j_n\rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\beta \in \Omega_N$. Из A1 и A2 следует существование биекций

$$\varphi_{j_1,\ldots,j_n} : N \to \Omega_{B^n}, \quad \psi_\beta : B \to B. \tag{1}$$

На элементах эти биекции задаются формулами

$$\varphi_{j_1,\ldots,j_n}(\alpha) = (f(j_1\alpha), \ldots, f(j_n\alpha)) = \langle\alpha^1, \ldots, \alpha^n\rangle, \quad \psi_\beta(i) = f(i\beta) = i^1,$$

где $i^1 \in B$, $\langle\alpha^1, \ldots, \alpha^n\rangle \in \Omega_{B^n}$.

A3. Отображения (1) — диффеоморфизмы.

Построим новое отображение $\bar f : B \times \Omega_{B^n} \to B$, также называемое *метрическим*:

$$\bar f(i^1, \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = f(i\alpha) = f\big(\psi_\beta^{-1}(i^1), \varphi^{-1}_{j_1,\ldots,j_n}(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)\big), \tag{2}$$

где $i^1 \in B$, $\langle\alpha^1, \ldots, \alpha^n\rangle \in \Omega_{B^n}$. Из определения метрического отображения f и аксиомы A3 следует гладкость отображения (2). Введем еще одно отображение $\bar F : B^n \times \Omega_{B^n} \to B^n$:

$$\bar F(i^1, \ldots, i^n; \alpha^1, \ldots, \alpha^n) = (\bar f(i^1, \alpha^1, \ldots, \alpha^n), \ldots, \bar f(i^n, \alpha^1, \ldots, \alpha^n)), \tag{3}$$

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 54–63

гладкость которого следует из построения. Заметим, что каждая компонента отображения $\bar{F}$ — это $\bar{f}$. Отображения $\bar{f}$ и $\bar{F}$ удовлетворяют аксиомам:

Б1. $\forall \langle i^1,\dots,i^n\rangle, \langle b^1,\dots,b^n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $\exists!\, \langle \alpha^1,\dots,\alpha^n\rangle \in \Omega_{B^n}$, что $\bar{F}(i^1,\dots,i^n; \alpha^1,\dots,\alpha^n) = \langle b^1,\dots,b^n\rangle$.

Б2. $\forall \langle \alpha^1,\dots,\alpha^n\rangle \in \Omega_{B^n}$ и $\forall b \in B$, $\exists!\ i^1 \in B$ такая, что $\bar{f}(i^1,\alpha^1,\dots,\alpha^n) = b$.

Теорема 1. *Многообразие Ω_{B^n} является гладкой лупой с бинарной операцией $\bar{F} : \Omega_{B^n} \times \times \Omega_{B^n} \to \Omega_{B^n}$, определенной по формуле* (3), *причем единицей является набор $e = = (e^1,\dots,e^n) = (f(j_1\beta),\dots,f(j_n\beta)) \in \Omega_{B^n}$.*

Определение квазигруппы хорошо известно [2]. Многообразие является *гладкой квазигруппой*, если на нем определена гладкая квазигрупповая операция. Гладкая квазигруппа с единицей называется *гладкой лупой*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Квазигрупповые свойства отображения (3) следуют из его определения и выше сформулированных аксиом Б1 и Б2. Докажем теперь, что единицей является набор $e = (e^1,\dots,e^n) = (f(j_1\beta),\dots,f(j_n\beta)) \in \Omega_{B^n}$ (метод доказательства приведен в [1]). Действительно,

$$\bar{F}(e^1,\dots,e^n;\alpha^1,\dots,\alpha^n) = \\ = (\bar{f}(e^1,\alpha^1,\dots,\alpha^n),\dots,\bar{f}(e^n,\alpha^1,\dots,\alpha^n)) = (f(j_1\alpha),\dots,f(j_n\alpha)) = (\alpha^1,\dots,\alpha^n),$$

т. е. e — левая единица. Аналогично проверяется, что e — правая единица. Значит, отображение (3) в Ω_{B^n} определяет лупу. Из выше сформулированных аксиом следует гладкость этой лупы. □

Лупу, определенную в теореме 1, обозначим $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$:

$$\bar{F}(i^1,\dots,i^n;\alpha^1,\dots,\alpha^n) = I \circ A, \tag{3$'$}$$

где $I = \langle i^1,\dots,i^n\rangle \in \Omega_{B^n}$, $A = \langle \alpha^1,\dots,\alpha^n\rangle \in \Omega_{B^n}$.

Квазигруппа называется частичной, если квазигрупповые аксиомы выполняются для открытого и плотного подмножества.

Теорема 1$'$. *Отображение* (3) *на многообразии B^n задает частичную гладкую лупу с бинарной операцией $\bar{F} : B^n \times \Omega_{B^n} \to B^n$ и единицей e. Эту частичную лупу обозначим $(B^n, \circ, e)$.*

Сформулируем теперь аксиому феноменологической симметрии [1; 3; 4].

А4. Для некоторой достаточно гладкой функции $g : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B \to B$ и любых точек $\langle i_1, i_2, \dots, i_{n+1}\rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\langle \alpha_1, \alpha_2\rangle \in N \times \Omega_N$ таких, что $\langle f(i_1\alpha_1), f(i_2\alpha_1),\dots, f(i_{n+1}\alpha_1), f(i_2\alpha_2),\dots, f(i_{n+1}\alpha_2), f(i_1\alpha_2)\rangle \in B \times \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \times B$, существует связь:

$$f(i_1\alpha_1) = g(f(i_2\alpha_1),\dots,f(i_{n+1}\alpha_1), f(i_2\alpha_2),\dots,f(i_{n+1}\alpha_2), f(i_1\alpha_2)).$$

Определение 1. Будем говорить, что метрическое отображение $f : B \times N \to B$ на многообразиях N, B задает *физическую структуру ранга* $(n+1, 2)$, если выполняются аксиомы А1–А4.

Для отображения $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$ также выполняется аксиома феноменологической симметрии:

Б3. $\forall\langle i_1, \ldots, i_{n+1}\rangle \in B \times \Omega_{B^n}$ и $\forall\langle\alpha_1, \alpha_2\rangle \in N \times \Omega_N$ существует связь:

$$\bar{f}_{11} = g\big(\bar{f}_{21}, \ldots, \bar{f}_{(n+1)1}, \bar{f}_{22}, \ldots, \bar{f}_{(n+1)2}, \bar{f}_{12}\big), \tag{4}$$

где, например, $\bar{f}_{11} = f(i_1\alpha_1)$.

Итак, $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$ также задает физическую структуру ранга (n+1,2).

Теорема 2. *В частичной лупе $(B^n, \circ, e)$ выполняется тождество $(I \circ A) \circ B = I \circ (A \circ B)$, где $I \in B^n$, $A, B \in \Omega_{B^n}$.*

Это тождество следует из аксиомы Б3 [1]. □

Теорема 3. *Лупа $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$ с бинарной операцией $\circ : \Omega_{B^n} \times \Omega_{B^n} \to \Omega_{B^n}$ является группой Ли.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ассоциативность вытекает из теоремы 2 в предположении, что $I \in \Omega_{B^n}$. Затем надо воспользоваться тем, что ассоциативная квазигруппа есть группа [2]. □

§ 2. Феноменологически симметричные группы Ли преобразований

Дадим два определения [5].

Определение 2. Говорят, что множество достаточно гладких отображений $q : X \times G \to$ $\to X$, где X—гладкое многообразие, а G — группа Ли, причем $\dim X = n$, $\dim G =$ $= r$, задает *почти эффективно и почти просто транзитивно действующую группу Ли преобразований многообразия* X, если выполняются свойства:

1°. Отображение $y = g(x, a)$, где $x, y \in X$, $a \in G$, обратимо относительно точки x.

2°. $g(x, e) = x$, для любого $x \in X$.

3°. $g(g(x, a), b) = g(x, \varphi(a, b))$, $\forall a, b \in G$, φ — групповая операция в G.

4°. Если $a \in G$ и $g(x, a) = x$, для любого $x \in \Omega_X \subset X$, то $a = e$, где Ω_X — открытое и плотное подмногообразие в X.

5°. $\forall x, y \in \Omega_X$, $\exists!\, a \in G$ такой, что $g(x, a) = y$.

Определение 3. Говорят, что множество достаточно гладких отображений $q : X \times G \to$ $\to X$, где X — гладкое многообразие, а G — группа Ли, причем $\dim X = n$, $\dim G = r$, задает *эффективно и транзитивно действующую группу Ли преобразований многообразия* X, если выполняются свойства:

1°. Отображение $y = g(x, a)$, где $x, y \in X$, $a \in G$, обратимо относительно точки x.

2°. $g(x, e) = x$, для любого $x \in X$.

3°. $g(g(x, a), b) = g(x, \varphi(a, b))$, $\forall a, b \in G$, φ — групповая операция в G.

4°. Если $a \in G$ и $g(x, a) = x$, для любого $x \in X$, то $a = e$.

5°. $\forall x, y \in X$, $\exists\, a \in G$ такой, что $g(x, a) = y$.

Пусть $\circ$ и $*$ две операции, определенные на гладкой квазигруппе Q. Операция $*$ называется *изотопной* операции $\circ$, если существует тройка диффеоморфизмов α, β, γ

многообразия Q таких, что
$$x * y = \gamma^{-1}(\alpha(x) \circ \beta(y)),$$
для любых $x, y \in Q$. Упорядоченная тройка $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ называется *изотопией.*

Теорема 4. *Справедливы утверждения:*

1. *Частичная лупа $(B^n, \circ, e)$ является группой Ли преобразований с почти эффективным и почти просто транзитивным действием на многообразии B^n группы Ли $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$.*

2. *Изотопия $T = (1, \theta, 1)$, где $\theta : \Omega_{B^n} \to \Omega_{B^n}$ — диффеоморфизм, причем $\theta(e) = e$, 1 — тождественный диффеоморфизм в B^n, частичную лупу $(B^n, \circ, e)$ переводит в частичную лупу $(B^n, *, e)$ с бинарной операцией*

$$I * a = I \circ \theta(a), \tag{5}$$

$\forall a \in \Omega_{B^n}$, $\forall I \in B^n$, которая также является группой Ли преобразований с почти эффективным и почти просто транзитивным действием на B^n группы Ли $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$ с бинарной операцией
$$a \cdot b = \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)), \tag{6}$$
$\forall a, b \in \Omega_{B^n}$.

3. *Группа Ли преобразований $(B^n, \circ, e)$ индуцирует эффективную и транзитивную группу Ли преобразований многообразия B с параметрической группой $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$. Действие задается метрическим отображением $\bar{f}$ физической структуры ранга $(n + 1, 2)$.*

4. *Группа Ли преобразований $(B^n, *, e)$ индуцирует эффективную и транзитивную группу преобразований многообразия B с параметрической группой $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$.*

Докажем сначала первую часть теоремы. Действительно, свойства 1° и 2° вытекают из определения частичной лупы $(B^n, \circ, e)$. Свойство 3° следует из тождества $(I \circ a) \circ b = I \circ (a \circ b)$, где $a, b \in \Omega_{B^n}$, $I \in B^n$. Пусть выполняется равенство $I \circ a = I$, $\forall I \in \Omega_{B^n}$, тогда из аксиомы Б1 следует единственность решения $a = e$, т. е. выполняется свойство 4°. Свойство 5° вытекает также из аксиомы Б1.

Докажем теперь вторую часть теоремы. Изотопом частичной лупы $(B^n, \circ, e)$ при изотопии T, очевидно, является частичная лупа $(B^n, *, e)$. Проверим выполнимость свойств группы Ли преобразований. Очевидно, выполняются свойства 1°, 2°, 4° и 5° для частичной лупы $(B^n, *, e)$. По определению бинарной операции (5) $(I * a) * b = (I \circ \theta(a)) \circ \theta(b) = I \circ (\theta(a) \circ \theta(b)) = I * \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)) = I * (a \cdot b)$, где $a, b \in \Omega_{B^n}$, $I \in B^n$. Свойство 3° тогда следует из леммы.

Лемма 1. *Бинарная операция* (6) *в Ω_{B^n} является групповой, причем группы Ли $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$ и $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$ изоморфны.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как θ — диффеоморфизм, а $\circ$ — групповая операция, то в (6) имеет место однозначная разрешимость относительно любого аргумента. Выполняется ассоциативность. Действительно, $\forall a, b, c \in \Omega_{B^n}$ $(a \cdot b) \cdot c = \theta^{-1}(\theta(a) \circ \theta(b)) \cdot c = \theta^{-1}((\theta(a) \circ \theta(b)) \circ \theta(c)) = \theta^{-1}(\theta(a) \circ (\theta(b) \circ \theta(c))) = \theta^{-1}(\theta(a) \circ (\theta(b \cdot c)) = a \cdot (b \cdot c)$. Единицей является элемент e. Изоморфизм осуществляет диффеоморфизм $\theta : \Omega_{B^n} \to \Omega_{B^n}$, так как по (6) $\theta(a \cdot b) = \theta(a) \circ \theta(b)$.

Докажем третью часть теоремы. По определению, бинарная операция $\circ$ задается формулой (3), причем каждая компонента отображения $\bar{F}$ — метрическое отображение $\bar{f}$. Докажем, что $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$ задает эффективное действие группы Ли Ω_{B^n} на многообразии B. Свойство 1° вытекает из Б2, свойства 2° и 3° следуют из покомпонентной записи этих свойств для частичной лупы $(B^n, \circ, e)$. Для установления 4° следует выбрать n точек из B, составляющих точку из Ω_{B^n}, а затем воспользоваться первой частью данной теоремы. Транзитивность вытекает из аксиомы Б1.

Четвертая часть теоремы доказывается, как и третья, только относительно частичной лупы $(B^n, *, e)$ с бинарной операцией (5). Теорема 4 полностью доказана. □

Заметим, что действие группы Ли $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$ на многообразии B задается метрическим отображением $\bar{f} : B \times \Omega_{B^n} \to B$, а действие группы Ли $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$ — отображением $\breve{f} = \bar{f}(x, \theta(a)) : B \times \Omega_{B^n} \to B$, $x \in B$, $a \in \Omega_{B^n}$. В частном случае $\theta(x) = x$ и $\theta(x) = x^{-1}$.

Определение 4. Группа Ли преобразований многообразия B с параметрической группой, изоморфной $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$, называется *феноменологически симметричной*, если она на многообразиях B и Ω_{B^n} задает физическую структуру ранга $(n+1, 2)$.

Найдем теперь $n+1$-точечные инварианты феноменологически симметричной группы Ли преобразований $(B^n, *, e)$. Эти инварианты задают функциональную связь (4). Пусть I^{-1} — правый обратный к элементу I в $(\Omega_{B^n}, \cdot, e)$. Тогда можно построить новую квазигруппу $(\Omega_{B^n}, \bullet)$ с правой единицей и бинарной операцией

$$I \bullet J = I \cdot J^{-1}. \tag{7}$$

Теорема 5. *В квазигруппе $(\Omega_{B^n}, \bullet)$ выполняются свойства:*

I. *Тождество:*

$$(I \bullet A) \bullet (J \bullet A) = I \bullet J \tag{8}$$

для любых $I, J, A \in \Omega_{B^n}$;

II. *Правый обратный элемент в $(\Omega_{B^n}, \bullet)$ совпадает с ним самим.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала тождество I. По формуле (5) $I * K = I \circ \theta(K) = e$, значит $K = I^{-1} = \theta^{-1}(I_\circ^{-1})$, где $I_\circ^{-1}$ — обратные к I в группе Ли $(\Omega_{B^n}, \circ, e)$. Перепишем сначала правую часть выражения (8) через групповую операцию. По формуле (5) $I \cdot J^{-1} = I \circ \theta(J^{-1}) = I \circ \theta(\theta^{-1}(J_\circ^{-1})) = I \circ J_\circ^{-1}$. Преобразуем теперь левую часть выражения (8). $(I \cdot A) \cdot (J \cdot A)^{-1} = (I \circ \theta(A)) \circ \theta(\theta^{-1}((J \circ \theta(A))_\circ^{-1})) = I \circ J_\circ^{-1}$. Тогда левая и правая части выражения (8) совпадают, т. е. оно является тождеством. Докажем теперь свойство II. Действительно, $I \bullet J = e$, следовательно $(I^{-1})_\bullet = J$. С другой стороны, $I \bullet J = I \cdot J^{-1} = e$, поэтому $I \cdot ((I^{-1})_\bullet)^{-1} = e$, значит, $I^{-1} = ((I^{-1})_\bullet)^{-1}$, следовательно, $i = (I^{-1})_\bullet$, т. е. свойство доказано. □

Тождество (8) можно записать еще так:

$$(I \bullet A) \bullet (J \bullet A) = (I \bullet B) \bullet (J \bullet B). \tag{8$'$}$$

Из доказательства теоремы 5 следует, что формула ($8'$) задает инвариант группы Ли преобразований $(B^n, *, e)$. Учитывая связь этой группы преобразований с физической структурой ранга $(n+1, 2)$, заключаем, что формула ($8'$) задает функциональную связь

(4). Любая компонента формулы ($8'$) задает явный вид инварианта группы преобразований.

Квазигруппа с тождеством (8) называется *квазигруппой Уорда* [6].

§ 3. Однометрические физические структуры

Рассмотрим физическую структуру, для которой $\dim B = 1$. Метрическое отображение этой структуры на B задает действие группы Ли. Классификация локальных действий таких групп Ли, т. е. локальных групп Ли преобразований прямой R, построена Г. Г. Михайличенко.

Теорема 6 (Г. Г. Михайличенко [3; 4; 7]). *Однометрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ существуют только при $n = 1, 2, 3$. В локальных координатах, с точностью до локального диффеоморфизма $f \to \psi(f)$, метрическое отображение f определяется выражениями:*

при $n = 1$, т. е. ранга $(2, 2)$:

$$f = x\xi; \tag{9.1}$$

при $n = 2$, т. е. ранга $(3, 2)$:

$$f = x\xi + \eta; \tag{9.2}$$

при $n = 3$, т. е. ранга $(4, 2)$:

$$f = \frac{x\xi + \eta}{x + \rho}. \tag{9.3}$$

Найдем $n + 1$-точечные инварианты и функциональные связи для групп преобразований (9.1)–(9.3). Эта задача решается двумя методами. Первый метод основан на результатах § 2, а второй — на групповом методе поиска инвариантов и на теореме, доказанной Г. А. Толстихоной и А. М. Шелеховым в работе [9].

Теорема 7. *Функциональная связь s-метрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ может быть записана в виде*

$$L_k(f(i_1\alpha), \ldots, f(i_{n+1}\alpha)) = L_k(f(i_1\beta), \ldots, f(i_{n+1}\beta)), \tag{10}$$

где $L_k(x_1, \ldots, x_{n+1})$ — $n + 1$-точечный инвариант группы преобразований, $k = 1, \ldots, s$, $n \leq s + 2$.

Теорема 8. *Метрическая функция f, построенная по бинарной операции (7), и $(n + 1)$-точечный инвариант L для однометрической физической структуры ранга $(n + 1, 2)$ записываются так:*

для ранга $(2, 2)$:

$$f = \frac{x}{\xi}, \tag{11.1}$$

$$L(x, y) = \frac{x}{y}; \tag{12.1}$$

для ранга $(3, 2)$:

$$f = \frac{x - \eta}{\xi - \eta}, \tag{11.2}$$

$$L(x,y,z)=\frac{x-z}{y-z}; \tag{12.2}$$

для ранга $(4,2)$*:*

$$f=\frac{(x-\eta)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\eta)}, \tag{11.3}$$

$$L(x,y,z,w)=\frac{(x-z)(y-w)}{(x-w)(y-z)}. \tag{12.3}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы сначала проведем первым методом, а затем вторым, основанным на работе [9]. Для функции (9.1) групповая операция (7) записывается так: $x \bullet y = \frac{x}{y}$. Значит, по ней построенная метрическая функция и двухточечный инвариант L задаются формулами (11.1), (12.1). Для доказательства формул (11.2) и (12.2) рассмотрим бинарную операцию в квазигруппе $(K,*,e)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\xi+\eta \\ y\xi+\eta \end{pmatrix}$, значит, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x-\eta}{\xi-\eta} \\ \frac{y-\eta}{\xi-\eta} \end{pmatrix}$. Каждая из компонент последнего произведения дает метрическую функцию (11.2) и трехточечный инвариант (12.2). Докажем теперь формулы (11.3) и (12.3). Для этого рассмотрим бинарную операцию в $(K,*,e)$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x\xi+\eta}{x+\rho} \\ \frac{y\xi+\eta}{y+\rho} \\ \frac{z\xi+\eta}{z+\rho} \end{pmatrix}$, поэтому $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(x-\eta)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\eta)} \\ \frac{(y-\eta)(\xi-\rho)}{(y-\rho)(\xi-\eta)} \\ \frac{(z-\eta)(\xi-\rho)}{(z-\rho)(\xi-\eta)} \end{pmatrix}$. Каждая из компонент этого произведения дает метрическую функцию (11.3) и четырехточечный инвариант (12.3).

Для доказательства теоремы вторым методом запишем операторы групп Ли преобразований (9.1)–(9.3):

для (9.1): $X = x\partial_x$;

для (9.2): $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x\partial_x$;

для (9.3): $X_1 = \partial_x$, $X_2 = x\partial_x$, $X_3 = x^2\partial_x$.

Вычисляя в первом случае двухточечный инвариант, во втором — трехточечный инвариант, а в третьем — четырехточечный, получаем (12.1), (12.2) и (12.3). □

Для записи явного выражения функциональной связи (1) необходимо воспользоваться формулой (8′) или (10).

§ 4. Двуметрические физические структуры

Рассмотрим двуметрическую физическую структуру, т. е. $\dim B = 2$. Метрическое отображение этой структуры на B, как доказано выше, задает действие группы Ли. Классификация локальных действий таких групп построена Г. Г. Михайличенко.

Теорема 9. *Двуметрические физические структуры ранга* $(n+1,2)$ *существуют только для* $n=1,2,3,4$. *С точностью до локального диффеоморфизма* $\psi(f)\to f$ *функция* $f=(f^1,f^2)$*, задающая на 2-мерном и* $2n$*-мерном многообразиях* B *и* N *двуметрическую физическую структуру ранга* $(n+1,2)$*, в надлежаще выбранных в них системах локальных координат, определяется следующими выражениями:*

для $n=1$, т. е. ранга $(2,2)$:

$$f^1 = x+\xi, \qquad f^2 = y+\eta,$$
$$f^1 = (x+\xi)y, \quad f^2 = (x+\xi)\eta;$$

для $n=2$, т. е. ранга $(3,2)$:

$$\begin{aligned}
&f^1 = x\xi+\varepsilon y\eta+\mu, && f^2 = x\eta+y\xi+\nu, && \varepsilon=-1,0,1,\\
&f^1 = x\xi+\mu, && f^2 = x\eta+y\xi^c+\nu, && c\neq 1,\\
&f^1 = x\xi+\mu, && f^2 = x\eta+y\xi^2+x^2\xi^2\ln\xi+\nu, &&\\
&f^1 = x\xi+y\mu, && f^2 = x\eta+y\nu; &&
\end{aligned}$$

для $n=3$, т. е. ранга $(4,2)$:

$$f = \frac{x\xi+\eta}{x+\rho},$$

где $f=f^1+\varepsilon f^2$, $x=x_1+\varepsilon x_2$, $\xi=\xi_1+\varepsilon\xi_2$, $\eta=\eta_1+\varepsilon\eta_2$, $\rho=\rho_1+\varepsilon\rho_2$, $\varepsilon^2=-1,0,1$,

$$f^1 = \frac{x\xi+\mu}{x+\rho}, \qquad f^2 = \frac{x\eta+y\nu+\tau}{x+\rho},$$
$$f^1 = x\xi+y\mu+\rho, \quad f^2 = x\eta+y\nu+\tau;$$

для $n=4$, т. е. ранга $(5,2)$:

$$f^1 = \frac{x\xi+y\mu+\rho}{x\varphi+y+\omega}, \quad f^1 = \frac{x\eta+y\nu+\tau}{x\varphi+y+\omega}.$$

Найдем теперь $n+1$-точечные инварианты групп Ли преобразований.

Теорема 10. *Метрическая функция f, построенная по квазигрупповой операции (7) и $n+1$-точечный инвариант L для двуметрической физической структуры ранга $(n+1,2)$ записываются так:*

для $n=1$, т. е. ранга $(2,2)$:

$$\begin{aligned}
&f^1 = x-\xi, && f^2 = y-\eta, && L_1(x,y) = x_1-y_1, && L_2(x,y) = x_2-y_2;\\
&f^1 = (x-\xi)\eta, && f^2 = \frac{y}{\eta}, && L_1(x,y) = (x_1-y_1)y_2, && L_2(x,y) = \frac{x_2}{y_2};
\end{aligned}$$

для $n=2$, т. е. ранга $(3,2)$:

$$f^1 = \frac{\begin{vmatrix} x & \xi-\mu\\ \mu & \xi-\mu\end{vmatrix} - \varepsilon\begin{vmatrix} y & \eta-\nu\\ \nu & \eta-\nu\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2}, \quad f^2 = -\frac{\begin{vmatrix} x-\xi & y-\eta\\ \mu-\xi & \nu-\eta\end{vmatrix}}{(\xi-\mu)^2-\varepsilon(\eta-\nu)^2},$$

$$L_1(x,y,z) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & y_1-z_1\\ z_1 & y_1-z_1\end{vmatrix} - \varepsilon\begin{vmatrix} x_2 & y_2-z_2\\ z_2 & y_2-z_2\end{vmatrix}}{(y_1-z_1)^2-\varepsilon(y_2-z_2)^2}, \quad L_2(x,y,z) = -\frac{\begin{vmatrix} x_1-z_1 & x_2-z_2\\ y_1-z_1 & y_2-z_2\end{vmatrix}}{(y_1-z_1)^2-\varepsilon(y_2-z_2)^2},$$

где $\varepsilon=-1,0,1$;

$$f^1 = \frac{x-\mu}{\xi-\mu}, \quad f^2 = -\begin{vmatrix} x-\mu & y-\nu\\ \xi-\mu & \eta-\nu\end{vmatrix}/(\xi-\mu)^{c+1},$$

$$L_1(x,y,z)=\frac{x_1-z_1}{y_1-z_1},\quad L_2(x,y,z)=-\begin{vmatrix}x_1-z_1 & x_2-z_2\\ y_1-z_1 & y_2-z_2\end{vmatrix}/(y_1-z_1)^{c+1},$$

где $c\neq 1$;

$$f^1=\frac{x-\mu}{\xi-\mu},\quad f^2=-\frac{\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \xi & \eta & 1\\ \mu & \nu & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x & x^2 & 1\\ \xi & \xi^2 & 1\\ \mu & \mu^2 & 1\end{vmatrix}\ln(\xi-\mu)}{(\xi-\mu)^3},$$

$$L_1(x,y,z)=\frac{x_1-z_1}{y_1-z_1},\quad L_2(x,y,z)=-(y_1-z_1)^{-3}\{\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ y_1 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1 & x_1^2 & 1\\ y_1 & y_1^2 & 1\\ z_1 & z_1^2 & 1\end{vmatrix}\ln(y_1-z_1)\};$$

$$f^1=\frac{x\nu-y\mu}{\xi\nu-\eta\mu},\quad f^2=\frac{x\eta-y\xi}{\xi\nu-\eta\mu},$$

$$L_1(x,y,z)=\frac{x_1z_2-x_2z_1}{y_1z_2-y_2z_1},\quad L_2(x,y,z)=\frac{x_1y_2-x_2y_1}{y_1z_2-y_2z_1};$$

для $n=3$, *т. е. ранга* $(4,2)$:

$$f=\frac{(x-\eta)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\eta)},\quad L(x,y,z,w)=\frac{(x-z)(y-w)}{(x-w)(y-z)},$$

где $L=L_1+\varepsilon L_2$, $f=f^1+\varepsilon f^2$, $x=x_1+\varepsilon x_2$, $y=y_1+\varepsilon y_2$, $z=z_1+\varepsilon z_2$, $w=w_1+\varepsilon w_2$, $\xi=\xi_1+\varepsilon\xi_2$, $\eta=\eta_1+\varepsilon\eta_2$, $\rho=\rho_1+\varepsilon\rho_2$, $\varepsilon^2=-1,0,1$;

$$f^1=\frac{(x-\mu)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)},\quad f^2=\frac{(\rho-\mu)(\xi-\rho)}{(x-\rho)(\xi-\mu)}\cdot\frac{\begin{vmatrix}x-\mu & y-\nu\\ \xi-\mu & \eta-\nu\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi-\rho & \eta-\tau\\ \mu-\rho & \nu-\tau\end{vmatrix}},$$

$$L_1(x,y,z,w)=\frac{(x_1-z_1)(y_1-w_1)}{(x_1-w_1)(y_1-z_1)},\ L_2(x,y,z,w)=\frac{(w_1-z_1)(y_1-w_1)}{(x_1-w_1)(y_1-z_1)}\cdot\frac{\begin{vmatrix}x_1-z_1 & x_2-z_2\\ y_1-z_1 & y_2-z_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}y_1-w_1 & y_2-w_2\\ z_1-w_1 & z_2-w_2\end{vmatrix}};$$

$$f^1=\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \mu & \nu & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\xi & \eta & 1\\ \mu & \nu & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix},\quad f^2=\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \xi & \eta & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\mu & \nu & 1\\ \xi & \eta & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix},$$

$$L_1(x,y,z,w)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\\ w_1 & w_2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}y_1 & y_2 & 1\\ z_1 & z_2 & 1\\ w_1 & w_2 & 1\end{vmatrix},\quad L_2(x,y,z,w)=\begin{vmatrix}x_1 & x_2 & 1\\ y_1 & y_2 & 1\\ w_1 & w_2 & 1\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}z_1 & z_2 & 1\\ y_1 & y_2 & 1\\ w_1 & w_2 & 1\end{vmatrix};$$

для $n=4$, *т. е. ранга* $(5,2)$:

$$f^1=\frac{\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \mu & \nu & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi & \eta & 1\\ \mu & \nu & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\xi & \eta & 1\\ \rho & \tau & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \rho & \tau & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}},\quad f^2=\frac{\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \xi & \eta & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\xi & \eta & 1\\ \mu & \nu & 1\\ \rho & \tau & 1\end{vmatrix}}\cdot\frac{\begin{vmatrix}\mu & \nu & 1\\ \rho & \tau & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}x & y & 1\\ \rho & \tau & 1\\ \varphi & \omega & 1\end{vmatrix}},$$

$$L_1(x,y,z,w,u) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}, \quad L_2(x,y,z,w,u) = \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ y_1 & y_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & 1 \\ z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \end{vmatrix}} \cdot \frac{\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & 1 \\ w_1 & w_2 & 1 \\ u_1 & u_2 & 1 \end{vmatrix}},$$

причем, например, $x = (x_1, x_2)$. □

Список литературы

1. *Симонов А. А.* Обобщенное матричное умножение как эквивалентное представление теории физических структур // Приложение к книге Ю. И. Кулакова «Теория физических структур». М., 2004.

2. *Белоусов В. Д.* Основы теории квазигрупп и луп. М.: Наука, 1967.

3. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул – Горно-Алтайск, 2003.

4. *Михайличенко Г. Г.* Феноменологическая и групповая симметрия в геометрии двух множеств (теории физических структур) // Докл. АН СССР. 1985. Т. 24, № 1. С. 39–41.

5. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

6. *Chatterjea S. K.* On Ward Quasigroups // Pure Math. Manuscript. 1987. No. 6. P. 31–34.

7. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.

8. *Михайличенко Г. Г.* Двуметрические физические структуры ранга $(n+1, 2)$ // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 132–143.

9. *Толстихина Г. А., Шелехов А. М.* Три-ткани, определяемые группами преобразований // Докл. АН РФ. 2002. Т. 385, № 4. С. 462–464.

Материал поступил в редколлегию 08.06.2008

Адреса авторов

КЫРОВ Владимир Александрович
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск
ул. Ленкина, 1, каф. физики и МПФ
e-mail: kfizika@gasu.ru

МУРАДОВ Роман Мохуббатович
РОССИЯ, 649000, Горно-Алтайск
ул. Ленкина, 1, каф. физики и МПФ
e-mail: kfizika@gasu.ru