УДК 517.925.54+517.929

И. И. Матвеева, А. М. Попов

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ СИСТЕМЫ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ МНОГОСТАДИЙНОГО СИНТЕЗА ВЕЩЕСТВА*

Рассматривается задача Коши для системы дифференциальных уравнений, возникающей при моделировании многостадийного синтеза вещества. Изучаются свойства последней компоненты решения, описывающей концентрацию конечного продукта синтеза, в зависимости от параметра τ, характеризующего время протекания процесса синтеза. Устанавливается непрерывная зависимость от τ с указанием оценок на модуль непрерывности, доказывается равномерная сходимость при $\tau \to 0$, при этом предельная функция является решением задачи Коши для одного обыкновенного дифференциального уравнения.

Ключевые слова: многостадийный синтез вещества, система обыкновенных дифференциальных уравнений, параметрическая зависимость решений.

Введение

Рассмотрим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -\frac{n-1}{\tau}x_1 + g(x_n),\\
\frac{dx_i}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}x_{i-1} - \frac{n-1}{\tau}x_i, \quad i = 2,\dots,n-1, \qquad (1)\\
\frac{dx_n}{dt} &= \frac{n-1}{\tau}x_{n-1} - \theta x_n,
\end{aligned}$$

где $\tau > 0$, $\theta > 0$, функция $g(u)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица:

$$\sup_{u\in R}|g(u)| = G < \infty, \quad |g(u_1) - g(u_2)| \le L|u_1 - u_2|.$$

Для системы (1) рассмотрим задачу Коши с нулевыми начальными условиями

$$x_1|_{t=0} = \ldots = x_n|_{t=0} = 0. \qquad (2)$$

Система (1) возникает при моделировании многостадийного синтеза вещества без ветвления [1–3]. Первое уравнение описывает закон инициации синтеза, последнее — закон утилизации вещества, τ — суммарное время протекания процесса синтеза, $x_i(t,\tau)$ — концентрация вещества на i-й стадии процесса, $x_n(t,\tau)$ — концентрация конечного продукта синтеза. Целью данной работы является изучение свойств последней компоненты $x_n(t,\tau)$ решения задачи Коши (1), (2) в зависимости от параметра τ.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 107).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 3. С. 86–94

Следует отметить, что в [1] были изучены свойства $x_n(t,\tau)$ при фиксированном значении параметра τ и неограниченном увеличении числа уравнений n. Была установлена интересная связь между решениями систем обыкновенных дифференциальных уравнений больших размеров и решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Именно, было показано, что имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t,\tau) = x(t,\tau), \tag{3}$$

при этом предельная функция $x(t,\tau)$ является решением начальной задачи для уравнения с запаздывающим аргументом

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}x(t,\tau) = -\theta x(t,\tau) + g(x(t-\tau,\tau)), \quad t > \tau, \\ &x(t,\tau) = 0, \quad t \in [0,\tau]. \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что сходимость (3) была установлена на отрезке $[0,T]$, где $T > \tau$ такое, что

$$L\left(\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\right) < 1. \tag{5}$$

Нас будет интересовать поведение $x_n(t,\tau)$ в зависимости от параметра τ, при этом число уравнений n считаем фиксированным. В настоящей работе мы устанавливаем равномерную сходимость

$$\lim_{\tau\to 0} x_n(t,\tau) = y(t), \quad t \in [0,T],$$

где T удовлетворяет неравенству (5), при этом получаем оценку на скорость сходимости. Мы показываем, что предельная функция $y(t)$ является решением задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dt} = -\theta y + g(y), \quad t > 0, \\ &y|_{t=0} = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Отметим, что при $\tau \to 0$ коэффициенты системы (1) неограниченно возрастают. Поскольку параметр τ отвечает за время протекания процесса синтеза, то полученные результаты дают эффективный метод для вычисления концентрации вещества, когда переход от одной к другой стадии синтеза происходит «почти мгновенно». Действительно, вместо задачи Коши (1), (2) мы можем решать задачу Коши (6) для одного обыкновенного дифференциального уравнения. Тогда в силу указанной сходимости $y(t) \approx x_n(t,\tau)$ при $\tau \ll 1$. Доказательство этих результатов содержится в первом параграфе. Во втором параграфе мы показываем, что для последних компонент $x_n(t,\tau)$ решений задач Коши вида (1), (2) имеет место равенство повторных пределов

$$\lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty} x_n(t,\tau) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\tau\to 0} x_n(t,\tau).$$

Полученные результаты анонсированы в [4].

Авторы выражают глубокую благодарность проф. Г. В. Демиденко, д-ру биол. наук В. А. Лихошваю за полезные дискуссии и проф. E. Mjolsness за интерес к задаче.

§ 1. Свойства решения задачи Коши (1), (2)

В этом параграфе мы исследуем свойства последней компоненты $x_n(t,\tau)$ решения задачи Коши (1), (2) в зависимости от параметра τ. Нетрудно показать, что $x_n(t,\tau)$ является решением задачи Коши с нулевыми начальными данными для дифференциального уравнения n-го порядка

$$\left(\frac{d}{dt}+\theta\right)\left(\frac{d}{dt}+\frac{n-1}{\tau}\right)^{n-1}x_n=\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{n-1}g(x_n),\quad t>0,$$

$$x_n^{(i)}|_{t=0}=0,\quad i=0,\dots,n-1.$$

В силу формулы Коши (см., например: [5]), решение этой задачи представимо в виде

$$x_n(t,\tau)=\int\limits_0^t\psi_n(t-s,\tau)g(x_n(s,\tau))\,ds, \tag{7}$$

где

$$\psi_n(t,\tau)=\frac{e^{-\theta t}}{\left(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1}}S(t,\tau),\quad S(t,\tau)=1-e^{-\omega t}\sum_{k=0}^{n-2}\frac{(\omega t)^k}{k!},\quad \omega=\frac{n-1}{\tau}-\theta. \tag{8}$$

При доказательстве основных результатов работы мы будем использовать интегральное уравнение (7).

Теорема 1. *Пусть T удовлетворяет неравенству (5), $\frac{n-1}{\theta}>\tau_1>\tau_2>0$. Тогда имеет место оценка*

$$\max_{t\in[0,T]}\bigl|x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)\bigr|\le C(\tau_1)\Bigl(1-L\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\Bigr)^{-1}(\tau_1-\tau_2), \tag{9}$$

где $C(\tau_1)=\dfrac{G\bigl(2-\frac{\theta\tau_1}{n-1}-e^{-\theta T}\bigr)}{\bigl(1-\frac{\theta\tau_1}{n-1}\bigr)^n}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_n(t,\tau_1)$ и $x_n(t,\tau_2)$ — решения задачи Коши (1), (2) при $\tau=\tau_1$ и $\tau=\tau_2$ соответственно. В силу (7) для разности этих решений получаем

$$\begin{aligned}x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)&=\int\limits_0^t\psi_n(t-s,\tau_1)g(x_n(s,\tau_1))\,ds-\int\limits_0^t\psi_n(t-s,\tau_2)g(x_n(s,\tau_2))\,ds=\\&=\int\limits_0^t(\psi_n(t-s,\tau_1)-\psi_n(t-s,\tau_2))g(x_n(s,\tau_2))\,ds+\\&\quad+\int\limits_0^t\psi_n(t-s,\tau_1)(g(x_n(s,\tau_1))-g(x_n(s,\tau_2)))\,ds=I_1(t)+I_2(t).\end{aligned} \tag{10}$$

Вначале проведем оценки для функции $I_1(t)$. Добавляя и отнимая функцию

$$\int\limits_0^t\frac{e^{-\theta(t-s)}}{\left(1-\frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^{n-1}}S(t-s,\tau_2)g(x_n(s,\tau_2))\,ds,$$

получаем

$$I_1(t) = \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^{n-1}} - \frac{1}{\left(1 - \frac{\theta\tau_2}{n-1}\right)^{n-1}} \right) \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} S(t-s,\tau_2) g(x_n(s,\tau_2))\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \frac{e^{-\theta(t-s)}}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^{n-1}} \big(S(t-s,\tau_1) - S(t-s,\tau_2)\big) g(x_n(s,\tau_2))\, ds = I_{1,1}(t) + I_{1,2}(t).$$

Очевидно, для функции $I_{1,1}(t)$ имеем

$$I_{1,1}(t) = \frac{\frac{\theta}{n-1}(\tau_1 - \tau_2) \sum\limits_{j=0}^{n-2} \left(1 - \frac{\theta\tau_2}{n-1}\right)^{n-2-j} \left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^j}{\left(1 - \frac{\theta\tau_2}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^{n-1}} \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} S(t-s,\tau_2) g(x_n(s,\tau_2))\, ds.$$

Поскольку $S(t,\tau_j) < 1$, $j = 1, 2$, и $\sup\limits_{u \in R} |g(u)| = G$, то

$$\big|I_{1,1}(t)\big| \le \frac{G\theta(\tau_1 - \tau_2)}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^n} \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}\, ds = \frac{G(1 - e^{-\theta t})}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^n} (\tau_1 - \tau_2).$$

Тогда для любого $T > 0$ имеем

$$\max_{t \in [0,T]} \big|I_{1,1}(t)\big| \le \frac{G(1 - e^{-\theta T})}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^n} (\tau_1 - \tau_2). \tag{11}$$

Рассмотрим функцию $I_{1,2}(t)$. В силу ограниченности функции $g(u)$ получаем

$$\big|I_{1,2}(t)\big| \le \frac{G}{\left(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\right)^{n-1}} \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} \big|S(t-s,\tau_1) - S(t-s,\tau_2)\big|\, ds. \tag{12}$$

Обозначим последний интеграл через $J(t)$. По определению

$$J(t) = \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)} \left| \sum_{k=0}^{n-2} e^{-\omega_1(t-s)} \frac{(\omega_1(t-s))^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} e^{-\omega_2(t-s)} \frac{(\omega_2(t-s))^k}{k!} \right| ds =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-\theta\xi} \left| \sum_{k=0}^{n-2} e^{-\omega_1\xi} \frac{(\omega_1\xi)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n-2} e^{-\omega_2\xi} \frac{(\omega_2\xi)^k}{k!} \right| d\xi.$$

Заметим, что под знаком модуля стоит неотрицательная функция. Действительно, найдем производную функции $R(t,\tau) = \sum\limits_{k=0}^{n-2} e^{-\omega t} \frac{(\omega t)^k}{k!}$ по τ:

$$\frac{\partial R(t,\tau)}{\partial \tau} = \frac{n-1}{\tau^2} e^{-\omega t} \frac{(\omega t)^{n-2}}{(n-2)!} t. \tag{13}$$

Очевидно, она неотрицательна при $t \ge 0$, $\tau > 0$. Следовательно,

$$J(t) = \int\limits_0^t e^{-\theta\xi} (R(\xi,\tau_1) - R(\xi,\tau_2))\, d\xi =$$

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^t e^{-\theta\xi} \frac{dR(\xi, \tau_1\lambda + \tau_2(1-\lambda))}{d\lambda}\, d\xi\, d\lambda = \int\limits_0^1 \int\limits_0^t e^{-\theta\xi}\, \frac{\partial R(\xi,\tau)}{\partial \tau}\, d\xi \Big|_{\tau=\tau_1\lambda+\tau_2(1-\lambda)} d\lambda(\tau_1 - \tau_2).$$

В силу (8) и (13) имеем

$$J(t) = \int\limits_0^1 \Bigg[\int\limits_0^t \frac{(\omega+\theta)^2}{\omega} e^{-(\omega+\theta)\xi} \frac{(\omega\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\, d\xi \;\Big|_{\tau=\tau_1\lambda+\tau_2(1-\lambda)} \Bigg] d\lambda\, (\tau_1 - \tau_2) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\omega^{n-2}}{(\omega+\theta)^{n-2}} \Bigg[\int\limits_0^{(\omega+\theta)t} e^{-\eta} \frac{\eta^{n-1}}{(n-1)!}\, d\eta \;\Big|_{\tau=\tau_1\lambda+\tau_2(1-\lambda)} \Bigg] d\lambda\, (\tau_1 - \tau_2) =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\omega^{n-2}}{(\omega+\theta)^{n-2}} \Bigg[1 - e^{(\omega+\theta)t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\omega+\theta)^k t^k}{k!} \Big|_{\tau=\tau_1\lambda+\tau_2(1-\lambda)} \Bigg] d\lambda\, (\tau_1 - \tau_2).$$

Очевидно, при $n \geq 2$ подынтегральная функция не превосходит единицы. Следовательно,

$$J(t) \leq (\tau_1 - \tau_2).$$

Тогда из (12) для любого $T > 0$ получаем

$$\max_{t\in[0,T]} \big| I_{1,2}(t) \big| \;\leq\; \frac{G}{\big(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\big)^{n-1}} (\tau_1 - \tau_2). \tag{14}$$

В силу (11) и (14) имеем

$$\max_{t\in[0,T]} \big| I_1(t) \big| \leq \frac{G\big(2 - \frac{\theta\tau_1}{n-1} - e^{-\theta T}\big)}{\big(1 - \frac{\theta\tau_1}{n-1}\big)^{n}} (\tau_1 - \tau_2). \tag{15}$$

Рассмотрим функцию $I_2(t)$. По определению

$$|I_2(t)| \leq \int\limits_0^t \psi_n(\xi,\tau_1) |g(x_n(t-\xi,\tau_1)) - g(x_n(t-\xi,\tau_2))|\, d\xi.$$

Поскольку функция $g(u)$ удовлетворяет условию Липшица, то

$$\max_{t\in[0,T]} |I_2(t)| \leq L \max_{t\in[0,T]} |x_n(t,\tau_1) - x_n(t,\tau_2)| \int\limits_0^T \psi_n(\xi,\tau_1)\, d\xi. \tag{16}$$

Нетрудно показать, что при любом $n \geq 2$

$$\int\limits_0^T \psi_n(\xi,\tau_1)\, d\xi \leq \frac{1 - e^{-\theta T}}{\theta}. \tag{17}$$

Действительно, из определения (8) функции $\psi_n(t,\tau)$ имеем

$$\psi_{n_1}(t,\tau) < \psi_{n_2}(t,\tau), \qquad n_1 > n_2.$$

Следовательно, нам достаточно доказать (17) при $n = 2$. Очевидно,

$$\int_0^T \psi_2(\xi,\tau_1)\,d\xi = \frac{1}{1-\theta\tau_1}\int_0^T e^{-\theta\xi}(1-e^{-\omega_1\xi})\,d\xi = \frac{1}{1-\theta\tau_1}\left(\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta} - \frac{1-e^{-(\theta+\omega_1)T}}{\theta+\omega_1}\right) \le$$

$$\le \frac{1}{1-\theta\tau_1}\left(\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta} - \frac{1-e^{-\theta T}}{\theta+\omega_1}\right) = \frac{\omega_1}{(1-\theta\tau_1)(\theta+\omega_1)\theta}(1-e^{-\theta T}).$$

В силу (8) при $n=2$

$$\frac{\omega_1}{(1-\theta\tau_1)(\theta+\omega_1)\theta} = \frac{1}{\theta}.$$

Следовательно,

$$\int_0^T \psi_2(\xi,\tau_1)\,d\xi \le \frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}.$$

Используя (16) и (17), имеем

$$\max_{t\in[0,T]}|I_2(t)| \le L\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\max_{t\in[0,T]}|x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)|.$$

Следовательно, в силу (10) получаем

$$\max_{t\in[0,T]}|x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)| \le \max_{t\in[0,T]}|I_1(t)| + L\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\max_{t\in[0,T]}|x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)|.$$

Поскольку T удовлетворяет неравенству (5), то

$$\max_{t\in[0,T]}|x_n(t,\tau_1)-x_n(t,\tau_2)| \;\le\; \left(1-L\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\right)^{-1}\max_{t\in[0,T]}|I_1(t)|. \tag{18}$$

Отсюда, используя (15), получаем (9).

Теорема доказана.

В силу полноты пространства $C[0,T]$ из теоремы 1 следует, что имеет место равномерная сходимость

$$\lim_{\tau\to 0} x_n(t,\tau) = y(t), \quad 0\le t\le T, \tag{19}$$

при этом справедлива оценка на скорость сходимости

$$\max_{t\in[0,T]}|x_n(t,\tau)-y(t)| \le C(\tau)\left(1-L\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}\right)^{-1}\tau, \tag{20}$$

где

$$C(\tau) = \frac{G\left(2-\frac{\theta\tau}{n-1}-e^{-\theta T}\right)}{\left(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^n}, \qquad \tau < \frac{n-1}{\theta}.$$

Действительно, переходя в (9) к пределу при $\tau_2\to 0$, получаем оценку (20).

Естественно возникает вопрос: Что можно сказать о дифференциальных свойствах предельной функции $y(t)$? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $T>0$ удовлетворяет неравенству* (5). *Предельная функция $y(t)$ является решением задачи Коши* (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как отмечалось в начале параграфа, для функции $x_n(t,\tau)$ имеет место интегральное соотношение (7):

$$x_n(t,\tau) \equiv \int\limits_0^t \psi_n(t-s,\tau)g(x_n(s,\tau))\,ds.$$

В силу равномерной сходимости (19), переходя к пределу при $\tau \to 0$, для функции $y(t)$ получаем

$$y(t) \equiv \int\limits_0^t e^{-\theta(t-s)}g(y(s))\,ds, \quad 0 \le t \le T.$$

Следовательно, $y(t)$ является решением здачи Коши (6).

Теорема доказана.

§ 2. Свойства решения начальной задачи (4)

Во введении мы отмечали, что в работе [1] исследовались свойства решений задач Коши вида (1), (2) при неограниченном увеличении количества уравнений n в системе (1). Было доказано, что последовательность $\{x_n(t,\tau)\}$ равномерно сходится при $n \to \infty$ к функции $x(t,\tau)$ на отрезке $[0,T]$, где T удовлетворяет неравенству (5), при этом предельная функция $x(t,\tau)$ является решением начальной задачи (4). В связи с этим возникает ряд вопросов. Что можно сказать о поведении последовательности функций $\{x(t,\tau)\}$, определяемой сходимостью (3), при $\tau \to 0$? Существует ли предел? Если он существует, то совпадает ли он с функцией $y(t)$, определяемой сходимостью (19), каковы его дифференциальные свойства? Ниже мы даем ответы на эти вопросы.

Теорема 3. *Пусть $T > 0$ удовлетворяет неравенству* (5). *При $\tau \to 0$ последовательность $\{x(t,\tau)\}$ равномерно сходится на отрезке* $[0,T]$

$$\lim_{\tau\to 0} x(t,\tau) = z(t),$$

при этом предельная функция $z(t)$ является решением задачи Коши (6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функции $x(t,\tau_1)$ и $x(t,\tau_2)$ являются решениями начальных задач вида (4) при τ_1 и τ_2 соответственно. Следовательно, они удовлетворяют интегральным тождествам

$$x(t,\tau_1) = \int\limits_0^{t-\tau_1} e^{-\theta(t-s-\tau_1)}g(x(s,\tau_1))\,ds, \quad \tau_1 \le t \le T,$$

$$x(t,\tau_2) = \int\limits_0^{t-\tau_2} e^{-\theta(t-s-\tau_2)}g(x(s,\tau_2))\,ds, \quad \tau_2 \le t \le T.$$

Для определенности будем считать $\tau_1 > \tau_2$.

Рассмотрим разность функций $x\,(t,\tau_1)$ и $x\,(t,\tau_2)$. При $0 \le t \le \tau_2$, очевидно, $x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2) \equiv 0$. При $\tau_2 < t \le \tau_1$ по определению $x(t,\tau_1) \equiv 0$. Тогда

$$|x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2)| = \Big|\int\limits_0^{t-\tau_2} e^{-\theta(t-s-\tau_2)}g(x(s,\tau_2))\,ds\Big| \le G|\tau_1-\tau_2|.$$

При $\tau_1 < t \le T$, используя условия на $g(u)$, имеем

$$|x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2)| \le \Big| \int\limits_0^{t-\tau_1} e^{-\theta(t-s-\tau_1)}(g(x(s,\tau_1)) - g(x(s,\tau_2))\,ds\Big| +$$

$$+ \Big| \int\limits_{t-\tau_1}^{t-\tau_2} e^{-\theta(t-s-\tau_2)} g(x(s,\tau_2))\,ds\Big| + \Big| \int\limits_0^{t-\tau_1} g(x(s,\tau_2))(e^{-\theta(t-s-\tau_1)} - e^{-\theta(t-s-\tau_2)})\,ds\Big| \le$$

$$\le L \int\limits_0^{t-\tau_1} e^{-\theta(t-s-\tau_1)}\,ds \max_{\xi\in[0,T]} |x(\xi,\tau_1) - x(\xi,\tau_2)| + G|\tau_1 - \tau_2| +$$

$$+ G \int\limits_0^{t-\tau_1} \Big(e^{-\theta(t-s-\tau_1)} - e^{-\theta(t-s-\tau_2)}\Big)\,ds =$$

$$= L\frac{1 - e^{-\theta(t-\tau_1)}}{\theta} \max_{\xi\in[0,T]} |x(\xi,\tau_1) - x(\xi,\tau_2)| + G|\tau_1 - \tau_2| +$$

$$+ G\Big(\frac{1 - e^{-\theta(t-\tau_1)}}{\theta} - \frac{e^{-\theta(\tau_1-\tau_2)} - e^{-\theta(t-\tau_2)}}{\theta}\Big) \le$$

$$\le L\frac{1 - e^{-\theta T}}{\theta} \max_{\xi\in[0,T]} |x(\xi,\tau_1) - x(\xi,\tau_2)| + 3G|\tau_1 - \tau_2|.$$

Отсюда получаем

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2)| \le L\frac{1 - e^{-\theta T}}{\theta} \max_{t\in[0,T]} |x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2)| + 3G|\tau_1 - \tau_2|$$

или

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t,\tau_1) - x(t,\tau_2)| \le 3G\Big(1 - L\frac{1 - e^{-\theta T}}{\theta}\Big)^{-1} |\tau_1 - \tau_2|. \tag{21}$$

Следовательно, последовательность $\{x(t,\tau)\}$ является фундаментальной в $C[0,T]$. В силу полноты пространства $C[0,T]$ последовательность $\{x(t,\tau)\}$ равномерно сходится:

$$\lim_{\tau\to 0} x(t,\tau) = z(t), \quad 0 \le t \le T. \tag{22}$$

Поскольку $x(t,\tau)$ удовлетворяет тождеству

$$x(t,\tau) \equiv \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(x(s,\tau))\,ds, \quad \tau \le t \le T,$$

то, переходя к пределу при $\tau \to 0$, получаем

$$z(t) \equiv \int\limits_0^{t} e^{-\theta(t-s)} g(z(t))\,ds, \quad 0 \le t \le T.$$

Следовательно, $z(t)$ является решением задачи Коши (6).

Теорема доказана.

Следствие 1. *Имеет место оценка*

$$\max_{t\in[0,T]} |x(t,\tau) - z(t)| \le C\tau,$$

где $C = 3G\left(1 - L\dfrac{1 - e^{-\theta T}}{\theta}\right)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение вытекает из оценки (21), если устремить τ_2 к нулю.

Следствие 2. *Имеет место соотношение*

$$\lim_{\tau\to 0}\lim_{n\to\infty} x_n(t,\tau) = \lim_{n\to\infty}\lim_{\tau\to 0} x_n(t,\tau).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $y(t)$, определенная в (19), и функция $z(t)$, определенная в (22), являются решением задачи Коши (6). В силу единственности решения они совпадают.

Список литературы

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В. и др.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.

2. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А. и др.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. выч. мат. и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

3. *Голубятников В. П., Демиденко Г. В., Евдокимов А. А. и др.* Теория генных сетей // Системная компьютерная биология/ Отв. ред. Н. А. Колчанов, С. С. Гончаров, В. А. Лихошвай, В. А. Иванисенко. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2008. С. 397–480.

4. *Matveeva I. I., Popov A. M.* Matrix Process Modelling: Dependence of Solutions of a System of Differential Equations on Parameter // Proc. of the Fifth Int. Conf. Bioinformatics of Genome Regulation and Structure (Novosibirsk, Russia, July 16–22, 2006). Novosibirsk: Institute of Cytology and Genetics, 2006. Vol. 3. P. 82–85.

5. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск, 1994.

Материал поступил в редколлегию 05.06.2009

Адреса авторов

МАТВЕЕВА Инесса Изотовна
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики
им. С. Л. Соболева СО РАН
e-mail: matveeva@math.nsc.ru

ПОПОВ Артем Михайлович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: artyom_p@gorodok.net