УДК 532.517.4 + 517.956.4

В. Н. Гребенёв, М. Ю. Филимонов

О СОХРАНЕНИИ ИНВАРИАНТА ЛОЙЦЯНСКОГО В МОДЕЛИ МИЛЛИОНЩИКОВА ДИНАМИКИ ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ*

Доказано существование решения начально-краевой задачи для модели Миллионщикова при замыкании уравнения Кармана–Ховарта. Исследована сходимость решения при стремлении вязкости ν к нулю. Установлена асимптотическая устойчивость автомодельного решения Миллионщикова для $t \to \infty$. Кроме того, показано, что интеграл Лойцянского играет роль закона сохранения в модели Миллионщикова динамики однородной изотропной турбулентности.

Ключевые слова: уравнение Кармана–Ховарта, модель Миллионщикова, инвариант Лойцянского, разрешимость начально-краевой задачи, формула Троттера–Като.

Изотропные однородные турбулентные течения — классический объект теоретической, вычислительной и прикладной гидродинамики турбулентных потоков. Подобные течения реализуются при экспериментальном моделировании развитой турбулентности за решеткой в (аэро-) гидродинамических трубах с высокой степенью изотропии (см. [1], где представлен подробный обзор литературы). Вопрос об асимптотическом поведении продольной двухточечной корреляционной функции флуктуации скорости $B_{LL}(r,t)$ является основным при изучении заключительного периода вырождения однородной изотропной турбулентности [2]. Анализируя работы по динамике однородных изотропных турбулентных потоков, можно сделать вывод о неполноте математических исследований в этом направлении (см. [3] и обзор литературы). В данной работе показано, что интеграл Лойцянского [4] является законом сохранения модели Миллионщикова [5] для замыкания уравнения Кармана-Ховарта, что позволило обосновать показатели вырождения однородной изотропной турбулентности на заключительном этапе. В частности, показано, что автомодельное решение Миллионщикова [5; 6] является асимптотическим решением (при $t \to \infty$) начально-краевой задачи для модели Миллионщикова в пределе больших чисел Рейнольдса. Полученные результаты выполнены на основе построения непрерывной сжимающей полугруппы для исследуемой задачи.

§ 1. Уравнение Кармана–Ховарта

Уравнение Кармана–Ховарта для корреляционных функций поля скорости в однородной изотропной и турбулентности имеет вид [2]

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r}r^4\left(B_{LL,L} + 2\nu\frac{\partial B_{LL}}{\partial r}\right) \tag{1}$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке программы Межрегиональные интеграционные проекты СО РАН (проект № 103).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 23–37

и представляет точное соотношение, связывающее продольную корреляционную функцию B_{LL} флуктуаций скорости и двухточечный момент третьего порядка $B_{LL,L}$. Уравнение (1) получается из уравнений Навье-Стокса после применения процедуры «осреднения» в предположении изотропии и однородности турбулентного течения (см., например, [2]). Появление градиента $\partial B_{LL,L}/\partial r$, который представляет собой дополнительную неизвестную функцию, в правой части уравнения является следствием нелинейности уравнений Навье-Стокса. Она не может быть определена только из уравнения (1) без использования каких-либо дополнительных гипотез. Вопросу о замыкании данного уравнения посвящено большое количество работ (см., например, обзоры [1; 3]). В [7; 8] использовалось предположение, что

$$B_{LL,L} = 2\nu_T \frac{\partial B_{LL}}{\partial r}, \tag{2}$$

где коэффициент турбулентной вязкости ν_T предполагался пропорциональным произведению размера турбулентных вихрей на характерную скорость, т. е.

$$\nu_T = \varkappa_2 r D_{LL}^{1/2}, \quad D_{LL} = 2[\overline{u'^2} - B_{LL}(r,t)], \quad \overline{u'^2} = B_{LL}(0,t), \quad \varkappa_2 = \frac{\sqrt{2}}{5C^{3/2}}. \tag{3}$$

Здесь D_{LL} — структурная функция второго порядка, C — универсальная постоянная, совпадающая с колмогоровской константой [2]. Отметим, что замыкающая гипотеза (3) по размерности величин не противоречит теории Колмогорова однородной изотропной турбулентности (см. подробности в [7]). В [5] коэффициент турбулентной вязкости полагался равным (модель Миллионщикова)

$$\nu_T = \varkappa_2 \overline{u'^2}^{1/2} r, \qquad \overline{u'^2} = B_{LL}(0,t), \tag{4}$$

который асимптотически совпадает с (3) на больших корреляционных расстояниях r, где $B_{LL} \approx 0$. Введением параметра $\varepsilon \in [0,1]$, модели (3) и (4) могут быть объединены в

$$\nu_T = \varkappa_2 r \sqrt{2[\overline{u'^2} - \varepsilon B_{LL}(r,t;\varepsilon)]}. \tag{5}$$

Таким образом, в рамках теории возмущений модель Миллионщикова по порядку параметра ε является начальным приближением для (5).

§ 1.1. *Группа растяжений для уравнения Кармана–Ховарта*

Для уравнения Кармана–Ховарта мы укажем две группы растяжений, допускаемых «невязким» представлением (1), записанном в следующем нормализованном виде:

$$\frac{\partial \overline{u'^2(t)} f(r,t)}{\partial t} = \frac{1}{r^4}\frac{\partial}{\partial r} r^4 \overline{u'^2(t)}^{3/2} h(r,t), \tag{6}$$

где f и h являются, соответственно, нормализованными двухточечными двойными и тройными корреляциями турбулентного поля скоростей. Уравнение (6) допускает следующие группы растяжений (см. [9; 10]):

$$G^{a_1}: t^* = t, \quad r^* = e^{a_1} r, \quad \overline{u'^2}^* = e^{2a_1}\overline{u'^2}, \quad f^* = f, \quad h^* = h, \tag{7}$$

$$G^{a_2}: t^* = e^{a_2} t, \quad r^* = r, \quad \overline{u'^2}^* = e^{-2a_2}\overline{u'^2}, \quad f^* = f, \quad h^* = h, \tag{8}$$

или

$$X_{a_1} = r\frac{\partial}{\partial r} + 2\overline{u'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{u'^2}}, \quad X_{a_2} = t\frac{\partial}{\partial t} - 2\overline{u'^2}\frac{\partial}{\partial \overline{u'^2}}. \tag{9}$$

Инфинитезимальные операторы X_{a_1} и X_{a_2} порождают двухпараметрическую группу точечных симметрий:

$$G^{a_1,a_2}\ :\ t^* = e^{a_2}t, \quad r^* = e^{a_1}r, \quad \overline{u'^2}^* = e^{2(a_1-a_2)}\overline{u'^2}, \quad f^* = f, \quad h^* = h. \tag{10}$$

Отметим, что

$$\hat{K} = \frac{r\overline{u'^2}^{3/2}\partial f/\partial r}{t^{-3(\sigma+1)/(\sigma+3)}}$$

является дифференциальным инвариантом группы G^{a_1,a_2}. Таким образом, замыкающее соотношение Миллионщикова (2), (4) не разрушает группу G^{a_1,a_2}. Последнее означает, что замыкание (2), (4) уравнения Кармана–Ховарта допускает интерпретацию в рамках групповой классификации незамкнутого уравнения (6). Другие инварианты группы G^{a_1,a_2} имеют вид

$$\xi = \frac{r}{t^{2/(\sigma+3)}}, \quad \hat{f} = \frac{\overline{u'^2}f}{t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}}, \quad \hat{h} = \frac{\overline{u'^2}^{3/2}h}{t^{-3(\sigma+1)/(\sigma+3)}}, \quad \text{где } \sigma = \frac{2a_2 - 3a_1}{a_1}. \tag{11}$$

Полученные инварианты позволяют уменьшить число переменных, и, как результат, модель Миллионщикова для уравнения (6) сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{2\kappa_2}{\xi^4}\frac{d}{d\xi}\left[\xi^5\frac{d\hat{f}}{d\xi}\right] + \delta\xi\frac{d\hat{f}}{d\xi} + \gamma\hat{f} = 0, \tag{12}$$

где $\gamma = 2(\sigma+1)/(\sigma+3)$, $\delta = 2/(\sigma+3)$ и σ является параметром. Для определения неизвестного параметра σ привлекается интеграл Лойцянского

$$\Lambda = \overline{u'^2}\int_0^\infty r^4 f(r,t;\varepsilon)\,dr, \quad \Lambda \equiv \text{const}, \tag{13}$$

который с учетом (11) переписывается в виде

$$\Lambda = \overline{u'^2}\int_0^\infty r^4 f(r,t;\varepsilon)\,dr = t^{-2(\sigma+1)/(\sigma+3)}t^{10/(\sigma+3)}\int_0^\infty \xi^4\hat{f}(\xi;\varepsilon)\,d\xi,$$

что позволяет определить $\sigma = 4$, $\gamma = 10/7$, $\delta = 2/7$, следовательно, вычислить закон вырождения однородной изотропной турбулентности [5] (в пределе больших чисел Рейнольдса)

$$B_{LL}(r,t) = \overline{u'^2(t)}\hat{f}(\xi) \equiv \text{const}\, t^n \exp\left(-\frac{r}{7\kappa_2 t^\beta}\right), \tag{14}$$

где $n = -10/7$, $\beta = -2/7$ (которые совпадают с известным соотношением Колмогорова [2]). Таким образом, нахождение законов сохранения изучаемой модели является определяющим для вычисления показателей вырождения однородной изотропной турбулентности на заключительном этапе.

Следующие разделы работы посвящены систематическому изучению модели Миллионщикова. В частности, будет показано, что интеграл Лойцянского действительно играет роль закона сохранения для данной модели замыкания. С математической точки зрения модель Миллионщикова представляет интерес как нелокальное параболическое уравнение, правая часть которого является суммой двух радиальных компонент операторов типа Лапласа–Бельтрами, заданных на пространствах разной размерности.

§ 2. Модель Миллионщикова для уравнения Кармана–Ховарта

Рассматривается модель Миллионщикова для замыкания уравнения Кармана–Ховарта в области $\{r > 0, t > 0\}$

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = \frac{\partial}{r^4 \partial r} r^4 \left(2\kappa_2 r \sqrt{\overline{u'^2}(t)} + 2\nu \right) \frac{\partial}{\partial r} B_{LL}, \quad r = |\vec{r}|, \quad \vec{r} = (r_1, r_2, r_3) \in K^3 \tag{15}$$

с заданным начальным условием

$$B_{LL}(r, 0) = B_{0LL}(r), \qquad r \geq 0. \tag{16}$$

Для уравнение (15) ставятся следующие краевые условия:

$$B_{LL,L} = 2K \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} \equiv 2\kappa_2 r \sqrt{\overline{u'^2}(t)} \frac{\partial B_{LL}}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad B_{LL} = 0, \quad r \to \infty. \tag{17}$$

Чтобы изучить (15)–(17), мы перепишем исходное уравнение (15) в виде

$$\frac{\partial B_{LL}}{\partial t} = 2\kappa_2 \sqrt{\overline{u'^2}(t)} \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{LL} + 5 \frac{\partial}{\partial r} B_{LL} \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{LL} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{LL} \right) \tag{18}$$

и вместо (15)–(17) рассмотрим две следующие частные задачи:

$$\frac{\partial B_{1LL}}{\partial t} = 2\kappa_2 \sqrt{\overline{u'^2}(t)} \left(r \frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{1LL} + 5 \frac{\partial}{\partial r} B_{1LL} \right) \tag{19}$$

и

$$\frac{\partial B_{2LL}}{\partial t} = 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} B_{2LL} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} B_{2LL} \right), \tag{20}$$

удовлетворяющие начально-краевым условиям

$$B_{iLL}(r, t_0) = B_{i0LL}(r), \qquad r \geq 0, \quad i = 1, 2, \tag{21}$$

$$2\kappa_2 r \sqrt{\overline{u'^2}(t)} \frac{\partial B_{iLL}}{\partial r} = 0, \quad r = 0, \quad B_{iLL} = 0, \quad r \to \infty. \tag{22}$$

Разрешимость начально-краевой задачи (15)–(17) будет установлена на основе применения формулы Троттера–Като [11] для пары непрерывных сжимающих полугрупп, порожденных задачами (19)–(22).

Сначала, для начально-краевой задачи (в пределе больших чисел Рейнольдса) (15)–(17) докажем асимптотическую устойчивость автомодельного решения Миллионщикова, используя специальный вид уравнения.

§ 2.1. *Асимптотическая устойчивость автомодельного решения Миллионщикова*

Метод доказательства асимптотической устойчивости основан на стандартных вычислениях. Рассмотрим уравнение (19) и введем новые независимые переменные $q = 2\sqrt{r}$ и $d\tau = \sqrt{\overline{u'^2}(t)} dt$, $\tau(0) = 0$. Тогда уравнение (19) в переменных (q, τ) примет вид

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = 2\kappa_2 \left(\frac{\partial^2}{\partial q^2} u + \frac{9}{q} \frac{\partial}{\partial q} u \right). \tag{23}$$

Непосредственная подстановка автомодельного решения Миллионщикова (14), записанного в переменных (q, τ), показывает, что оно является радиально-симметричным решением уравнения теплопроводности (23) заданного в $R^d \times (0, \infty)$, $d = 10$. Далее, мы используем явную формулу решения нашей задачи, применяя классическое интегральное представление решения. Заметим, что $\hat{f}(\xi)$, записанная в переменных $\hat{r} = r/7\kappa_2$, $\hat{q} = 2\sqrt{\hat{r}}$ и $\hat{\tau} = 2\tau$, является стационарным решением уравнения

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\tau}} = \frac{1}{\hat{\xi}^9} \frac{\partial}{\partial \hat{\xi}} \left(\hat{\xi}^9 \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} \right) + \frac{\hat{\xi}}{2} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{\xi}} + 5\hat{u}. \tag{24}$$

Так что

$$\hat{f}(\hat{\xi}) = \exp\left(-\frac{\hat{\xi}^2}{4} \right), \quad \hat{\xi} = \frac{\hat{q}}{\sqrt{\hat{\tau} + \hat{\tau}_0}}.$$

Заметим далее, что функция

$$\hat{u}_S \ = \ \frac{S}{(\sqrt{4\pi(\hat{\tau} + \hat{\tau}_0)})^d} \exp\left(-\frac{\hat{\xi}^2}{4} \right),$$

где

$$S = \int_{R^d} \exp\left(-\frac{\hat{\xi}^2}{4} \right) d\hat{\xi}_1 \dots d\hat{\xi}_d = (\sqrt{4\pi})^d, \quad \hat{\xi} = \sqrt{\hat{\xi}_1^2 + \dots + \hat{\xi}_d^2}, \quad d = 10$$

совпадает с автомодельным решением Миллионщикова и является фундаментальным решением уравнения теплопроводности. Известно, что существует единственное классическое решение задачи Коши для уравнения теплопроводности, радиально-симметричное (или инвариантное относительно вращения) решение $(U(\hat{q}, \hat{\tau}) = u(q, \tau))$ которого удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial U}{\partial \hat{\tau}} = \frac{\partial^2}{\partial \hat{q}^2} U + \frac{9}{\hat{q}} \frac{\partial}{\partial \hat{q}} U. \tag{25}$$

Отметим, что $(\partial/\partial \hat{q}) U(0, \hat{\tau}) = 0$. Последнее гарантирует выполнение соответствующего краевого условия (22). Известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности допускает явное интегральное представление [12], что позволяет нам записать

$$U(\hat{q}, \hat{\tau}) = \frac{1}{(\sqrt{4\pi(\hat{\tau} + \hat{\tau}_0)})^d} \exp\left(-\frac{\hat{q}^2}{4\hat{\tau}} \right) \int_0^\infty (\hat{q}')^{d-1} U_0(\hat{q}') d\hat{q}' \int_{|\psi|=1} \exp\left(-\frac{\hat{q}'^2 - 2\hat{q}\hat{q}'\psi_1}{4\hat{\tau}} \right) \mu(d\psi),$$

где $|\psi| = \sqrt{\psi_1^2 + \dots + \psi^2}$ и $\mu(d\psi)$ выбрано таким образом, что

$$\int_{|\psi|=1} \mu(d\psi) = 1.$$

Используя вышеприведенную формулу, мы можем легко получить асимптотическую устойчивость решения $\hat{u}_S$ и, таким образом, установить стабилизацию решений к автомодельному решению Миллионщикова, повторяя вычисления для уравнения теплопроводности, которые адаптированы к радиально-симметричным решениям. Действительно, рассмотрим функцию

$$F(\hat{\xi}, \hat{\tau}) = (\hat{\tau} + \hat{\tau}_0)^{d/2} U(\hat{\xi}(\hat{\tau} + \hat{\tau}_0)^{1/2}, \hat{\tau}) \equiv (\hat{\tau} + \hat{\tau}_0)^{d/2} U(\hat{q}, \hat{\tau}).$$

Имеем

$$F(\hat{\xi},\hat{\tau}) = \frac{\sqrt{(\hat{\tau}+\hat{\tau}_0)^d}}{(\sqrt{4\pi(\hat{\tau}+\hat{\tau}_0)})^d}\exp\left(-\frac{\hat{\xi}^2}{4}\right)\times$$
$$\times \int_0^\infty (\hat{q}')^{d-1}U_0(\hat{q}')d\hat{q}'\int_{|\psi|=1}\exp\left(-\frac{\hat{q}'^2-2\sqrt{\hat{\tau}+\hat{\tau}_0}\hat{\xi}\hat{q}'\psi_1}{4\hat{\tau}}\right)\mu(d\psi). \quad (26)$$

Полагая

$$\hat{S}=\int_0^\infty (\hat{q}')^{d-1}U_0(\hat{q}')d\hat{q}'<\infty \quad \text{или} \quad \int_{R^d}U_0(\hat{q}')d\hat{q}'_1\dots d\hat{q}'_d<\infty, \quad \hat{q}'=\sqrt{\hat{q}'_1+\dots+\hat{q}'_d}.$$

Затем, переходя к пределу при $\hat{\tau}\to\infty$, получаем, что интеграл в (26) стремится к функции

$$F_{\hat{S}}(\hat{\xi})=\frac{\hat{S}}{(\sqrt{4\pi})^d}\exp\Bigl(-\frac{\hat{\xi}^2}{4}\Bigr)$$

для $\hat{\xi}\in R$. Последнее означает, что $F_{\hat{S}}(\hat{\xi})=\hat{f}(\hat{\xi})$, когда $\hat{S}=S$. Данное равенство определяет класс начальных данных $\{U_0(\hat{q})\}$ для уравнения (25), которые гарантируют асимптотическую устойчивость автомодельного решения Миллионщикова. Поведение при больших временах решения $B_{LL}(r,t)$ рассматриваемой начально-краевой задачи позволяет установить, принимая во внимание, что $d\hat{\tau}=2\sqrt{\overline{u'^2}(t)}dt$, закон вырождения интенсивности турбулентности $\overline{u'^2}(t)\equiv B_{LL}(0,t)$ в пределе больших чисел Рейнольдса, который выглядит, как следующее соотношение:

$$\overline{u'^2}(t)\simeq(t+a)^{-5/14}, \qquad t\to\infty.$$

§ 2.2. *Формула Троттера–Като для представления решения начально-краевой задачи*

Выше мы показали, что автомодельное решение Миллионщикова реализуется, как радиально-симметричное решение уравнения теплопроводности. Дальнейшее изложение будет ограничено рассмотрением только такого класса решений.

Рассмотрим оператор (правая часть уравнения (15))

$$H=2\kappa_2\sqrt{\overline{u'^2}(t)}\left(r\frac{\partial^2}{\partial r^2}+5\frac{\partial}{\partial r}\right)+2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right). \quad (27)$$

Представим H в виде

$$H=2\kappa_2\sqrt{\overline{u'^2}(t)}\left(\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{9}{q}\frac{\partial}{\partial q}\right)+2\nu\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{4}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right).$$

Таким образом, оператор H может быть записан в виде суммы двух радиальных компонент операторов типа Лапласа–Бельтрами, заданных на $Z_1\times Z_2$, где $Z_1=R_q\times S^{10}$ и $Z_2=R_r\times S^5$, снабженных соответствующими метриками dz_1^2 и dz_2^2. Полученное представление оператора H дает основание применить технику теории линейных полугрупп. Чтобы построить так называемый разрешающий оператор, мы используем формулу Троттера–Като [11] для пары непрерывных сжимающих полугрупп. Основой для применения данного подхода является теория линейных полугрупп для уравнения теплопроводности.

Известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности может быть представлено в виде

$$u(x_1,\dots,x_n,\theta)=\frac{1}{(4\pi\theta)^{n/2}}\int_{R^n}\exp\Big(-\frac{|x-x'|^2}{4\theta}\Big)u_0(x_1',\dots,x_n')\,dx_1'\dots dx_n'. \tag{28}$$

Так как лапласиан коммутирует с оператором вращением, то, рассматривая радиально-симметричное решение $u(x_1,\dots,x_n,\theta)=U(|x|,\theta)$ и принимая во внимание вычисления [12], мы переписываем (28) в новых переменных $(|x|,\theta)$ и, как результат, получаем

$$U(|x|,\theta)=\frac{|x|^{1-n/2}}{4\theta}\int_0^\infty|x'|^{n/2}\exp\left(-\frac{|x|^2+|x'|^2}{4\theta}\right)I_{n/2-1}\left(\frac{|x||x'|}{2\theta}\right)U_0(|x'|)d|x'|, \tag{29}$$

где I_m — модифицированная функция Бесселя.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial\theta}=r\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\alpha\frac{\partial v}{\partial r},\quad \alpha>1. \tag{30}$$

Учитывая, что оператор

$$D_\alpha=r\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\alpha\frac{\partial}{\partial r} \tag{31}$$

с помощью замены переменной $q=2\sqrt{r}$ преобразуется в радиальную компоненту оператора Лапласа в R^n

$$B_k=\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac{k}{q}\frac{\partial}{\partial q},\quad q=|x|,\quad k=n-1,$$

который называется оператором Бесселя ($\alpha=(k+1)/2$), получаем (см. (29))

$$v(r,\theta)=\int_0^\infty\frac{1}{\theta}\left(r^{(1-\alpha)/4}r'^{(1+\alpha)/4}\right)\exp\left(-\frac{r+r'}{\theta}\right)I_{(\alpha-1)/2}\left(2\frac{r^{1/2}r'^{1/2}}{\theta}\right)v_0(r')dr'. \tag{32}$$

Здесь функция Грина

$$G(r,r',\theta)=\frac{1}{\theta}\left(r^{(1-\alpha)/4}r'^{(1+\alpha)/4}\right)\exp\left(-\frac{r+r'}{\theta}\right)I_{(\alpha-1)/2}\left(2\frac{r^{1/2}r'^{1/2}}{\theta}\right)$$

удовлетворяет равенству

$$\int_0^\infty G(r,r',\theta)dr'=1.$$

Таким образом, формула (32) дает явное представление полугруппы $e^{-\theta D_\alpha}$ с генератором $-D_\alpha$. Более того, $-D_\alpha$ порождает непрерывную сжимающую полугруппу в пространстве

$$H_0^\mu=\{f\in C_0\,:\,f\in h^\mu([0,\infty))\},\quad 0<\mu<1,$$

где C_0 — пространство ограниченных, равномерно непрерывных функций, заданных на $[0,\infty)$ таких, что $f(r)\to 0$ при $r\to\infty$. Здесь h^μ обозначает пространство Гельдера с показателем $\mu < 1$. Сильная непрерывность $e^{-\theta D_\alpha}$ при $\theta = 0$ следует из следующей формулы (учитывая инвариантность уравнения относительно сдвигов по времени):

$$v(r,\theta) = \int_0^\infty G(r,r',\theta)(v_0(r') - v_0(r))dr' + v_0(r)$$

и

$$\lim_{\theta\to 0} \int_0^\infty G(r,r',\theta)(v_0(r') - v_0(r))dr' = 0.$$

Заметим, что сходимость $v(r,\theta) \to 0$ при $r \to \infty$ является следствием быстрого убывания функции Грина $G(r,r',\theta)$ для $r \to \infty$. Фактически $v(q,\theta)$ есть классическое решение уравнения (30) в области $\{r > 0, \theta > 0\}$ благодаря известному результату о регулярности слабых решений параболических уравнений [13] (или для вырождающихся параболических уравнений вида (30); см. [14]). Краевое условие $2\kappa_2 r v_r(r,\theta) = 0$ при $r = 0$ для $\theta > 0$ (которое совпадает с (22)) выполняется ввиду равенств $\sqrt{r} v_r(r,\theta) = U_q(q,\theta)$ и $U_q(0,\theta) = 0$. Также отметим, что в общем случае, когда α является комплексным числом, оператор $-D_\alpha$ порождает голоморфную полугруппу в пространстве E_s для $\operatorname{Re}\alpha + s > 0$ (более подробно см., например, [15]). Здесь

$$\begin{aligned}&E_s = \{f \in D'(0,\infty)\ :\ f^{(s)} - \text{ограниченная и равномерно непрерывная на } [0,\infty),\\ &\text{и } f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \text{для } 1 \le 2k+1 \le s\}.\end{aligned}$$

Кроме того, известно, что оператор $-B_k$ также порождает непрерывную сжимающую полугруппу $e^{-\hat\theta B_k}$ в пространстве Гельдера H_0^λ, $0 < \lambda < 1$. Следовательно, используя полученные полугруппы, решения задач (19)–(22) определяются формулами

$$B_{1LL}(r,t) \equiv \tilde v(r,\tilde\theta) = e^{-\tilde\theta(t) D_\alpha} B_{10LL}(r), \quad B_{2LL}(r,t) \equiv \hat v(r,\hat\theta) = e^{-\hat\theta(t) B_k} B_{20LL}(r),$$

где $\tilde\theta$ и $\hat\theta$ находятся из соотношений

$$d\tilde\theta = 2\kappa_2 \sqrt{B_{1LL}(0,t)}dt, \quad d\hat\theta = 2\nu dt, \quad \tilde\theta(0) = 0, \quad \hat\theta(0) = 0.$$

Далее мы рассматриваем только положительные решения $B_{iLL}(r,t)$. Легко видеть, что семейство операторов $e^{-\tilde\theta(t) D_\alpha}$ и $e^{-\hat\theta(t) B_k}$, параметризованных переменной t, также остаются непрерывными сжимающими полугруппами относительно t. Этот факт является тривиальным для $e^{-\hat\theta(t) B_k}$ благодаря формуле $\hat\theta = 2\nu t$ и свойствам $e^{-\hat\theta B_k}$. Стоит отметить, что основное равенство теории полугрупп для $e^{-\hat\theta B_k}$ (см., например, [11])

$$\frac{d}{d\hat\theta} e^{-\hat\theta B_k} \hat v(r,0) = B_k e^{-\hat\theta B_k} \hat v(r,0)$$

преобразуется в

$$\frac{d}{dt} e^{-\hat\theta(t) B_k} \hat v(r,0) = 2\nu B_k e^{-\hat\theta(t) B_k} \hat v(r,0),$$

которое формально совпадает с уравнением (20). Что касается операторов $e^{-\tilde\theta(t) D_\alpha}$, докажем сначала, что это семейство является полугруппой. Заметим, что согласно формуле

$$dt = \frac{d\tilde\theta}{2\kappa_2 \sqrt{\tilde v(0,\tilde\theta)}}, \quad t = \int_0^{\tilde\theta} \frac{ds}{2\kappa_2 \sqrt{\tilde v(0,s)}},$$

мы можем восстановить переменную t для положительной функции $\tilde{v}(0,\tilde{\theta})$. Тогда данная замена переменной дает следующие равенства:

$$B_{1LL}(r,t_1+t_2)=B_{1LL}\left(r,\int_0^{\tilde{\theta}_1}\frac{ds}{2\kappa_2\sqrt{\tilde{v}(0,s)}}+\int_0^{\tilde{\theta}_2}\frac{ds}{2\kappa_2\sqrt{\tilde{v}(0,s)}}\right)=$$
$$=B_{1LL}\left(r,\int_0^{\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_2}\frac{ds}{2\kappa_2\sqrt{\tilde{v}(0,s)}}\right)\equiv\tilde{v}(r,\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_2)=e^{-(\tilde{\theta}_1+\tilde{\theta}_2)D_\alpha}B_{10LL}(r)=$$
$$=e^{-\tilde{\theta}_1 D_\alpha}\cdot e^{-\tilde{\theta}_2 D_\alpha}B_{10LL}(r)=e^{-\tilde{\theta}(t_1)D_\alpha}\cdot e^{-\tilde{\theta}(t_2)D_\alpha}B_{10LL}(r).$$

Следовательно,

$$e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}=e^{-\tilde{\theta}(t_1)D_\alpha}\cdot e^{-\tilde{\theta}(t_2)D_\alpha}.$$

Положительность $\tilde{v}(0,\tilde{\theta})$ следует из неравенства $e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}>0$. Сильная непрерывность $e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}$ при $t=0$ является следствием того же свойства $e^{-\tilde{\theta}D_\alpha}$ и непрерывной зависимости соответствующего интеграла от верхнего предела интегрирования. Таким образом,

$$\frac{d}{dt}e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}\tilde{v}(r,0)=2\kappa_2\sqrt{\tilde{v}(0,t)}D_\alpha e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}\tilde{v}(r,0)$$

(ср. с уравнением (19) с $\alpha=5$). Семейство операторов $e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}$ снова является непрерывной полугруппой сжатий. Тогда формула

$$S(t;\nu)=\lim_{n\to\infty}\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n, \tag{33}$$

известная как формула Троттера–Като [11], определяет непрерывную сжимающую полугруппу $S(t;\nu)$ в H_0^s, $0<s<1$ и

$$\frac{d}{dt}S(t;\nu)B_{LL}(r,0)=2\kappa_2\sqrt{[S(t;\nu)B_{LL}(r,0)]|_{r=0}}D_\alpha S(t;\nu)B_{LL}(r,0)+2\nu B_k S(t;\nu)B_{LL}(r,0).$$

Формально эта формула следует из (см. подробности в [11])

$$\frac{d}{dt}S(t;\nu)B_{LL}(r,0)\Big|_{t=0}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dt}\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\dots e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)B_{LL}(r,0)\Big|_{t=0}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\Big[2\kappa_2\sqrt{B_{LL}(0,0)}D_\alpha B_{LL}(r,0)+2\nu B_k B_{LL}(r,0)\Big]+\dots+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{n}\Big[2\kappa_2\sqrt{B_{LL}(0,0)}D_\alpha B_{LL}(r,0)+2\nu B_k B_{LL}(r,0)\Big]\right)=$$
$$=2\kappa_2\sqrt{B_{LL}(0,0)}D_\alpha B_{LL}(r,0)+2\nu B_k B_{LL}(r,0).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{dt}S(t;\nu)B_{LL}(r,0)=\frac{d}{ds}S(s+t;\nu)B_{LL}(r,0)\Big|_{s=0}=\frac{d}{ds}S(s;\nu)B_{LL}(r,t)\Big|_{s=0}.$$

Здесь n означает число итераций, например:

$$\left(e^{-\tilde{\theta}(t/2)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/2)B_k}\right)^2=e^{-\tilde{\theta}(t/2)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/2)B_k}\cdot e^{-\tilde{\theta}(t/2)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/2)B_k}.$$

Полученная функция $B_{LL}(r,t) = S(t;\nu)B_{LL}(r,0)$ является так называемым полугрупповым решением задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}B_{LL} = \frac{\partial}{r^4\partial r}r^4\left(2\kappa_2 r\sqrt{B_{LL}(0,t)} + 2\nu\right)\frac{\partial}{\partial r}B_{LL}, \tag{34}$$

$$B_{LL}(0,r) = B_{0LL}(r). \tag{35}$$

В формуле (33) операторы $e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}$ и $e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}$ в правой части (33) допускают перестановку, что следует из неравенства [16]

$$\|e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}(\tilde{v}) - e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}(\tilde{v})\| \le \frac{T\mu(t)t}{n}, \tag{36}$$

где T — некоторая положительная константа, $\mu(t) \to 0$ для $t \to 0$, $\|\cdot\|$ обозначает норму H_0^s. Доказательство неравенства (36) следует из леммы 2 (см. приложение Б [16]). Действительно, пусть $\varphi_t(v) = e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} - e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}(\tilde{v})$. Тогда φ_t является дифференцированной функцией по переменной t с ограниченной локально по $\tilde{v}$ первой производной. Легко проверяется, что $\varphi_0 = 0$ и $d\varphi_t/dt|_{t=0} = 0$, затем, используя формулу Тейлора с остаточным членом $o(t) = \mu(t)t$, где $\lim_{t\to 0}\mu(t) = 0$, как результат, получаем (36).

Отметим следующую особенность формулы (33): для больших значений n она сходится как $O(1/n)$ и не зависит от ν. Кроме того, $\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n$ сходится в H_0^s локально-равномерно по переменной t. Справедливость этого утверждение следует из оценки

$$\left\|\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n - \left(e^{-\tilde{\theta}(t/m)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/m)B_k}\right)^m\right\| \le \frac{2TK(\mu(t)t)}{\min(n,m)}, \tag{37}$$

которая получается из следующего представления:

$$\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n =$$

$$= \overbrace{\left[\underbrace{e^{-\tilde{\theta}(t/nl)D_\alpha}\cdot\ldots\cdot e^{-\tilde{\theta}(t/nl)D_\alpha}}_{l\ \text{членов}}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/nl)B_k}\cdot\ldots\cdot e^{-\hat{\theta}(t/nl)B_k}\right]\cdot\ldots}^{n\ \text{пар}},$$

когда $m = nl$, и представления

$$e^{-\tilde{\theta}(t/nl)D_\alpha}\cdot\ldots\cdot e^{-\tilde{\theta}(t/nl)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/nl)B_k}\cdot\ldots\cdot e^{-\hat{\theta}(t/nl)B_k}$$

в виде

$$\left(e^{-\tilde{\theta}(t/nl)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/nl)B_k}\right)^{nl},$$

используя перестановку соответствующих членов. Принимая во внимание (36), получаем неравенство (37). Для произвольных целых m, применяя неравенство треугольника, имеем

$$\left\|\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n - \left(e^{-\tilde{\theta}(t/m)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/m)B_k}\right)^m\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n - \left(e^{-\tilde{\theta}(t/mn)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/mn)B_k}\right)^{mn}\right\| \le$$

$$\le \left\|\left(e^{-\tilde{\theta}(t/mn)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/mn)B_k}\right)^{mn} - \left(e^{-\tilde{\theta}(t/m)D_\alpha}\cdot e^{-\hat{\theta}(t/m)B_k}\right)^m\right\|,$$

что сводит рассмотрение к предыдущему случаю (см. подробности в [16]). Появление множителя K в правой части неравенства (37) есть следствие оценки

$$\left\| e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} v - v \right\| \le K \frac{t}{n},$$

ввиду дифференцируемости по t операторной функции $e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} \tilde{v}$ (см. [16]). По индукции приходим к

$$\left\| \left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} \right)^k \tilde{v} - \tilde{v} \right\| \le k \frac{K}{n}.$$

При этом использовалось свойство сжимаемости полугрупп $e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha}$ и $e^{-\hat{\theta}(t)B_k}$.

Оценка (37) гарантирует равномерную относительно ν сходимость к $S(t;\nu)$, и разность

$$\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} \right)^n - \left(e^{-\tilde{\theta}(t)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t)B_k} \right)$$

между двумя итерациями, оцененная в норме $\|\cdot\|$, есть величина $O(1/n)$. Таким образом, решение $B_{LL}(r,t) = S(t;\nu)B_{LL}(r,0)$ задачи (34), (35) сходится при $\nu \to 0$ к решению $B_{1LL}(r,t)$ соответствующей начально-краевой задачи для уравнения (19) .

Рассмотрим формулу (33). Функция

$$B^n_{LL}(r,t) = \left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} \right)^n B_{LL}(r,0)$$

представляет аппроксимацию решения порядка $O(1/n)$ замкнутого уравнения Кармана–Ховарта при больших значений n. Последнее может быть использовано при численном моделировании однородной изотропной турбулентности. Временной масштаб турбулентности делим на n частей и применяем следующую итерационную процедуру по n: сначала решаем задачу (19), (21), (22) для $n = 1$, затем (20)–(22) для $n = 2$ и так далее, используя явное представление полугрупп.

§ 2.3. *Сохранение интеграла Лойцянского*

Выше было показано, что интеграл Лойцянского играет важную роль в изучении динамики однородной изотропной турбулентности. В частности, этот интеграл использовался для численного определения параметра σ, возникающего при вычислении двухпараметрической группы растяжений G^{a_1,a_2}, допускаемой «невязкой» формой уравнения Кармана–Ховарта. В данном разделе мы докажем, что для построенной полугруппы $S(t;\nu)$ интеграл Лойцянского является действительно инвариантом. Сначала это свойство будет установлено для полугрупп $e^{-\tilde{\theta}D_\alpha}$ и $e^{-\hat{\theta}B_k}$, что показывается с использованием стандартной техники.

Рассмотрим полугруппу $e^{-\hat{\theta}B_k}$ и

$$\hat{v}(r,\hat{\theta}) = e^{-\hat{\theta}B_k}\hat{v}(r,0) \equiv \int_0^\infty \xi^4 G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})\hat{v}(\xi,0)\, d\xi \qquad \text{для } k = 4,$$

где

$$G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta}) = \frac{|r\xi|^{-3/2}}{4\hat{\theta}} \exp\left(-\frac{r^2+\xi^2}{4\hat{\theta}}\right) I_{3/2}\left(\frac{|r\xi|}{2\hat{\theta}}\right).$$

Пусть $r^4\hat{v}(r,\cdot) \in L_1(R^+)$. Умножим на r^4 и проинтегрируем по r

$$\int_0^\infty r^4 \hat{v}(r,\hat{\theta})dr = \int_0^\infty r^4 \Big(\int_0^\infty \xi^4 G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})\hat{v}(\xi,0)\,d\xi\Big)\,dr.$$

Из теоремы о повторных интегралах следует

$$\int_0^\infty \int_0^\infty r^4 \xi^4 G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})\hat{v}(\xi,0)\,d\xi\,dr = \int_0^\infty \xi^4 v(\xi,0)\Big(\int_0^\infty r^4 G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})\,dr\Big)\,d\xi. \tag{38}$$

Используя симметрию $G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})$ относительно переменных r, ξ и равенство

$$\int_0^\infty \xi^4 G^{(1)}(r,\xi,\hat{\theta})\,d\xi = 1,$$

получаем, что внутренний интеграл в (38) равен 1. Следовательно,

$$\int_0^\infty r^4 \hat{v}(r,\hat{\theta})\,dr = \int_0^\infty \xi^4 \hat{v}(\xi,0)\,d\xi \equiv \int_0^\infty r^4 \hat{v}(r,0)\,dr. \tag{39}$$

Таким образом, полугруппа $e^{-\hat{\theta}B_k}$ сохраняет интеграл Лойцянского.

Чтобы доказать это свойство для полугруппы $e^{-\tilde{\theta}D_\alpha}$, воспользуемся тем, что оператор D_α сводится к B_k заменой переменной $q = 2\sqrt{r}$. Тогда справедливы равенства

$$\tilde{v}(r,\tilde{\theta}) \equiv \tilde{u}(q,\tilde{\theta}) = e^{-\tilde{\theta}B_k}\tilde{u}(q,0) \equiv \int_0^\infty \tilde{\xi}^9 G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\tilde{\theta})\tilde{u}(\tilde{\xi},0)d\tilde{\xi} \quad \text{для } k = 9,$$

где

$$G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\tilde{\theta}) = \frac{|q\tilde{\xi}|^{-4}}{4\tilde{\theta}} \exp\Big(-\frac{q^2+\tilde{\xi}^2}{4\tilde{\theta}}\Big) I_4\Big(\frac{|q\tilde{\xi}|}{2\tilde{\theta}}\Big).$$

Применяя рассуждения, что и выше, получаем

$$\int_0^\infty q^9 \tilde{u}(q,\tilde{\theta})\,dq = \int_0^\infty \tilde{\xi}^9 \tilde{u}(\tilde{\xi},0)\,d\tilde{\xi}$$

или

$$\int_0^\infty r^4 \tilde{v}(r,\tilde{\theta})\,dr = \int_0^\infty \xi^4 \tilde{v}(\xi,0)\,d\xi \equiv \int_0^\infty r^4 \tilde{v}(r,0)\,dr. \tag{40}$$

Полученные инварианты (39), (40) полугрупп $e^{-\tilde{\theta}D_\alpha}$ и $e^{-\hat{\theta}B_k}$, которые имеют одинаковую функциональную форму, будут использованы при доказательстве сохранения интеграла Лойцянского относительно действия полугруппы $S(t;\nu)$.

Сначала докажем это свойство для n-й аппроксимации полугруппы $S(t;\nu)$:

$$S^n(t,\nu) = \Big(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\Big)^n,$$

где

$$\Big(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\Big)^n = \overbrace{\underbrace{e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}}_{2\text{ члена}} \cdot \ \ldots \ \cdot e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}}^{n\text{ пар}}.$$

Из этой формулы следует, что для доказательства достаточно установить инвариантность интеграла Лойцянского для композиции полугрупп $e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha}$ и $e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}$.

Рассмотрим

$$B^n_{LL}(r,\cdot) = e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} B^{n-1}_{LL}(r,\cdot)$$

и умножим обе части равенства на r^4. Интегрируя по переменной r при всех значениях $t > 0$, получаем

$$\int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr = \frac{1}{2^9}\int_0^\infty q^9 \tilde{u}(q,\cdot)\,dq = \frac{1}{2^9}\int_0^\infty q^9 \Big(\int_0^\infty \tilde{\xi}^9 G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\cdot)\tilde{u}(\tilde{\xi},\cdot)d\tilde{\xi}\Big)\,dq,$$

где $\tilde{u}(q,\cdot) = B^n_{LL}(r,\cdot)$ для $q = 2r^{1/2}$. Имеем следующее равенство:

$$\frac{1}{2^9}\int_0^\infty q^9 \left(\int_0^\infty \tilde{\xi}^9 G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\cdot)\tilde{u}(\tilde{\xi},\cdot)d\tilde{\xi}\right)dq = \frac{1}{2^9}\int_0^\infty \tilde{\xi}^9 \tilde{u}(\tilde{\xi},\cdot)\left(\int_0^\infty q^9 G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\cdot)dq\right)d\tilde{\xi}.$$

Так как

$$\int_0^\infty \xi^9 G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\cdot)d\tilde{\xi} = 1$$

и $G^{(2)}(q,\tilde{\xi},\cdot)$ есть симметричная функция по переменным q и $\tilde{\xi}$, снова получаем, что внутренний интеграл равен 1. Следовательно,

$$\int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)dr = \frac{1}{2^9}\int_0^\infty \tilde{\xi}^9 \tilde{u}(\tilde{\xi},\cdot)d\tilde{\xi} = \int_0^\infty \xi^4 \tilde{v}(\xi,\cdot)d\xi,$$

где $\tilde{v}(\xi,\cdot) = \tilde{u}(\tilde{\xi},\cdot)$ для $\tilde{\xi} = 2\xi^{1/2}$. Последнее соотношение означает, что

$$\int_0^\infty \xi^4 \tilde{v}(\xi,\cdot)d\xi = \int_0^\infty r^4 \tilde{v}(r,\cdot)dr = \int_0^\infty r^4 \left(\int_0^\infty \xi^4 G^{(1)}(r,\xi,\cdot) B^{n-1}_{LL}(\xi,\cdot)d\xi\right)dr.$$

Таким образом,

$$\int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)dr = \int_0^\infty r^4 B^{n-1}_{LL}(r,\cdot)dr.$$

Для завершения доказательства достаточно повторить данную процедуру n раз. Как результат, получаем равенство

$$\int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,t)dr = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,0)dr. \qquad (41)$$

Из (41) заключаем, что $r^4 B^n_{LL}(r,\cdot) \in L_1(R^+)$, если $r^4 B_{LL}(r,0)$ — интегрируемая функция, следовательно, $S^n(t,\nu)$ сохраняет интеграл Лойцянского.

Далее заметим, что $\{B^n_{LL}(r,t)\}$ — последовательность положительных гладких функций, которая сходится к некоторой, вообще говоря, неотрицательной непрерывной функции

$$B_{LL}(r,t) = S(t,\nu)B_{LL}(r,0) = \lim_{n\to\infty}\left(e^{-\tilde{\theta}(t/n)D_\alpha} \cdot e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k}\right)^n B_{LL}(r,0)$$

в норме пространства H^s_0. Положительность $B^n_{LL}(r,t)$ следует из неравенств $e^{-\tilde{\theta}D_\alpha} > 0$ и $e^{-\hat{\theta}(t/n)B_k} > 0$. Сходимость в H^s_0 подразумевает равномерную сходимость последовательности $\{B^n_{LL}(r,\cdot)\}$ на каждом компактном подмножестве R^+, следовательно, и поточечную сходимость $\{B^n_{LL}(r,\cdot)\}$ в R^+. Отсюда заключаем, что $\{r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\}$ является поточечно сходящейся последовательностью интегрируемых функций. Используя лемму Фату, получаем

$$\int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)dr \le \lim_{n\to\infty}\inf \int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)dr \equiv \Lambda$$

или $r^4 B_{LL}(r,\cdot) \in L_1(R^+) \cap C_0(R^+)$. Теперь заметим, что $r^4 B^n_{LL}(r,\cdot) \le A/x^{1+\beta}$ и $r^4 B_{LL}(r,\cdot) \le A/x^{1+\beta}$ для $r > B$, $\beta > 0$ (для некоторых положительных A и B) ввиду интегрируемости функций $r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)$ и $r^4 B_{LL}(r,\cdot)$. Мы можем написать следующие неравенства:

$$\left|\int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr - \int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| \le$$
$$\le \left|\int_0^{b_m} r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr - \int_0^{b_m} r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)dr\right| +$$
$$+ \left|\int_{b_m}^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| + \left|\int_{b_m}^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr\right|.$$

Выбирая достаточно большие $b_m > B$, имеем

$$\left|\int_{b_m}^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| + \left|\int_{b_m}^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| < \frac{\delta}{2}$$

для произвольно малого $\delta > 0$. Заметим, что $r^4 B^n_{LL}(r,\cdot) \to r^4 B_{LL}(r,\cdot)$ при $n \to \infty$ равномерно на каждом компактном подмножестве из R. Следовательно,

$$\left|\int_0^{b_m} r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr - \int_0^{b_m} r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| \le \frac{\delta}{2}$$

для достаточно больших n. Таким образом, получаем

$$\left|\int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr - \int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr\right| \le \delta$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty r^4 B^n_{LL}(r,\cdot)\,dr = \int_0^\infty r^4 B_{LL}(r,\cdot)\,dr.$$

Полученное равенство показывает, что построенная полугруппа $S(t,\nu)$ сохраняет интеграл Лойцянского.

Заключение

Доказано существование решения начально-краевой задачи для модели Миллионщикова при замыкании уравнения Кармана–Ховарта. Метод доказательства основан на расщеплении оператора H, что позволяет численно решить данную задачу с заданной точностью. Исследована сходимость решения при стремлении вязкости ν к нулю или изучен предельный переход по числу Рейнольдса для рассматриваемой модели. Установлена асимптотическая устойчивость автомодельного решения Миллионщикова при $t \to \infty$. Кроме того, показано, что интеграл Лойцянского играет роль закона сохранения для модели Миллионщикова динамики однородной изотропной турбулентности. Детальные численные эксперименты [3] демонстрируют сохранение инварианта Лойцянского в более общей постановке.

Авторы благодарны Г. Г. Черных за полезные дискуссии.

Список литературы

1. *Костомаха В. А.* Экспериментальное моделирование изотропной турбулентности // Динамика сплошной среды. 1985. Т. 70. С. 92–104.

2. *Хинце И. О.* Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963.

3. *Chernykh G. G., Korobitsina Z. L., Kostomakha V. A.* Numerical Simulation of Isotropic Dynamics // IJCFD. 1998. Vol. 10. P. 173–182.

4. *Лойцянский Л. Г.* Некоторые основные закономерности изотропного потока // Труды ЦАГИ. 1939. Т. 440.

5. *Миллионщиков М. Д.* Изотропная турбулентность в поле турбулентной вязкости // Письма в ЖЭТФ. 1969. Т. 10. С. 406–411.

6. *Миллионщиков М. Д.* О структуре коэффициента турбулентной вязкости для изотропной турбулентности // Письма в ЖЭТФ. 1970. Т. 11. С. 203–206.

7. *Лыткин Ю. М., Черных Г. Г.* Об одном способе замыкания уравнения Кармана–Ховарта // Динамика сплошной среды. 1976. Т. 27. С. 124–130.

8. *Oberlack M., Peters N.* Closure of the Two-Point Correlation Equation as a Basis for Reynolds Stress Models // Appl. Sci. Res. 1993. Vol. 55. P. 533–538.

9. *Oberlack M.* On the Decay Exponent of Isotropic Turbulence // PAMM. 2000. Vol. 1. P. 101–104.

10. *Grebenev V. N., Oberlack M.* A Geometric Interpretation of the Second-Order Structure Function Arising in Turbulence // Math. Phys. Anal. Geom. 2009. Vol. 12. No. 1. P. 1–18.

11. *Marsden J.* Applications of Global Analysis in Mathematical Physisc. Berkely: Publish or Perish Inc, 1974.

12. *Arena O.* On a Singular Parabolic Equations Related to Axially Symmetric Heat Potentials // Analli. Mat. Pura. Appl. Ser IV. 1975. Vol. 105. P. 347–393.

13. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. М.: Наука, 1968.

14. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с переменным направлением времени. Новосибирск, 1985.

15. *Рид М., Сайман Б.* Методы современной математической физики 2. Гармонический анализ. Самосопряженность. М.: Мир, 1978.

16. *Ebin D. G., Marsden J.* Groups of Diffeoemorphism and the Motion of an Incompressible Fluid // Ann. Math. 1970. Vol. 92. No. 1. P. 102–163.

Материал поступил в редколлегию 05.06.2009

Адреса авторов

ГРЕБЕНЁВ Владимир Николаевич
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Лаврентьева, 6, Институт
вычислительных технологий СО РАН
e-mail: vngrebenev@gmail.com

ФИЛИМОНОВ Михаил Юрьевич
РОССИЯ, 620219, Екатеринбург
ул. С. Ковалевской, 16, Институт
математики и механики Уро РАН
e-mail: fmy@imm.uran.ru