УДК 514.135

А. А. Колпаков

ФОРМУЛЫ СФЕРИЧЕСКИХ ОБЪЕМОВ КОНИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ С СИНГУЛЯРНЫМ МНОЖЕСТВОМ ТОРИЧЕСКИЙ УЗЕЛ*

Исследовано бесконечное семейство конических многообразий, наделенных сферической метрикой с сингулярным множеством торический (p, q) узел, в случае если натуральные числа p и q взаимно просты или торическое (p, q) зацепление с количеством компонент $\gcd(p, q)$. Найдены области сферичности указанных конических многообразий в терминах конических углов и получены аналитические формулы для их объемов.

Ключевые слова: сферическая геометрия, конические многообразия, торические узлы и зацепления.

Введение

Трехмерным коническим многообразием $\mathcal{C}$ называется метрическое пространство, полученное из набора непересекающихся 3-симплексов в пространстве постоянной секционной кривизны k, путем изометрического отождествления их граней. При этом предполагается, что образованное в результате такого отождествления топологическое пространство (пространство-носитель) является многообразием.

Такое многообразие обладает римановой метрикой постоянной секционной кривизны k на объединении клеток размерностей 2 и 3. В случае $k = +1$ мы будем говорить, что соответствующее коническое многообразие имеет (или допускает) сферическую структуру. Аналогично определяются конические многообразия с евклидовой ($k = 0$) и гиперболической структурой ($k = -1$).

Метрическая структура вокруг каждой 1-клетки определяется коническим углом, который является суммой двугранных углов при ребрах, дающих после отождествления эту клетку. Сингулярным множеством Σ конического многообразия $\mathcal{C}$ назовем замыкание всех 1-клеток, конический угол вокруг которых не равен 2π. Ниже мы будем предполагать, что каждая компонента связности сингулярного множества является одномерным подмногообразием (вложенной окружностью) с постоянным коническим углом.

Отметим, что частным случаем конических многообразий являются орбифолды, конические углы которых имеют вид $2\pi/m$, где m — некоторое целое число (подробнее см. [12]).

В данной работе рассматривается бесконечное семейство конических многообразий с носителем трехмерная сфера. Оно состоит из многообразий с сингулярностями вдоль торических (p, q) узлов, где $p, q > 1$, при условии $\gcd(p, q) = 1$ или зацеплений в случае

*Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации (грант НШ–5682.2008.1) и РФФИ (грант 06–01–00153).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 4. С. 38–44

$\gcd(p,q) \geq 2$. Простейшими представителями этих семейств, имеющими неабелеву фундаментальную группу, являются узел «трилистник» $3_1 \equiv (3,2)$ и зацепление $4_1^2 \equiv (4,2)$ из таблицы Рольфсена [9].

По теореме Терстона [11] многообразие $\mathbb{S}^3 \backslash 3_1$ не допускает гиперболической структуры, однако допускает две другие [7]: $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ и $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$. Ранее Зейферт и Вебер [10] показали, что сферическое пространство додекаэдра (гомологическая сфера Пуанкаре) является циклическим 5-листным накрытием $\mathbb{S}^3$, разветвленным над узлом 3_1. Следовательно, орбифолд $3_1(\frac{2\pi}{5})$ обладает сферической структурой. По классификации Данбара [4], орбифолд $3_1(\frac{2\pi}{n})$ является сферическим при $n \leq 5$, Nil-орбифолдом при $n = 6$ и $\widetilde{\mathrm{PSL}}(2,\mathbb{R})$-орбифолдом — при $n \geq 7$. Сферическая структура на коническом многообразии $3_1(\alpha)$ с носителем трехмерная сфера подробно исследована в [3].

Отметим, что вопрос существования сферической структуры на двумостовых узлах был исследован ранее в [5; 6; 8]. Основная цель настоящей работы—установить области существования сферической структуры на произвольных торических узлах и зацеплениях.

§ 1. Конические многообразия и накрытия

При последующем изложении нам понадобятся определение циклического разветвленного накрытия, а также некоторые теоремы, связывающие накрытия и геометрические характеристики конических многообразий. Подробное изложение приведенных ниже фактов содержится в [2; 12].

Пусть X — топологическое пространство. *Накрывающим пространством* для X называется пара, состоящая из пространства $\widetilde{X}$ и непрерывного отображения $p : \widetilde{X} \mapsto X$, удовлетворяющего следующему условию: для каждой точки $x \in X$ найдется такая линейно связная открытая окрестность U, что каждая компонента связности множества $p^{-1}(U)$ при отображении p отображается гомеоморфно на U. Отображение p называют *отображением накрытия* или *накрытием.*

Разветвленное накрытие трехмерных многообразий определяется как такое непрерывное отображение $p : M^3 \mapsto N^3$, что в N^3 существует одномерный подкомплекс L^1, прообраз которого $p^{-1}(L^1)$ является одномерным подкомплексом в M^3, причем ограничение p на $M^3 \backslash p^{-1}(L^1)$ является накрытием. Многообразие M^3 называют *накрывающим многообразием*, N^3 — *базой накрытия*, а L^1 – *множеством ветвления.*

Для того чтобы определить *разветвленное циклическое накрытие* $p : \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^3$, представим трехмерную сферу как $\mathbb{R}^3 \cup \infty$. Выделим в $\mathbb{R}^3$ прямую L и отождествим точки $\mathbb{R}^3$, которые получаются друг из друга поворотом на угол $2\pi/n$ вокруг оси L. В результате получим отображение $p_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n$, где $\mathbb{Z}_n$ – циклическая группа порядка n. Так как $\mathbb{R}^3/\mathbb{Z}_n$ гомеоморфно $\mathbb{R}^3$, то $p_1 : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ является разветвленным накрытием с множеством ветвления L. Добавляя к каждому из пространств $\mathbb{R}^3$ точку ∞, получим *разветвленное циклическое n-листное накрытие* $p : \mathbb{S}^3 \mapsto \mathbb{S}^3$ с множеством ветвления $L \cup \infty$.

Циклическое n-листное накрытие конических многообразий $p : \mathcal{C}_1 \mapsto \mathcal{C}_2$ с носителями трехмерная сфера и сингулярными множествами Σ_1 и Σ_2, соответственно, определяется аналогично. При этом мы требуем выполнения дополнительного условия: $p(\Sigma_1) =$

$= \Sigma_2$, причем каждая компонента связности L_1 множества Σ_1 переходит в соответствующую компоненту связности L_2 множества Σ_2. Конические углы вдоль компонент L_1 и L_2 должны быть одинаковы. Множеством ветвления является одна из сингулярных компонент конического многообразия $\mathcal{C}_2$, которая не учитывается.

Для дальнейшего изложения важен следующий факт [2; 12]: если коническое многообразие $\mathcal{C}_2$ допускает сингулярную метрику постоянной секционной кривизны $k \in \in \{-1, 0, +1\}$, то коническое многообразие $\mathcal{C}_1$ допускает сингулярную метрику такой же кривизны k, индуцированную накрытием (*поднятие метрики*).

Пусть $\mathrm{Vol_k}\,\mathcal{C}_1$, $\mathrm{Vol_k}\,\mathcal{C}_2$ — объемы конических многообразий $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ с сингулярными метриками постоянной секционной кривизны k соответственно. Обозначим через $\ell_{k,1}$ длину сингулярной компоненты L_1 конического многообразия $\mathcal{C}_1$, вычисленную в метрике кривизны k, а через $\ell_{k,2}$ — длину соответствующей сингулярной компоненты L_1 конического многообразия $\mathcal{C}_2$. Тогда выполнены следующие соотношения [2; 12]:

$$\frac{\ell_{k,1}}{\ell_{k,2}} = \frac{\mathrm{Vol_k}\,\mathcal{C}_1}{\mathrm{Vol_k}\,\mathcal{C}_2} = n.$$

§ 2. Торические (p, q) узлы

Определение и подробное описание торических узлов дано в [9. Гл. 3, разд. C]. В дальнейшем мы будем называть торический узел или зацепление типа (p, q) торическим (p, q) узлом независимо от того, взаимно просты числа p и q, или нет. При этом подразумевается, что в случае $\gcd(p, q) > 1$ мы рассматриваем торическое зацепление с количеством компонент, равным $\gcd(p, q)$. Поскольку замена знака у параметров p или q, а также перестановка их местами не меняют тип торического узла или зацепления [9], то без ограничения общности положим $1 \le p \le q$. В дальнейшем нас будут интересовать только торические узлы (p, q) с неабелевой фундаментальной группой, т. е. с параметрами $1 < p < q$ или $2 < p = q$ [9].

Обозначим для краткости торический узел типа (p, q) через $\mathbb{T}_{p,q}$. Коническое многообразие с сингулярным множеством торический (p, q) узел и коническим углом α вдоль каждой из его компонент обозначим $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$. В случае торического $(2, 2p)$ узла с двумя компонентами, конические углы вокруг которых различны, мы будем использовать обозначение $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha,\ \beta)$. Диаграмма узла $\mathbb{T}_{2,2p}$ изображена на рис. 1.

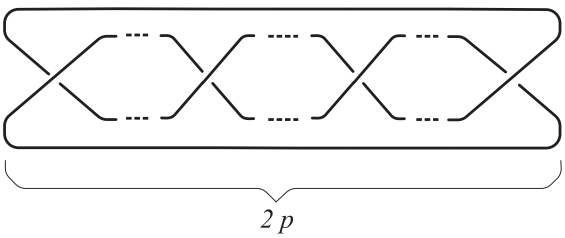

Рис. 1. Диаграмма узла $\mathbb{T}_{2,2p}$

В работе [1] были получены необходимые условия для существования сферической структуры на коническом многообразии $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \beta)$ в терминах конических углов. А именно, справедлива следующая

Теорема 1. *Коническое многообразие $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha,\, \beta)$ имеет сферическую структуру, если выполнены условия*

$$-2\pi\left(1-\frac{1}{p}\right) \,<\, \alpha \,-\, \beta \,<\, 2\pi\left(1-\frac{1}{p}\right),$$

$$2\pi\left(1-\frac{1}{p}\right) \,<\, \alpha \,+\, \beta \,<\, 2\pi\left(1+\frac{1}{p}\right).$$

Длины сингулярных компонент l_α и l_β (длины компонент зацепления $\mathbb{T}_{2,2p}$) равны между собой и выражаются формулой

$$l_\alpha \,=\, l_\beta \,=\, \frac{\alpha+\beta}{2}\,p \,-\, \pi\,(p-1).$$

Объем конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \beta)$ равен

$$\mathrm{Vol}\,\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha,\, \beta) \,=\, \frac{1}{2p}\,\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\,p \,-\, \pi(p-1)\right)^2.$$

Докажем предварительную лемму, указывающую на связь между семействами конических многообразий $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ и $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \beta)$.

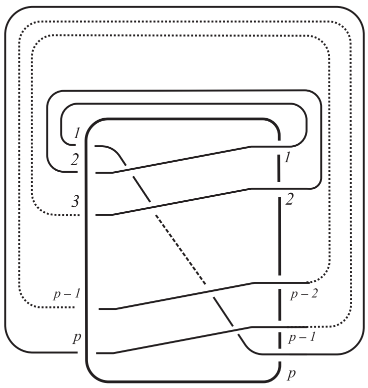

Рис. 2. Преобразованная диаграмма зацепления $\mathbb{T}_{2,2p}$

Лемма 1. *Коническое многообразие $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ является q-листным циклическим накрытием конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, 2\pi/q)$, разветвленным над одной из его сингулярных компонент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При помощи движений Райдемайстера расположим диаграмму зацепления $\mathbb{T}_{2,2p}$ так, чтобы оно обхватывало одну из своих компонент, представляющую собой окружность. Полученная диаграмма изображена на рис. 2.

Центральная компонента зацепления $\mathbb{T}_{2,2p}$ на рис. 2 ограничивает фрагмент диаграммы, q раз повторяющийся на рис. 3 в горизонтальном направлении в качестве части диаграммы узла $\mathbb{T}_{p,q}$. Таким образом, коническое многообразие $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ является q-листным циклическим накрытием конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q})$ разветвленным над одной из его сингулярных компонент (на рис. 2 это центральная компонента).

Лемма доказана.

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 2. *Коническое многообразие $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ с $1 < p < q$ или $2 < p = q$ имеет сферическую структуру, если выполнено следующее условие:*

$$2\pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < \alpha < 2\pi\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

В этом случае длина каждой сингулярной компоненты равна

$$\ell = \frac{1}{\gcd(p,q)}\left(\frac{\alpha}{2}pq - \pi(pq - p - q)\right).$$

Объем конического многообразия $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ выражается формулой

$$\operatorname{Vol}\mathbb{T}_{p,q}(\alpha) = \frac{pq}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)^2.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство теоремы следует из леммы 1 и теоремы 1.

Существование сферической структуры на коническом многообразии $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q})$ влечет существование сферической структуры на коническом многообразии $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$. Полагая $\beta = \frac{2\pi}{q}$ в неравенствах теоремы 1 и учитывая условие $p \leq q$, получим, что приведенная в условии теоремы 1 система неравенств равносильна неравенству

$$2\pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) < \alpha < 2\pi\left(1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right).$$

Следовательно, в условиях теоремы 2 коническое многообразие $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ имеет сферическую структуру.

Поскольку $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ является q-листным разветвленным накрытием конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q})$, то их объемы связаны соотношением

$$\frac{\operatorname{Vol}\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)}{\operatorname{Vol}\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q})} = q.$$

Используя формулу для объема конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \beta)$ из теоремы 1 и учитывая, что $\beta = \frac{2\pi}{q}$, получим

$$\operatorname{Vol}\mathbb{T}_{p,q}(\alpha) = q\operatorname{Vol}\,\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q}) = \frac{pq}{2}\left(\frac{\alpha}{2} - \pi\left(1 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right)\right)^2.$$

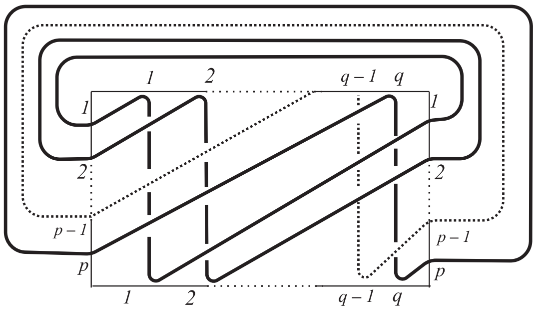

Рис. 3. Диаграмма торического узла $\mathbb{T}_{p,q}$

Так как (p, q) торический узел имеет $\gcd(p, q)$ компонент, то длина ℓ каждой из сингулярных компонент конического многообразия $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ связана с длиной сингулярной компоненты ℓ_α конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}$ следующей формулой:

$$\ell \gcd(p, q) = q\,\ell_\alpha,$$

поскольку под действием отображения накрытия все сингулярные компоненты $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ проектируются на сингулярную компоненту $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \frac{2\pi}{q})$. В силу симметрии $\mathbb{T}_{p,q}(\alpha)$ относительно перенумерации компонент, они имеют одинаковую длину.

Используя формулу для длины сингулярной компоненты конического многообразия $\mathbb{T}_{2,2p}(\alpha, \beta)$ и учитывая условие $\beta = \frac{2\pi}{q}$, получим

$$\ell = \frac{1}{\gcd(p, q)} \left(\frac{\alpha}{2} pq - \pi(pq - p - q) \right).$$

Доказательство завершено.

Автор благодарен рецензенту за полезные замечания, которые привели к улучшениям в изложении результатов настоящей работы.

Список литературы

1. *Колпаков А. А., Медных А. Д.* Сферические структуры на торических узлах и зацеплениях // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50, № 5. С. 1083–1096.

2. *Cooper D., Hodgson C., Kerckhoff S.* Three-Dimensional Orb Ifolds and Cone-Manifolds, with a Postface by Sadayoshi Kojima. Tokyo: Mathematical Society of Japan, 2000. (MSJ Memoirs; 5).

3. *Derevnin D., Mednykh A., Mulazzani M.* Geometry of Trefoil cone–manifold // Beiträge zur Algebra und Geometrie. 2008. In print.

4. *Dunbar W. D.* Geometric Orbifolds // Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid. 1988. Vol. 1. P. 67–99.

5. *Hilden H. M., Lozano M. T., Montesinos-Amilibia J. M.* On a Remarkable Polyhedron Geometrizing the Figure Eight Cone Manifolds // J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1995. Vol. 2. P. 501–561.

6. *Mednykh A., Rasskazov A.* Volumes and Degeneration of Cone-structures on the Figure–Eight Knot // Tokyo J. of Math. 2006. Vol. 29. No. 2. P. 445–464.

7. *Neumann W. P.* Notes on Geometry and 3-Manifolds (with Appendix by Paul Norbury) in: Low Dimensional Topology / Eds. K. Böröczky, W. Neumann, A. Stipsicz // Bolyai Society Mathematical Studies. 1999. Vol. 8. P. 191–267.

8. *Porti J.* Spherical Cone Structures on 2-Bridge Knots and Links // Kobe J. of Math. 2004. Vol. 21. No. 1. P. 61–70.

9. *Rolfsen D.* Knots and Links. Berkeley: Publish or Perish Inc., 1976.

10. *Seifert H., Weber C.* Die Beiden Dodecaederräme // Math. Z. 1933. Bd. 37. S. 237–253.

11. *Thurston W. P.* Hyperbolic Geometry and 3-Manifolds. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; Vol. 48. P. 9–25).

12. *Thurston W. P.* The Geometry and Topology of 3-Manifolds. Princeton: Lecture Notes, 1977–78.

Материал поступил в редколлегию 12.11.2008

Адрес автора
КОЛПАКОВ Александр Александрович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, к. 403
Новосибирский государственный университет
Механико-математический факультет
e-mail: kolpakov.alexander@gmail.com