УДК 510.5

Д. И. Душенин

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ ПРЯМЫХ СУММ АБЕЛЕВЫХ p-ГРУПП*

В данной работе проведена оценка тьюринговых степеней относительной автоустойчивости для p-групп с редуцированной частью типа 1 по ульмовой классификации. Также здесь приведены примеры, доказывающие точность этой оценки для случаев, когда полная часть группы имеет конечный и бесконечный ранг.

Ключевые слова: конструктивные модели, автоустойчивость, абелевы p-группы.

Изучение степеней относительной автоустойчивости для различных классов моделей было начато в работах С. С. Гончарова и Дж. Найт, где был разработан общий метод исследования для некоторых классов моделей. Но некоторые классические алгебраические структуры, такие как абелевы группы без кручения, абелевы p-группы и булевы алгебры, не подходят под этот метод, и было бы естественным исследовать их отдельно.

В данной работе проводится оценка для Тьюринговых степеней автоустойчивости абелевых p-групп, разложимых в прямую сумму циклических и квазициклических групп, относительно скачков рекурсивной степени.

Существует признак, позволяющий определить, является ли конструктивизируемая модель неавтоустойчивой относительно рекурсивной степени.

Теорема 1 (Дзгоев, Гончаров). *Если M — ветвящаяся конструктивизируемая модель, то класс ее конструктивизаций эффективно бесконечен.*

Следствие 1. *Абелева p-группа G автоустойчива тогда и только тогда, когда $G \cong$ $\cong (C(p^\infty))^k \oplus G_1 \oplus \left(Z(p^l)\right)^\infty$, где $k, l \in \mathbf{N}$ и группа G_1 конечна, либо $G \cong G_1 \oplus G_2$, где группа G_1 — полная, а группа G_2 — конечная.*

§ 1. Степень автоустойчивости редуцированных p-групп без элементов бесконечной высоты

Наипростейшим случаем в данной работе являются группы именно такого вида. Из основных фактов теории групп известно, что такие группы разлагаются в прямую сумму циклических p-групп. Докажем следующую теорему.

Теорема 2. *Если имеющая вычислимое представление редуцированная абелева p-группа не имеет элементов бесконечной высоты, то она является $0'$-автоустойчивой. Также существуют группы такого вида, не являющиеся автоустойчивыми относительно рекурсивной степени.*

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-01-00336.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 29–39

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть абелева p-группа G представляется в следующем виде:

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{q_i}, \text{ где } \forall i \quad q_i \leq \omega.$$

Докажем, что G — $0'$-автоустойчивая.

Пусть ν и μ — произвольные конструктивизации G. Обозначим G' и G'' — копии G в ν и μ соответственно. Нужно построить $0'$-рекурсивный изоморфизм $\varphi : G' \to G''$ такой, что $\varphi\nu = \mu$.

0-й шаг. Пусть $X'_0 := \langle 0 \rangle$, $X''_0 := \langle 0 \rangle$, $\varphi_0 : X'_0 \to X''_0$.

$(2n+1)$-й шаг. Пусть для любого натурального числа k такого, что $0 < k < 2n+1$, построили конечные сервантные подгруппы X'_k и X''_k, являющиеся прямыми слагаемыми групп G' и G'' соответственно, а также $0'$-рекурсивный изоморфизм φ_k между ними.

Пусть $a_n := \nu(n)$, $s_0 := \mu y[\chi_{X'_{2n}}(p^y a_n = 0)]$.

Если $s_0 = 0$, то положим $X'_{2n+1} := X'_{2n}$, $X''_{2n+1} := X''_{2n}$, $\varphi_{2n+1} := \varphi_{2n}$, затем переходим к следующему шагу.

Пусть $s_0 = 1$, т. е. $pa_n \in X'_{2n}$, но $a_n \notin X'_{2n}$.

Рассмотрим смежный класс $X'_{2n} + a_n$. В нем содержится только конечное число элементов. Значит, $\chi_{X'_{2n}+a_n}$ — рекурсивна.

Затем ищем $m_0 \in \mathbf{N}$ и $x'_{2n+1} \in G'$, удовлетворяющие формуле

$$m_0 - 1 = \mu y\Big[\chi_{X'_{2n}+a_n}(p^y x'_{2n+1}) = 0\Big] \;\& \\ \& \neg(\exists z)\neg(\exists m)\left(\mu y\left[\chi_{X'_{2n}+a_n}(p^y z) = 0\right] = m \;\&\; (m > m_0 - 1)\right).$$

Оракул $0'$ позволяет это сделать. Таким образом, мы нашли x'_{2n+1} — максимальный корень из элемента смежного класса $X'_{2n} + a_n$, имеющего максимальную высоту среди представителей этого класса.

Пусть $X'_{2n+1} := \big\langle X'_{2n}, x'_{2n+1} \big\rangle$. Обратим внимание на то, что $p^{m_0} x'_{2n+1} \in X'_{2n}$, так как $pa_n \in X'_{2n}$. Заметим, что из сервантности группы X'_{2n} следует, что $\exists z'_{2n+1} \in X'_{2n}$: $p^{m_0} x'_{2n+1} = p^{m_0} z'_{2n+1}$. Тогда если $\bar{x}_{2n+1} := x'_{2n+1} - z'_{2n+1}$, то $p^{m_0}\bar{x}_{2n+1} = 0$.

Очевидно, что $X'_{2n+1} = \langle X'_{2n}, \bar{x}_{2n+1} \rangle$.

Все элементы вида $k\bar{x}_{2n+1}$, где $0 < k < p^{m_0}$, лежат вне X'_{2n}, значит, $X'_{2n+1} = X'_{2n} \oplus \oplus \langle \bar{x}_{2n+1} \rangle$, где $\langle \bar{x}_{2n+1} \rangle$ — циклическая группа порядка p^{m_0}.

Заметим, что X'_{2n+1} тоже сервантная (это следует из выбора x'_{2n+1}) и конечная (а значит, с ограниченными в совокупности порядками). Таким образом, X'_{2n+1} служит прямым слагаемым для группы G'.

Теперь ищем $x''_{2n+1} \in G''$, удовлетворяющий формуле

$$m_0 = \mu y\big[p^y x''_{2n+1} = 0\big] \;\& \\ \& \left(\left(\left(\chi_{X''_{2n}}(kx''_{2n+1}) = 0\right) \& \left(k < p^{m_0}\right)\right) \to (k = 0)\right) \;\& \\ \& \neg(\exists z)\left(\chi_{X''_{2n}+x''_{2n+1}}(pz) = 0\right).$$

Пусть $X''_{2n+1} := \langle X''_{2n}, x''_{2n+1}\rangle$. Очевидно, что $X''_{2n+1} = X''_{2n} \oplus \langle x''_{2n+1}\rangle$. Также очевидно, что X''_{2n+1} — сервантная, с порядками, ограниченными в совокупности, а значит, служит для группы G'' прямым слагаемым.

Теперь определим φ_{2n+1}. Пусть он совпадает с φ_{2n} на подгруппе X'_{2n} и $\varphi_{2n+1}(\bar{x}_{2n+1}) = x''_{2n+1}$. Очевидно, что φ_{2n+1} — $0'$-рекурсивный изоморфизм между X'_{2n+1} и X''_{2n+1}, продолжающий φ_{2n}.

Далее, если $s_0 > 1$, то последовательно повторим описанную выше процедуру для элементов $p^{s_0-1}a_n, p^{s_0-2}a_n, \ldots, pa_n, a_n$.

$2(n+1)$-й шаг. Действуем аналогично $(2n+1)$-му шагу, с той лишь разницей, что если на предыдущем шаге мы строили образ элемента $\nu(n)$, то на этом шаге будем строить прообраз элемента $\mu(n)$.

Итак, заметим, что

$$G' = \bigcup_{n\geq 0} X'_n, \quad G'' = \bigcup_{n\geq 0} X''_n.$$

Для любого $n \in \mathbf{N}$ между подгруппами X'_n и X''_n существует изоморфизм φ_n, продолжающий изоморфизм φ_{n-1}, если $n > 0$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ изоморфизм φ_n — $0'$-рекурсивный, значит, группа G — $0'$-автоустойчива.

Заметим, что согласно следствию 1, существуют неавтоустойчивые группы такого вида.

Таким образом, теорема 2 доказана.

§ 2. Верхняя оценка степени автоустойчивости прямой суммы редуцированной p-группы без элементов бесконечной высоты и квазициклической p-группы

Интересен тот факт, что как только к абелевой p-группе, представимой в виде прямой суммы циклических подгрупп, прибавляется полная часть, то, независимо от ранга этой полной части, степень автоустойчивости полученной группы возрастает не более, чем на один скачок относительно рекурсивной степени. Докажем следующую теорему.

Теорема 3. *Если имеющая вычислимое представление абелева p-группа G представляется в следующем виде:*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{q_i} \oplus (C(p^\infty))^\alpha, \quad \text{где} \quad \forall i \;\; q_i \leq \omega, \; \alpha \leq \omega,$$

то она является $0''$-автоустойчивой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ν и μ — произвольные конструктивизации G. Обозначим G' и G'' — представления G в конструктивизациях ν, μ соответственно. Обозначим $G_2 := (C(p^\infty))^\alpha$. Нужно построить $0''$-рекурсивный изоморфизм $\varphi : G' \to G''$ такой, что $\varphi\nu = \mu$. Заметим, что $G_2 = \{x : \forall h\, \exists y\, (p^h y = x)\}$, т. е. $G_2 \in \Pi^0_2$. Обозначим G'_2 и G''_2 — копии G_2 в конструктивизациях ν, μ соответственно.

0-й шаг. Пусть $X'_0 := \langle 0\rangle$, $Y'_0 := \langle 0\rangle$, $X''_0 := \langle 0\rangle$, $Y''_0 := \langle 0\rangle$. Обозначим $Z'_0 := X'_0 \oplus Y'_0$, $Z''_0 := X''_0 \oplus Y''_0$. Пусть $\varphi_0 : Z'_0 \to Z''_0$.

$(2n+1)$-й шаг. Пусть для любого натурального числа k такого, что $0 < k < 2n+1$, построили конечные сервантные подгруппы X'_k и X''_k, являющиеся прямыми слагаемыми групп G' и G'' соответственно и обладающие свойствами: $X'_k \cap G'_2 = 0$, $X''_k \cap G''_2 = 0$, конечные Y'_k и Y''_k, являющиеся подгруппами G'_2 и G''_2 соответственно, а также $0''$-рекурсивный изоморфизм $\varphi_k : Z'_k \to Z''_k$, где $Z'_k := X'_k \oplus Y'_k$, $Z''_k := X''_k \oplus Y''_k$.

Пусть $v'_{2n+1} := \nu(n)$, $s_0 := \mu y[\chi_{Z'_{2n}}(p^y v'_{2n+1}) = 0]$.

Если $s_0 = 0$, то положим $Z'_{2n+1} := Z'_{2n}$, $Z''_{2n+1} := Z''_{2n}$, $\varphi_{2n+1} := \varphi_{2n}$, затем переходим к следующему шагу.

Пусть $s_0 = 1$, т. е. $pv'_{2n+1} \in Z'_{2n}$, но $v'_{2n+1} \notin Z'_{2n}$. Положим $d := \mu y\left[p^y v'_{2n+1} = 0\right]$.

С помощью оракула $0''$ проверяем истинность предложения

$$\exists h\, \forall y\, \left(p^h y \neq v'_{2n+1}\right). \tag{$*$}$$

Рассмотрим оба случая.

1) Допустим, предложение $(*)$ ложно. Тогда верно, что

$$\forall h \exists y \big(p^h y = v'_{2n+1}\big).$$

Другими словами, v'_{2n+1} имеет бесконечную высоту. Следовательно, $v'_{2n+1} \in G'_2$. Так как $v'_{2n+1} \notin Z'_{2n}$, то $v'_{2n+1} \notin Y'_{2n}$. Положим $Y'_{2n+1} := \left\langle Y'_{2n}, v'_{2n+1}\right\rangle$, $X'_{2n+1} := X'_{2n}$, $Z'_{2n+1} := X'_{2n+1} \oplus Y'_{2n+1}$. Теперь вспомним, что $pv'_{2n+1} \in Z'_{2n}$. Значит, $pv'_{2n+1} \in Y'_{2n}$. Положим $c'_{2n+1} := pv'_{2n+1}$, $c''_{2n+1} := \varphi_{2n}(c'_{2n+1})$. Теперь ищем в G''_2 элемент v''_{2n+1}, удовлетворяющий формуле $(pv''_{2n+1} = c''_{2n+1})\,\&\,(v''_{2n+1} \notin Y''_{2n})$. Положим $Y''_{2n+1} := \left\langle Y''_{2n}, v''_{2n+1}\right\rangle$, $X''_{2n+1} := X''_{2n}$, $Z''_{2n+1} := X''_{2n+1} \oplus Y''_{2n+1}$.

Теперь определим φ_{2n+1}. Пусть он совпадает с φ_{2n} на подгруппе Z'_{2n} и $\varphi_{2n+1}(v'_{2n+1}) = v''_{2n+1}$. Очевидно, что φ_{2n+1} — $0''$-рекурсивный изоморфизм между Z'_{2n+1} и Z''_{2n+1}, продолжающий φ_{2n}.

2) Допустим, предложение $(*)$ истинно. Иначе говоря, v'_{2n+1} имеет конечную высоту. Тогда рассмотрим множество $L' := \{a + iv'_{2n+1} |\ a \in X'_{2n}, 0 < i < p^d\}$. Заметим, что L' — конечное множество. Более того, зная сам элемент v'_{2n+1} и его порядок, мы можем за конечное число шагов определить все элементы этого множества. Поэтому в формулах, которые будут рассмотрены ниже, ограниченный квантор по множеству L' не будет оказывать влияния на их сложность. По тем же причинам влияния на их сложность не окажет использование характеристической функции множества L'.

Проверим истинность предложения

$$(\exists x \in L')\, \forall h\, \exists y\, \big(p^h y = x\big). \tag{$**$}$$

Рассмотрим оба случая.

(a) Допустим, предложение $(**)$ — ложно. Иными словами, все элементы множества L' имеют конечную высоту. Тогда ищем $m_0 \in \mathbf{N}$ и $z'_{2n+1} \in G'$, удовлетворяющие формуле

$$m_0 - 1 = \mu y\left[\,\chi_{L'}(p^y z'_{2n+1}) = 0\,\right]\ \& \\ \&\, \neg(\exists z)\,\neg(\exists m)\,\Big(\mu y\left[\,\chi_{L'}(p^y z) = 0\,\right] = m\,\&\,(m > m_0 - 1)\Big).$$

Таким образом, мы нашли z'_{2n+1} — максимальный корень из элемента множества L', имеющего максимальную высоту среди представителей этого класса. Заметим, что $p^{m_0}z'_{2n+1} \in Z'_{2n}$, так как $pv'_{2n+1} \in Z'_{2n}$.

Обратим внимание на то, что если $pv'_{2n+1} \notin X'_{2n}$, то тогда во множестве L' будут элементы бесконечной высоты, так как нашлись бы такие $x \in X'_{2n}$ и $y \in Y'_{2n}$, что $pv'_{2n+1} = x + y$. Поэтому $pv'_{2n+1} \in X'_{2n}$. Тогда $p^{m_0}z'_{2n+1} \in X'_{2n}$.

Положим $X'_{2n+1} := \langle X'_{2n}, z'_{2n+1} \rangle$, $Y'_{2n+1} := Y'_{2n}$. Из сервантности группы X'_{2n} следует, что $\exists a'_{2n+1} \in X'_{2n}$: $p^{m_0}z'_{2n+1} = p^{m_0}a'_{2n+1}$. Тогда если $\bar{z}_{2n+1} := z'_{2n+1} - a'_{2n+1}$, то $p^{m_0}\bar{z}_{2n+1} = 0$. Очевидно, что $X'_{2n+1} = \langle X'_{2n}, \bar{z}_{2n+1} \rangle$.

Все элементы вида $k\bar{z}_{2n+1}$, где $0 < k < p^{m_0}$, лежат вне X'_{2n}, значит, $X'_{2n+1} = X'_{2n} \oplus \langle \bar{z}_{2n+1} \rangle$, где $\langle \bar{z}_{2n+1} \rangle$ — циклическая группа порядка p^{m_0}. Заметим, что X'_{2n+1} тоже сервантная (это следует из выбора z'_{2n+1}) и конечная (а значит, с ограниченными в совокупности порядками). Таким образом, X'_{2n+1} служит прямым слагаемым для группы G'. Очевидно также, что $X'_{2n+1} \cap Y'_{2n+1} = 0$. Положим $Z'_{2n+1} := X'_{2n+1} \oplus Y'_{2n+1}$.

Теперь ищем $v''_{2n+1} \in G''$, $z''_{2n+1} \in G''$, удовлетворяющие формуле

$$\chi_{X''_{2n}}\left(pv''_{2n+1}\right) = 0 \mathbin{\&} \exists z''_{2n+1}\Big(\mu y\left[\chi_{L''}(p^y z''_{2n+1}) = 0\right] = m_0 - 1\Big) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \neg(\exists x)\neg(\exists m)\Big(\mu y\left[\chi_{L''}(p^y x) = 0\right] = m \mathbin{\&} (m > m_0 - 1)\Big) \mathbin{\&}$$
$$\mathbin{\&} \left(\mu y\left[p^y v''_{2n+1} = 0\right] = d\right).$$

Символом «L''» в формуле обозначили множество $L'' := \{a + iv''_{2n+1} \mid a \in X''_{2n}, 0 < i < p^d\}$.

Из формулы видно, что $p^{m_0}z''_{2n+1} \in X''_{2n}$. Поэтому из сервантности группы X''_{2n} следует, что $\exists a''_{2n+1} \in X''_{2n}$: $p^{m_0}z''_{2n+1} = p^{m_0}a''_{2n+1}$. Тогда если $\hat{z}_{2n+1} := z''_{2n+1} - a''_{2n+1}$, то $p^{m_0}\hat{z}_{2n+1} = 0$. Положим $X''_{2n+1} := \langle X''_{2n}, \hat{z}_{2n+1} \rangle$.

Все элементы вида $k\hat{z}_{2n+1}$, где $0 < k < p^{m_0}$, лежат вне X''_{2n}, значит, $X''_{2n+1} = X''_{2n} \oplus \langle \hat{z}_{2n+1} \rangle$, где $\langle \hat{z}_{2n+1} \rangle$ — циклическая группа порядка p^{m_0}. Также ясно, что X''_{2n+1} — сервантная, с ограниченными в совокупности порядками, а значит, служит для G'' прямым слагаемым. Положим $Y''_{2n+1} := Y''_{2n}$. Ясно, что $X''_{2n+1} \cap Y''_{2n+1} = 0$. Положим $Z''_{2n+1} := X''_{2n+1} \oplus Y''_{2n+1}$.

Теперь определим φ_{2n+1}. Пусть он совпадает с φ_{2n} на Z'_{2n}, а $\varphi_{2n+1}(\bar{z}_{2n+1}) = \hat{z}_{2n+1}$. Очевидно, что φ_{2n+1} — $0''$-рекурсивный изоморфизм между Z'_{2n+1} и Z''_{2n+1}, продолжающий φ_{2n}.

(b) Допустим, предложение $(**)$ – истинно. Другими словами, во множестве L' есть элементы бесконечной высоты. Тогда из сервантности группы X'_{2n} следует, что или $pv'_{2n+1} \notin X'_{2n}$, или $pv'_{2n+1} = 0$, т. е. $d = 1$.

Рассмотрим все три варианта.

(b1) Пусть $d = 1$.

Тогда верно, что $(\exists x'_{2n+1} \in X'_{2n})\big(\chi_{G'_2}(v'_{2n+1} - x'_{2n+1}) = 0\big)$. С помощью оракула $0''$ ищем такой x'_{2n+1}. Затем с элементом $y'_{2n+1} := v'_{2n+1} - x'_{2n+1}$ проводим процедуру, описанную в пункте 1), подставляя его вместо v'_{2n+1}.

(b2) Пусть $pv'_{2n+1} \in Y'_{2n}$.

Но в таком случае верно, что существует такой элемент u'_{2n+1}, что $(pu'_{2n+1} = 0) \mathbin{\&} \chi_{G'_2}(v'_{2n+1} - u'_{2n+1}) = 0$. С помощью оракула $0''$ находим u'_{2n+1}, удовлетворяющий этой формуле, и положим $y'_{2n+1} := v'_{2n+1} - u'_{2n+1}$. Теперь проводим с элементом y'_{2n+1} процедуру, описанную в пункте 1), подставляя его вместо v'_{2n+1}. Затем рассмотрим смежный класс $X'_{2n} + u'_{2n+1}$ и проверим истинность предложения:

$$(\exists x \in X'_{2n} + u'_{2n+1})\, \forall h\, \exists y\, \big(p^h y = x\big).$$

Если оно ложно, т. е. все элементы этого смежного класса имеют конечную высоту, то проводим с элементом u'_{2n+1} процедуру, описанную в пункте 2(a). Если оно истинно, т. е. в этом смежном классе есть элементы бесконечной высоты, то проводим с элементом u'_{2n+1} процедуру, описанную в пункте 2(b1).

(b3) Пусть $pv'_{2n+1} \in X'_{2n} \oplus Y'_{2n}$, но $pv'_{2n+1} \notin X'_{2n} \cup Y'_{2n}$. Тогда верно, что существует такой элемент u'_{2n+1}, что верна формула $\chi_{X'_{2n}}(pu'_{2n+1}) = 0 \& \chi_{Y'_{2n}}(p(v'_{2n+1} - u'_{2n+1})) = 0$. Заметим, что так как подгруппа X'_{2n} — сервантна, то такой элемент существует и в ней. Находим в X'_{2n} такой u'_{2n+1}. Теперь проведем с элементом $y'_{2n+1} := v'_{2n+1} - u'_{2n+1}$ процедуру, описанную в пункте 2(b2).

Далее, если $s_0 > 1$, то последовательно повторим описанную выше процедуру для элементов $p^{s_0-1}v'_{2n+1}, p^{s_0-2}v'_{2n+1}, \ldots, pv'_{2n+1}$ и v'_{2n+1}.

$2(n+1)$-й шаг. Действуем аналогично $(2n+1)$-му шагу, с той лишь разницей, что если на предыдущем шаге мы строили образ элемента $\nu(n)$, то на этом шаге будем строить прообраз элемента $\mu(n)$.

Итак, заметим, что

$$G' = \bigcup_{n \geq 0} Z'_n, \quad G'' = \bigcup_{n \geq 0} Z''_n, \quad G'_2 = \bigcup_{n \geq 0} Y'_n, \quad G''_2 = \bigcup_{n \geq 0} Y''_n.$$

Обозначим:

$$G'_1 = \bigcup_{n \geq 0} X'_n, \quad G''_1 = \bigcup_{n \geq 0} X''_n.$$

Для любого $n \in \mathbf{N}$ верно, что $X'_n \cap G'_2 = 0$, $X''_n \cap G''_2 = 0$. Тогда очевидно, что $G' = G'_1 \oplus G'_2$, $G'' = G''_1 \oplus G''_2$. Таким образом, построили G'_1 и G''_1, являющиеся редуцированными подгруппами G' и G'' соответственно. Для любого $n \in \mathbf{N}$ между подгруппами Z'_n и Z''_n существует изоморфизм φ_n, продолжающий изоморфизм φ_{n-1}, если $n > 0$. Для любого $n \in \mathbf{N}$ изоморфизм φ_n — $0''$-рекурсивный, значит, группа G – $0''$-автоустойчива.

Теорема 3 доказана.

§ 3. Примеры абелевых p-групп, не являющихся $0'$-автоустойчивыми, но представимых в виде прямой суммы циклических и квазициклических подгрупп

Для того чтобы доказать точность уже приведенной оценки, необходимо привести некоторые примеры абелевых p-групп рассмотренного вида, не являющихся $0'$-автоустойчивыми. Сначала приведем пример, в котором полная часть будет иметь бесконечный ранг. Нашей целью будет являться построение двух конструктивизаций одной и той же группы, не $0'$-эквивалентных между собой.

Теорема 4. *Абелева p-группа G вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega} \oplus (C(p^{\infty}))^{\omega}$$

обладает двумя конструктивизациями μ и ν, не $0'$-автоэквивалентными между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим ее стандартное представление. Пусть μ — соответствующая конструктивизация. Хотим построить конструктивизацию ν, не $0'$-автоэквивалентную μ.

Пусть $A \in \Pi_2^0 \backslash \Sigma_2^0$, $A(x) = \exists^{\infty} y P(x,y)$, где $P(x,y)$ — рекурсивный предикат. Далее, во всех доказательствах предикат A отождествляем с множеством элементов, на которых он истинен.

Построим теперь представление для конструктивизации ν' некоторой группы

$$G' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{s_i} \oplus (C(p^{\infty}))^{\omega}, \quad \text{где } s_i \leq \omega.$$

На каждом шаге i+1 будем строить конечную p-группу $G'^{\nu'}_{i+1}$ такую, что $G'^{\nu'}_{i} \leq G'^{\nu'}_{i+1}$.

Введем обозначения, которые будем использовать во всех примерах: линейно независимые элементы строящейся группы порядка p^k будем обозначать как a_j^k, где $j \geq 0$. Для любых $k > 1$, $j \geq 0$ a_j^k будет таким элементом, что $pa_j^k = a_j^{k-1}$.

Приступим к описанию конструкции.

0-й шаг. Пусть $G'^{\nu'}_0 := \langle 0 \rangle$.

1-й шаг. Положим $G'^{\nu'}_1 := \langle a_0^1 \rangle$.

$(i+1)$-й шаг. Для всех $j \leq i$ построили конечные p-группы $G'^{\nu'}_j$, где $G'^{\nu'}_i = \langle a_0^{h_0}, \ldots, a_{i-1}^{h_{i-1}} \rangle$.

Добавим в строящуюся группу элемент a_i^1. Пусть $B := \{x \mid x < i-1 \,\&\, P(x, i+1)\}$. Допустим, $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Теперь последовательно добавляем в строящуюся группу элементы $a_{b_1}^{h_{b_1}+1}, \ldots, a_{b_n}^{h_{b_n}+1}$.

Шаг окончен. Конструкция описана.

Далее, рассмотрим группу $G'' := \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega}$ и ее стандартную конструктивизацию ν''. Пусть $G^{\nu} := G'^{\nu'} \oplus G''^{\nu''}$. Очевидно, что ν и μ — конструктивизации одной и той же группы G.

Допустим, что существует $0'$-рекурсивный изоморфизм $f : G^{\nu} \to G^{\mu}$. Тогда чтобы определить высоту элемента в группе G^{ν}, достаточно рассмотреть его образ под действием f. Но тогда $A \in \Delta_2^0$. Противоречие, так как мы выбирали $A \notin \Sigma_2^0$. Таким образом, группа G не является $0'$-автоустойчивой.

Теорема 4 доказана.

Теперь рассмотрим более трудный случай, в котором полная часть будет иметь конечный ранг.

Теорема 5. *Абелева p-группа G вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega} \oplus (C(p^{\infty}))^{q}, \quad \text{где } 1 \leq q \leq \omega,$$

обладает двумя конструктивизациями μ и ν, не $0'$-автоэквивалентными между собой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно рассмотреть случай, когда $q = 1$. Случай, когда $1 < q < \omega$, доказывается аналогично. Заметим, что доказательство этого факта при $q = \omega$ дано в теореме 4.

Пусть $A \in \Pi^0_2 \setminus \Sigma^0_2$, $A(x) = \exists^\infty y\, P(x,y)$, где $P(x,y)$ — рекурсивный предикат. Рассмотрим абелеву p-группу

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega} \oplus (C(p^\infty)),$$

обладающую стандартной конструктивизацией μ, в которой полная часть — рекурсивна.

Построим теперь представление для конструктивизации ν' некоторой группы

$$G' = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{s_i} \oplus (C(p^\infty)), \quad \text{где } s_i \le \omega.$$

На каждом шаге $i+1$ будем строить конечную p-группу $G'^{\nu'}_{i+1}$ такую, что $G'^{\nu'}_i \le G'^{\nu'}_{i+1}$. На каждом шаге $i+1$ на любой элемент группы $G'^{\nu'}_{i+1}$ мы можем ставить метку $m < \omega$. Еще введем конечные множества $B^s_{i,j} := \{x \mid s \le x \le j \ \&\ P(x,i)\}$. Наша цель сейчас состоит в том, чтобы в построенной группе $G'^{\nu'}$ множество меток, поставленных на элементы бесконечной высоты, точно совпадало с A.

Введем обозначение $G'^{\nu'}_{i,k} := \{x \mid x \in G'^{\nu'}_i \ \&\ k = \mu y\, [p^y x = 0]\,\}$. Также для всех i и $y \in G'^{\nu'}_i$ определим множество $K_i(y) := \{x \mid x \in G'^{\nu'}_i \ \&\ px = y\}$.

Пусть $a \in G'^{\nu'}_i$. Введем параметр $m^i_{\max}(a)$ следующим образом. Если на $K_i(a)$ нет меток, то полагаем $m^i_{\max}(a) := 0$. Иначе считаем, что $m^i_{\max}(a) := \max\{\, x \mid$ *метка* x *после шага* i *стоит на некотором элементе* $K_i(a)\,\}$.

Для всех i и n определим соответствующие «ограничители» следующим образом: $r^n_i := \big|\{\, y \mid y \le i \ \&\ P(n,y)\,\}\big|$. Это неубывающие по i функции, которые стремятся к бесконечности при $n \in A$.

Опишем процедуру $R(i+1, l, a_0, a', B)$, где $l < i+1$, $a_0 \in G'^{\nu'}_{i,l-1}$, $B = \{b_1 < \ldots < b_n\}$, a' — некоторый элемент из цоколя строящейся группы. Она будет проводиться на $(i+1)$-м шаге и начинать действовать с некоторого корня элемента a_0. Процедура будет описываться с помощью рекурсии. Считаем, что для всех t таких, что $l < t < i+1$, процедура уже описана. Разделим ее на n шагов.

Так как процедура будет проводиться только на шаге $i+1$, то считаем, что для всех $j \le i$ уже построены конечные p-группы $G'^{\nu'}_j$. Процедура будет действовать на группу $\bar{G}'^{\nu'}_i$, полученную в результате преобразований, уже сделанных с группой $G'^{\nu'}_i$ на шаге $i+1$.

1-й шаг. При $l > 1$ процедура будет вызываться, только когда на всех элементах a_0, $pa_0, \ldots, p^{l-2}a_0$ стоят метки. Пусть это будут метки $m_0, \ldots, m_{l-2}$ соответственно.

Если $\min\{\, r^{m_{l-2}}_{i+1} - (l-2), r^{m_{l-3}}_{i+1} - (l-3), \ldots, r^{m_0}_{i+1}\,\} \le 1$, то сразу же заканчиваем процедуру.

Допустим, это не так. Рассмотрим множество $K_i(a_0)$. Если оно пусто, то добавляем в строящуюся группу корень из a_0. Ищем элемент из $K_i(a_0)$, на котором стоит метка b_1. Если такого элемента нет, и a'_1 — некоторый уже добавленный корень из a_0, то ставим метку b_1 на $a' + a'_1$ в случае, когда $l > 1$, и на a' при $l = 1$.

Пусть a_1 — корень из a_0 с меткой b_1. Если $m^i_{\max}(a_0) \le b_1$, то приступаем к следующему шагу процедуры. Допустим, что верно $m^i_{\max}(a_0) > b_1$. Снимаем все метки, большие b_1, с элементов $K_i(a_0)$, а также все метки с корней всех порядков этих элементов. Далее, пусть $v := \max\{x \mid m^x_{\max}(a_0) \le b_1 \;\&\; x \le i\}$. Затем проводим последовательно процедуры $R(i{+}1, l{+}1, a_1, c_1, B^{b_1}_{v+1,i+1}), \ldots, R(i{+}1, l{+}1, a_1, c_{i-v}, B^{b_1}_{i,i+1})$, добавляя перед каждой процедурой в цоколь новый соответствующий элемент c_j. Приступаем к следующему шагу.

(k+1)-й шаг. Построили цепочку элементов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Для всех j_1 и j_2 таких, что $1 \le j_1 < k$, $1 \le j_2 \le k$ верно, что $pa_{j_1+1} = a_{j_1}$, на a_{j_2} стоит метка b_{j_2}. Добавляем в цоколь строящейся группы новый элемент a'' и проводим затем процедуру $R(i+1, l+k, a_k, a'', \bar{B})$, где $\bar{B} = \{b_{k+1}, \ldots, b_n\}$.

Если $k + 1 = n$, то этот шаг был последним. Если $k + 1 \ne n$, то приступаем к шагу $k + 2$. Описание процедуры закончено.

Теперь приступим к описанию самой конструкции.

0-й шаг. Пусть $G'^{\surd'}_0 := \langle 0 \rangle$.

1-й шаг. Положим $G'^{\surd'}_1 := \langle a^1_0 \rangle$. Ставим на a^1_0 метку 0.

(i + 1)-й шаг. Для всех $j \le i$ построили конечные p-группы $G'^{\surd'}_j$, где $G'^{\surd'}_{j,1} = \langle a^1_0, \ldots, a^1_{l_j} \rangle$.

Сначала добавляем в $G'^{\surd'}_{i,1}$ новый элемент $a^1_{l_i+1}$. Затем проводим процедуру $R(i+1, 1, 0, a^1_{l_i+1}, B^0_{i+1,i+1})$. Шаг закончен.

Конструкция описана. Сделаем несколько выводов.

Замечание 1. Для любого a ограничитель r^a_k стремится к бесконечности по k тогда и только тогда, когда $a \in A$.

Замечание 2. Процедура $R(i{+}1, l, a_0, a', B)$ начинает свое действие с некоторого корня из элемента a_0 и не ставит новых меток на элементы порядков, меньших p^l. При ее проведении либо вообще не ставится меток на элементы порядка p^l, либо ставится одна метка именно на тот элемент, с которого она начинает свое действие.

Замечание 3. При построении группы $G'^{\surd'}$ для любого элемента $g \ne 0$ добавляется новый корень только в том случае, когда на g стоит какая-либо метка.

Замечание 4. Для любого $k < \omega$ и для всякого $g \in G'^{\surd'}_k$ верно, что либо на g стоит ровно одна метка, либо вообще не стоит меток.

Замечание 5. Все процедуры действуют так, что при построении группы $G'^{\surd'}$ для каждого отдельного элемента g может реализоваться только один из следующих трех случаев:

(a) На g не ставится метка ни на одном шаге конструкции.

(b) На некотором шаге i на g ставится некоторая метка и больше никогда не снимается.

(c) На некотором шаге i на g ставится некоторая метка, которая снимается с него на некотором шаге $j > i$. После шага j на элемент g никакие метки больше не ставятся.

Больше никаких случаев быть не может, так как на каждом шаге i процедура R действует так, что метки могут ставиться лишь на элементы, которые были добавлены именно на этом шаге.

Лемма 1. *В построенной группе для любого $k < \omega$ не существует двух линейно независимых элементов порядка p^k, имеющих бесконечную высоту.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать лемму для $k = 1$. На каждом шаге i проводится ровно одна процедура R, начинающая свое действие с первого слоя строящейся группы. Таким образом, из замечаний 2 и 3 следует, что на каждом шаге i может увеличиться высота не более, чем одного элемента первого слоя.

На различных произвольных шагах $i > 1$ и $j > i$ проводятся процедуры $R(i, 1, 0, a^1_{l_i}, B^0_{i,i})$ и $R(j, 1, 0, a^1_{l_j}, B^0_{j,j})$. Допустим, верно, что $\min\{B^0_{j,j}\} < \min\{B^0_{i,i}\}$. Тогда, если метка $\min\{B^0_{i,i}\}$ на шаге $j-1$ стоит на некотором элементе цоколя, то на шаге j она снимается с него, и из замечаний 3, 4 и 5 следует, что в дальнейшем высота элемента, на котором она стояла, больше не будет возрастать. Поэтому в построенной группе не будет двух линейно независимых элементов цоколя бесконечной высоты.

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Построенная нами группа обладает полной частью ранга 1. Более того, верно следующее. Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ — образующие элементы полной части построенной группы порядков $p, p^2, \ldots, p^n \ldots$ соответственно. Если упорядочить элементы A по возрастанию и обозначить их как $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, то для любого $n < \omega$ на элементе c_n стоит метка a_n.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Второе утверждение будем доказывать индукцией по n. Для доказательства первого утверждения леммы, принимая во внимание лемму 1, достаточно показать, что в цоколе построенной группы есть элемент бесконечной высоты. Этот факт мы покажем в базе индукции.

База. $n = 1$. Пусть $a_1 = \min A$. Это означает, что $\exists^\infty y\, P(a_1, y)$ и $(\forall a < a_1) \neg\exists^\infty y\, P(a, y)$. Таким образом, существует шаг, на котором метка a_1 ставится на некоторый элемент цоколя строящейся группы c и в дальнейшем с него не снимается. Более того, существует бесконечно много шагов k, на которых выполняется процедура R, начинающая свое действие именно с этого элемента. Из этих выводов и замечания 1 можно сделать вывод, что для любого $h < \omega$ существует шаг k' такой, что для всех $k'' > k'$ высота c в группе $G'^{\nu'}_{k''} > h$. Таким образом, на элементе c в построенной группе стоит метка a_1, и он имеет бесконечную высоту. Пусть $c_1 := c$.

Шаг. Пусть на элементах $c_1, \ldots, c_n$ стоят метки $a_1, \ldots, a_n$. Верно, что $\exists^\infty y P(a_{k+1}, y)$ и $(\forall a < a_{k+1})(\neg\exists^\infty y P(a, y) \vee a \in A)$. Иначе говоря, существует шаг, на котором метка a_{n+1} ставится на некоторый корень c из c_n и в дальнейшем с него не снимается. Более того, из рекурсии, которая описывает процедуру R, а также из предположения индукции и замечания 1 можно сделать следующий вывод. Так как существует бесконечное число шагов, при выполнении которых вызываемая процедура R действует на c_n, то также существует бесконечное число шагов, при выполнении которых R действует на c. Таким образом, опять же из замечания 1 следует, что c имеет бесконечную высоту в построенной группе. Положим $c_{n+1} := c$.

Лемма 2 доказана.

Далее, рассмотрим группу $G'' := \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega}$ и ее стандартную конструктивизацию ν''. Пусть $G^\nu := G'^{\nu'} \oplus G''^{\nu''}$.

Из леммы 2 получаем еще одну лемму.

Лемма 3. ν *и* μ — *конструктивизации одной и той же группы* G *вида*

$$G = \bigoplus_{i=0}^{\infty} Z(p^i)^{\omega} \oplus (C(p^{\infty})).$$

Допустим, группа G — $0'$-автоустойчивая. Тогда между группами G^{μ} и G^{ν} существует $0'$-рекурсивный изоморфизм f. Но тогда мы можем $0'$-рекурсивно перечислить множество A следующим образом: на i-м шаге перечисления будем добавлять в A_i метку, стоящую на элементе $f(g) \in G^{\nu}$, где g — элемент полной части G^{μ} порядка p^i. Получаем противоречие с тем, что $A \in \Pi_2^0 \backslash \Sigma_2^0$, так как если множество рекурсивно перечислимо в $0'$, то оно принадлежит классу Σ_2^0. Значит, группа G не является $0'$-автоустойчивой.

Теорема 5 доказана.

Список литературы

1. *Роджерс С.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

2. *Кейслер Г., Чэн Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

3. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

4. *Goncharov S. S.* Isomorphisms and Definable Relations on Computable Models. Urbana, Logic Colloquium, 2005.

5. *Goncharov S. S.* Computability and Computable Models // Mathematical Problems from Applied Logic II / Eds. S. S. G. Dov, M. Gabbay, S. S. Goncharov, M. Zakharyaschev. N. Y., 2007.

6. *Goncharov S. S., Harizanov V., Knight J. F. et al.* Enumeration in Computable Structure Theory // Annals of Pure and Applied Logic. 2005. Vol. 136. No. 3. P. 219–246.

7. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier, 2000.

8. *Курош А. Г.* Теория групп. М.: Наука, 1967.

9. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1977.

10. *Соар Р. И.* Вычислимо перечислимые множества и степени. Казань: Казанское математическое общество, 2002.

Материал поступил в редколлегию 21.04.2009

Адрес автора

ДУШЕНИН Дмитрий Игоревич

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: dmdushenin@rambler.ru