УДК 510.5+510.6+512.563

М. Н. Леонтьева

БУЛЕВЫ АЛГЕБРЫ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ $(1,0,1)$ С ВЫЧИСЛИМЫМИ МНОЖЕСТВОМ АТОМОВ И ИДЕАЛОМ АТОМНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ*

Задача, решаемая в данной работе, является в какой-то степени более общей, чем исследование связи n-вычислимости и разрешимости булевых алгебр элементарной характеристики $(n,0,1)$, которое полностью завершено. В работе рассматриваются вычислимые булевы алгебры элементарной характеристики $(1,0,1)$ с вычислимыми множеством атомов и идеалом атомных элементов. Приводится доказательство того, что такие алгебры имеют сильно вычислимые изоморфные копии. Результат обобщается на случай булевых алгебр элементарной характеристики $(n,0,1)$.

Ключевые слова: булевы алгебры, вычислимое множество, вычислимая модель, сильно вычислимая модель, n-вычислимость, элементарная характеристика булевой алгебры, идеал Ершова–Тарского, идеал Фреше.

§ 1. Предварительные сведения и история вопроса

Модель называется *вычислимой*, если ее носитель — вычислимое множество, операции — вычислимые функции, и отношения вычислимы. Вычислимая булева алгебра называется *n-вычислимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе. *Сильно вычислимая* модель — та, для которой подобный алгоритм существует для всех формул исчисления предикатов. Булева алгебра *разрешима*, если у нее существует сильно вычислимая изоморфная копия. В качестве источника предварительных сведений по теории булевых алгебр будем использовать [3].

На булевых алгебрах стандартным образом определяется порядок: $x \leqslant y \Leftrightarrow x \cdot y = x$, $x < y \Leftrightarrow (x \leqslant y) \,\&\, (x \neq y)$. Пусть $\mathfrak{A}$ — булева алгебра. Ненулевой элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *атомом*, если $\forall b\,(b < a \to b = 0)$. Множество атомов булевой алгебры $\mathfrak{A}$ обозначим $\mathrm{At}(\mathfrak{A})$. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *атомным*, если $\forall x \leqslant a(x \neq 0 \to (\exists y \leqslant x(y \in \mathrm{At}(\mathfrak{A}))))$. Атомные элементы образуют идеал, который мы будем обозначать как $\mathrm{Atm}(\mathfrak{A})$. Элемент $a \in \mathfrak{A}$ называется *безатомным*, если $\forall x \leqslant a\ (x \notin At(\mathfrak{A}))$. Безатомные элементы также образуют идеал, и он обозначается $\mathrm{Als}(\mathfrak{A})$. Через $\mathrm{F}(\mathfrak{A})$ обозначим *идеал Фреше* (суммы конечного числа атомов), $\mathrm{E}(\mathfrak{A}) = \mathrm{Als}(\mathfrak{A}) + \mathrm{Atm}(\mathfrak{A})$ — идеал Ершова–Тарского.

В работе рассматриваются *булевы алгебры элементарной характеристики* $(1,0,1)$, т. е. такие булевы алгебры, что $\mathfrak{A}/\mathrm{E}(\mathfrak{A})$ — ненулевая безатомная булева алгебра. Счетные булевы алгебры иногда для краткости будем называть алгебрами.

*Работа частично поддержана грантом Президента РФ для молодых докторов наук МД-3377.2008.1 и грантом Президента РФ для молодых докторов наук МД-2666.2010.1.

Сильная вычислимость влечет n-вычислимость для любого $n \in \omega$. Исследования свойств сильно вычислимых булевых алгебр было начато в [6], в [4] для каждого n был построен пример n-вычислимой булевой алгебры, у которой нет $(n+1)$-вычислимой изоморфной копии, т. е. из n-вычислимости в классе всех булевых алгебр не следует разрешимость. Но при фиксированной элементарной характеристике булевой алгебры ситуация становится иной.

Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра. В [3] было доказано, что 2-конструктивность такой алгебры эквивалентна вычислимости $\mathrm{Als}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{At}(\mathfrak{A})$.

В [1] доказана следующая

Теорема 1 [1]. *Если $\mathfrak{A}$ — 2-вычислимая булева алгебра элементарной характеристики (1, 0, 1), т. е. вычислимая алгебра, в которой множества $At(\mathfrak{A})$ и $Als(\mathfrak{A})$ вычислимы, то $\mathfrak{A}$ — разрешима.*

В [6] было доказано, что если в некотором представлении вычислимая булева алгебра характеристики (1,0,1) имеет вычислимыми 4 отношения: $\mathrm{At}(\mathfrak{A}), \mathrm{Als}(\mathfrak{A}), \mathrm{Atm}(\mathfrak{A}), \mathrm{E}(\mathfrak{A})$, то это представление будет сильно вычислимым. После чего появился вопрос о том, как можно ослабить эти условия, чтобы булева алгебра характеристики (1, 0, 1) была при этом разрешима.

В [3] построен пример вычислимой атомной булевой алгебры $\mathfrak{A}$, у которой нет разрешимого представления, и тем самым доказано, что без условия на вычислимость множества атомов мы не можем утверждать разрешимость булевой алгебры. В [2] построен пример неразрешимой булевой алгебры, имеющей вычислимое множество атомов. Таким образом, не рассмотренными остались 2 случая:

1) Вычислимы $\mathrm{At}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Atm}(\mathfrak{A})$.

2) Вычислимы $\mathrm{At}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{E}(\mathfrak{A})$.

В данной работе приведено доказательство того, что в первом случае булева алгебра будет разрешима. Этот результат также обобщается естественным образом на случай булевых алгебр элементарной характеристики $(n,\,0,\,1)$. В [7] строится пример, показывающий, что во втором случае разрешимость, вообще говоря, отсутствует.

§ 2. Случай алгебр характеристики (1,0,1) с вычислимыми At и Atm

В работе рассматриваются вычислимые булевы алгебры как модели языка $\Sigma_{BA} = \{0, 1, +, \cdot, -\}$, где «+» соответствует объединению элементов, «$\cdot$» — пересечению и «$-$» означает дополнение. В работе также будут использоваться алгебры Ершова, модели языка $\{0, +, \cdot, -\}$, в котором «$-$» означает разность элементов.

Если L — идеал булевой алгебры $\mathfrak{A}$, то *L-атом* — это такой $x \in \mathfrak{A}$, что x/L — атом в фактор-алгебре $\mathfrak{A}/L$, аналогично определяются L-атомные и L-безатомные элементы. Тот факт, что H является идеалом в $\mathfrak{A}$ будем обозначать как $H \lhd \mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики* $(1, 0, 1)$. *Если вычислимы $At(\mathfrak{B})$ и $Atm(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}'$ — сильно вычислимая булева алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В основе нашего рассуждения будет лежать схема доказательства теоремы 4 из [1].

Напомним, что множество называется Δ^0_n-вычислимым, если оно вычислимо с оракулом $\emptyset^{(n-1)}$, и Σ^0_n-вычислимо, если оно вычислимо перечислимо с оракулом $\emptyset^{(n-1)}$. Множество называется Π^0_n-вычислимым, если его дополнение Σ^0_n-вычислимо. Предварительные сведения по теории вычислимости можно найти в [5].

По условию множества $\mathrm{At}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Atm}(\mathfrak{B})$ вычислимы, следовательно, модель $(\mathfrak{B}, \mathrm{At}(\mathfrak{B}), \mathrm{F}(\mathfrak{B}), \mathrm{Als}(\mathfrak{B}), \mathrm{Atm}(\mathfrak{B}))$ можно рассматривать как Δ^0_2-вычислимую структуру, так как F — Σ^0_1-вычислимый идеал, а Als — Π^0_1-вычислимый идеал.

Лемма 1. (1) *Пусть $\mathfrak{A}$ — Δ^0_2-вычислимая алгебра, $H_0, H, H_1 \lhd \mathfrak{A}$, $H_0 \subseteq H \subseteq H_1$, при этом H_0 Δ^0_2-вычислим, а H лежит в классе Σ^0_2. Предположим, что $(\mathfrak{C}, M)$ — Δ^0_2-вычислимая алгебра с Δ^0_2-вычислимым идеалом, и существует Δ^0_3-вычислимый изоморфизм h из $(\mathfrak{C}, M)$ на $(\mathfrak{A}/H, H_1/H)$. Тогда $(\mathfrak{A}, H_0, H, H_1) \cong (\mathfrak{B}, L_0, L, L_1)$, где последняя модель — Δ^0_2-вычислимая алгебра с Δ^0_2-вычислимыми идеалами;*

(2) *при этом можно считать, что между моделями (H, H_0) и (L, L_0), рассматриваемыми как алгебры Ершова с выделенным идеалом, существует Δ^0_2-вычислимый изоморфизм.*

Утверждение данной леммы получается с помощью стандартного приема релятивизации предложения 1 из [1] относительно оракула $\emptyset'$.

Применим лемму 1 к нашим объектам.

Возьмем $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $H_0 = \{0\}$, $H = \mathrm{E}(\mathfrak{A})$, $H_1 = \mathfrak{A}$. Тогда H_0 — вычислимый идеал, H — Σ^0_2-идеал, так как $x \in \mathrm{E} \Leftrightarrow \exists x_1, x_2[(x_1 \in \mathrm{Als}, x_2 \in \mathrm{Atm})\&(x = x_1 + x_2)]$. Значит, $\mathfrak{A}/H$ — Δ^0_3-вычислимая безатомная алгебра.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — Δ^0_3-вычислимая безатомная булева алгебра. Тогда существует Δ^0_3-вычислимый изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и вычислимой безатомной алгеброй.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы является следствием теоремы 3.6.3 из [3], которая говорит о том, что безатомная булева алгебра (как и любая булева алгебра с конечным числом атомов) является автоустойчивой (вычислимо категоричной).

В частности, это означает, что между любыми двумя вычислимыми представлениями безатомной булевой алгебры существует вычислимый изоморфизм. В силу релятивизации этой теоремы относительно оракула $\emptyset''$ существует Δ^0_3-вычислимый изоморфизм между $\mathfrak{A}$ и вычислимой безатомной алгеброй. Лемма доказана.

По этой лемме существует Δ^0_3-вычислимый изоморфизм между $\mathfrak{A}/H$ и вычислимой безатомной алгеброй $\mathfrak{C}$. Положим $M = \mathrm{E}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{C}$. В силу леммы 1 $(\mathfrak{B}, \mathrm{E}(\mathfrak{B})) \cong$ $\cong (\mathfrak{B}', \mathrm{E}(\mathfrak{B}'))$, где $\mathfrak{B}'$ и $\mathrm{E}(\mathfrak{B}')$ Δ^0_2-вычислимы.

Из пункта (2) леммы 1 также следует, что между алгебрами Ершова $\mathrm{E}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{E}(\mathfrak{B}')$ существует Δ^0_2-вычислимый изоморфизм. Поскольку предикаты F, Als, Atm, At являются подмножествами E , сохраняются при этом изоморфизме и являются Δ^0_2-вычислимыми в $\mathfrak{B}$, они будут Δ^0_2-вычислимыми и в $\mathfrak{B}'$ (их характеристические функции будут композицией характеристических функций в $\mathfrak{B}$ и изоморфизма). Тем самым $(\mathfrak{B}', \mathrm{E}(\mathfrak{B}'), \mathrm{F}(\mathfrak{B}'), \mathrm{Als}(\mathfrak{B}'), \mathrm{Atm}(\mathfrak{B}'), \mathrm{At}(\mathfrak{B}'))$ — Δ^0_2-вычислимая структура.

Для формулировки следующей теоремы необходимо ввести ряд обозначений.

Пусть $\mathrm{E}_0(\mathfrak{A}) = \{0\}$, $\mathrm{E}_{n+1}(\mathfrak{A}) = \{x \in A \mid x/\mathrm{E}_n \in \mathrm{E}(\mathfrak{A}/\mathrm{E}_n)\}$ для $n \in \omega$, $\mathrm{Als}_n(\mathfrak{A})$ — идеал E_n-безатомных элементов, $\mathrm{Atm}_n(\mathfrak{A})$ — идеал E_n-атомных элементов, $\mathrm{At}_n(\mathfrak{A})$ — множество E_n-атомов, $F_n(\mathfrak{A})$ — идеал, образованный конечными суммами E_n-атомов и элементов E_n. Ясно, что $\mathrm{Als}_0(\mathfrak{A}) = \mathrm{Als}(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Atm}_0(\mathfrak{A}) = \mathrm{Atm}(\mathfrak{A})$.

Пусть $\Sigma_0 = \{\mathrm{E}_0\}$, $\Sigma_\lambda = \Sigma_0 \cup \{\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{At}_{\lambda-1}, \mathrm{Als}_{\lambda-1}, \mathrm{Atm}_{\lambda-1}, \mathrm{E}_\lambda\}$, $\Sigma^*_\lambda = \Sigma_\lambda \cup \{F_0, F_1, \ldots, F_{\lambda-1}\}$ для $\lambda \geqslant 1$. Если $\mathfrak{A}$ — булева алгебра (т. е. модель языка Σ_{BA}), то через $\mathfrak{A}^{\Sigma_\lambda}$ будем обозначать такое обогащение $\mathfrak{A}$ до $\Sigma_{BA} \cup \Sigma_\lambda$, в котором все символы из Σ_λ интерпретируются в соответствии со своими определениями. То же самое относится к обозначению $\mathfrak{A}^{\Sigma^*_\lambda}$.

Теорема 3 [1]. *Пусть $\lambda \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{C}$ — булева алгебра, причем $\mathfrak{C}/E_\lambda$ — либо двухэлементная, либо ненулевая безатомная. Модель $\mathfrak{C}^{\Sigma_\lambda}$ обладает вычислимым представлением тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}^{\Sigma^*_\lambda}$ обладает Δ^0_2-вычислимым представлением.*

В силу того, что $(\mathfrak{B}')^{\Sigma_1} = (\mathfrak{B}', \mathrm{E}(\mathfrak{B}'), \mathrm{Als}(\mathfrak{B}'), \mathrm{Atm}(\mathfrak{B}'), \mathrm{At}(\mathfrak{B}'))$, а $(\mathfrak{B}')^{\Sigma^*_1} = (\mathfrak{B}', \mathrm{E}(\mathfrak{B}'), F(\mathfrak{B}'), \mathrm{Als}(\mathfrak{B}'), \mathrm{Atm}(\mathfrak{B}'), \mathrm{At}(\mathfrak{B}'))$, по теореме 3 получаем, что модель $(\mathfrak{B}, \mathrm{E}(\mathfrak{B}), \mathrm{Als}(\mathfrak{B}), \mathrm{Atm}(\mathfrak{B}), \mathrm{At}(\mathfrak{B}))$ обладает вычислимым представлением. В [6] доказано, что вычислимость всех предикатов из Σ_λ в вычислимой булевой алгебре характеристики $(\lambda,0,1)$ влечет ее сильную вычислимость. Следовательно, $\mathfrak{B}$ разрешима.

Теорема 2 доказана.

§ 3. Случай булевых алгебр характеристики $(n, 0, 1)$

Теперь сформулируем обобщение теоремы 2 для случая булевых алгебр характеристики $(n,\ 0,\ 1)$.

Теорема 4. *Пусть $\lambda \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра элементарной характеристики $(\lambda + 1,\ 0,\ 1)$. Если $\mathfrak{B}$ является $(4\lambda + 1)$-вычислимой и при этом вычислим идеал $\mathrm{Atm}_\lambda(\mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}$ изоморфна $\mathfrak{B}'$, где $\mathfrak{B}'$ — сильно вычислимая булева алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В [3] доказано, что вычислимая булева алгебра является $(4\lambda + 1)$-вычислимой тогда и только тогда, когда все предикаты из $\Sigma_\lambda \cup \{\mathrm{At}_\lambda\}$ вычислимы. В данных условиях $(\mathfrak{B}^{\Sigma^*_\lambda}, \mathrm{At}_\lambda(\mathfrak{B}), \mathrm{F}_\lambda(\mathfrak{B}), \mathrm{Als}_\lambda(\mathfrak{B}), \mathrm{Atm}_\lambda(\mathfrak{B}))$ можно рассматривать как Δ^0_2-вычислимую булеву алгебру, так как F_n — Σ^0_1-идеал для всех $n \in [0, \lambda]$, а Als_λ — Π^0_1-идеал.

$\mathrm{At}_\lambda(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{Atm}_\lambda(\mathfrak{B})$ вычислимы по условию теоремы.

Применим лемму 1, возьмем $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, $H_0 = \{0\}$, $H = \mathrm{Als}_\lambda(\mathfrak{B}) + \mathrm{Atm}_\lambda(\mathfrak{B}) = \mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B})$, $H_1 = \mathfrak{A}$. Тогда H_0 — вычислимый идеал, а H — Σ^0_2-идеал.

Вновь $\mathfrak{A}/H$ — Δ^0_3-вычислимая безатомная алгебра, так как H — Δ^0_3-вычислимый идеал. По лемме 2 существует Δ^0_3-вычислимый изоморфизм между $\mathfrak{A}/H$ и вычислимой безатомной алгеброй $\mathfrak{C}$. В силу леммы 1 имеем $(\mathfrak{B}, \mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B})) \cong (\mathfrak{B}', \mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B}'))$, где $\mathfrak{B}'$ и $\mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B}')$ — Δ^0_2-вычислимы.

Из пункта (2) леммы 1 следует, что между алгебрами Ершова $\mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{E}_{\lambda+1}(\mathfrak{B}')$ существует Δ^0_2-вычислимый изоморфизм. Поскольку предикаты из $\Sigma^*_{\lambda+1}$ являются подмножествами $\mathrm{E}_{\lambda+1}$, сохраняются при этом изоморфизме и являются Δ^0_2-вычислимыми в $\mathfrak{B}$, они будут Δ^0_2-вычислимыми и в $\mathfrak{B}'$. Тем самым $(\mathfrak{B}')^{\Sigma^*_{\lambda+1}}$ – Δ^0_2-вычислимая алгебра. По теореме 3 получаем, что $\mathfrak{B}^{\Sigma_{\lambda+1}}$ обладает вычислимым представлением, а значит, $\mathfrak{B}$ — разрешима.

Теорема 4 доказана.

Автор бесконечно признателен д-ру физ.-мат. наук П. Е. Алаеву за чуткое научное руководство, постановку задачи и поддержку в ходе ее решения.

Список литературы

1. *Алаев П. Е.* Сильно конструктивные булевы алгебры // Алгебра и логика. 2005. Т. 7, № 1. С. 3–23.

2. *Власов В. Н.* Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики $(1,0,1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 499–521.

3. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга (НИИ МИОО НГУ), 1996.

4. *Гончаров С. С.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 797–812.

5. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

6. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.

7. *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики $(1,0,1)$ с вычислимыми множеством атомов и идеалом Ершова–Тарского // Алгебра и логика. 2010. (в печати).

Материал поступил в редколлегию 26.06.2009

Адрес автора

ЛЕОНТЬЕВА Маргарита Николаевна

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: Margarita.Leontyeva@gmail.com