УДК 510.5 + 510.6 + 512.563

Р. Р. Тухбатуллина

АВТОУСТОЙЧИВОСТЬ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ B_ω, ОБОГАЩЕННОЙ АВТОМОРФИЗМОМ*

Работа посвящена исследованию автоустойчивости булевой алгебры $\mathfrak{B}_\omega$, обогащенной автоморфизмом. Получены примеры автоустойчивой $(\mathfrak{B}_\omega, \phi)$ и разобраны некоторые случаи неавтоустойчивости. Для доказательства неавтоустойчивости использованы теоремы о неограниченных моделях и о ветвлении.

Ключевые слова: автоустойчивость, булева алгебра, обогащенная автоморфизмом, ветвящаяся модель, неограниченная модель.

Введение

Данная работа посвящена исследованию автоустойчивости булевой алгебры $\mathfrak{B}_\omega$, обогащенной автоморфизмом. Проблема автоустойчивости является центральной при исследовании строения конструктивизируемых моделей. Ранее независимо в [1] и [2] было получено описание автоустойчивых булевых алгебр (алгебра является автоустойчивой тогда и только тогда, когда число ее атомов конечно).

Возникло предложение исследовать на автоустойчивость естественные обогащения булевой алгебры. Так, в [3] было получено описание автоустойчивых булевых алгебр с выделенным идеалом. Позже, в [4] было получено описание автоустойчивых булевых алгебр с конечным числом выделенных идеалов.

В данной работе используются теорема о ветвлении, приведенная в [1] и обобщенная в [4], а также теорема о неограниченных моделях, полученная в [5].

Из описания автоустойчивых булевых алгебр, в частности, следует, что алгебра $\mathfrak{B}_\omega$ является неавтоустойчивой. При обогащении автоморфизмом автоустойчивость начинает зависеть от его действия. В работе получено неполное описание автоустойчивости $\mathfrak{B}_\omega$, обогащенной автоморфизмом.

§ 1. Основные понятия

Напомним некоторые важные определения, используемые в работе.

Пусть $\mathfrak{A} = (A, P_0, \ldots, P_n, f_0, \ldots, f_m, c_o, \ldots, c_p)$. *Конструктивизацией* структуры $\mathfrak{A}$ называется $\nu : M \to A$(на), где

- $M \subseteq \omega$ вычислимо, ν разрешимая нумерация;
- $\forall i \leqslant n \,\{\, (x_1, \ldots, x_{k_i}) \mid P_i(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{k_i})) \,\}$ вычислимо;

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429), гранта Президента РФ для ведущих научных школ НШ-335.2008.1 и РФФИ (проект № 09-01-12140-офи-м).

- $\forall j \leqslant m\, \exists g_i$ — ч.в.ф.: $f_j(\nu(x_1), \ldots, \nu(x_{s_i})) = \nu(g_i(x_1, \ldots, x_{s_j}))$.

Пусть ν, μ — нумерации одной и той же системы $\mathfrak{M}$. Назовем конструктивизации ν, μ *рекурсивно эквивалентными*, если существуют рекурсивные функции f и g такие, что $\nu = \mu f$ и $\mu = \nu g$. Конструктивизации ν и μ системы $\mathfrak{M}$ называются *автоэквивалентными*, если существует автоморфизм φ системы $\mathfrak{M}$ такой, что $\varphi\nu$ и μ рекурсивно эквивалентны. Система $\mathfrak{M}$ называется *автоустойчивой*, если любые ее две конструктивизации автоэквивалентны.

Также понадобится обобщенное определение ветвящейся модели, введенной в [4]. Пусть L — конечный предикатный язык, A — бесконечная вычислимая модель языка L, $\{A_p\}_{p\in\omega}$ — вычислимая последовательность конечных моделей L такая, что $A_p \leqslant A_{p+1}$, $A = \bigcup_{p\in\omega} A_p$. $\{\psi_p(\overline{x}_p)\}_{p\in\omega}$ — вычислимая последовательность $\forall$-формул языка L. Говорят, что система $\{A_p, \psi_p(\overline{x}_p)\}_{p\in\omega}$ *ветвится на уровне* p, если

(1) $\{\overline{b} \mid A \models \psi_p(\overline{b})\} \neq \varnothing$;

(2) если $\{\overline{b}\}_{i\in I}$ некоторое $1-1$ перечисление множества $\{\overline{b} \mid A \models \psi_p(\overline{b})\}$, где I — начальный сегмент в ω, $\{\overline{a}\}_{i\in I}$ — последовательность наборов из A, для которой $A \models \psi_p(\overline{a}_n)$ и $(A, \overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n) \equiv_1 (A, \overline{b}_0, \ldots, \overline{b}_n)$ при всех $n \in I$, то существует $n \in I$ со следующим свойством:

- найдется бесконечно много чисел $t \geqslant p$, для которых $\overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_n \in A_t$ и существует изоморфное вложение $\beta : A_t \to A_{t+1}$ такое, что $A_{t+1} \models \neg\psi_p(\beta(\overline{a}_n))$ и β тождественно на $A_p, \overline{a}_0, \ldots, \overline{a}_{n-1}$.

Теорема (о ветвлении) [4]. *Если система $\{A_p, \psi_p(\overline{x}_p)\}_{p\in\omega}$ ветвится на всех уровнях $p \in \omega$, то A неавтоустойчива.*

Пусть $\langle \mathfrak{M}, \nu\rangle$ — нумерованная модель сигнатуры σ; σ_n — вычислимая последовательность конечных сигнатур, таких что $\bigcup \sigma_n = \sigma$; $\sigma_n \leqslant \sigma_{n+1}$ $\forall n$. Пара $\langle \{\mathfrak{M}_n \mid n \in N\}, f \rangle$ называется *представлением нумерованной модели* $\langle \mathfrak{M}, \nu\rangle$, если

(1) f рекурсивна;

(2) $\{\mathfrak{M}_n \mid n \in N\}$ строго вычислимая последовательность конечных моделей сигнатуры σ_n, таких что

- $\mathfrak{M}_n \leqslant \mathfrak{M}_{n+1} \restriction \sigma_n$ $\nu f : \mathfrak{M}_n \to \mathfrak{M}$ — изоморфное вложение;
- $\bigcup |\mathfrak{M}_n|$ — рекурсивное множество;
- $\nu f(\bigcup |\mathfrak{M}_n|) = |\mathfrak{M}|$ [7].

Зафиксируем модель $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ и положим $\sigma' \leftrightharpoons \sigma \cup \{P_0^{n_0}, \ldots, P_k^{n_k}, \ldots\}$. Рассмотрим вычислимую последовательность φ_i, $i \in \mathbb{N}$, $\forall$-формул сигнатуры σ и вычислимую последовательность ψ_i, $i \in \mathbb{N}$, $\exists$-формул сигнатуры σ. Обогащение $\mathfrak{M}'$ модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ' называется *несущественным*, если $\mathfrak{M}' \models (\forall x_1, \ldots, x_{n_i})\big((\varphi_i \leftrightarrow P_i) \,\&\, (\psi_i \leftrightarrow \neg P_i)\big)$ для любого $i \in \mathbb{N}$.

Конструктивизируемая модель $\mathfrak{A}$ называется *неограниченной*, если существуют ее конструктивизация ν, представление $\Pi_\nu = \langle (\mathfrak{A}_t^\nu \mid t \in \mathbb{N}), f^\nu \rangle$, рекурсивная функция h и вычислимое множество бескванторных формул $\Psi = \{\psi_{i,j} \mid i, j \in \mathbb{N}\}$ такие, что для любого $t_0 \in \mathbb{N}$ и любой монотонно возрастающей неограниченной рекурсивной функции g существуют $t \geqslant t_0$ и изоморфное вложение $\tau : \mathfrak{A}_t^\nu \to \mathfrak{A}_{t+1}^\nu$ такие, что $\tau \restriction \mathfrak{A}_{t_0}^\nu = id_{\mathfrak{A}_{t_0}^\nu}$

и для некоторых $i \leqslant h(t)$ и $n_1, \ldots, n_k \leqslant g(t)$ выполнено $\mathfrak{A}^{\gamma}_{t+1} \models \bigwedge\limits_{j=0}^{t+1} \psi_{i,j}(n_1, \ldots, n_k)$, но $\mathfrak{A}^{\gamma}_{t+1} \models \neg \bigwedge\limits_{j=0}^{t+1} \psi_{i,j}(\tau(n_1), \ldots, \tau(n_k))$. В этом случае будем говорить, что модель $\mathfrak{A}$ *неограничена относительно* Ψ и представление Π_{ν} *неограниченно относительно* Ψ *и* h.

Теорема (о неограниченной модели) [5]. *Если модель $\mathfrak{A}$ неограничена относительно Ψ, то по любому вычислимому классу S конструктивных моделей сигнатуры модели $\mathfrak{A}$ эффективно строится конструктивизация μ модели $\mathfrak{A}$ такая, что $(\mathfrak{A}, \mu)$ не вкладывается изоморфно относительно Ψ ни в одну модель из класса S.*

С основами теории булевых алгебр можно познакомиться в [6] и [7].

§ 2. Описание автоустойчивости $(\mathfrak{B}_{\omega}, \varphi)$

Лемма 1. *Для булевой алгебры $\mathfrak{B}_{\omega}$ автоморфизм однозначно описывается своим действием на атомах.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что любое отображение φ множества атомов в себя достраивается до автоморфизма $\mathfrak{B}_{\omega}$. Рассмотрим некоторый элемент $x \in \mathfrak{B}$. Возможны два случая.

(1) $x = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, где p_i атомы $\mathfrak{B}_{\omega}$. Тогда положим $\varphi(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(p_i)$.

(2) $\omega \backslash x = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, где p_i атомы $\mathfrak{B}_{\omega}$. Тогда положим $\varphi(x) = \omega \backslash \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi(p_i)$.

Покажем, что доопределенное таким образом φ является автоморфизмом. Для этого нужно проверить, что φ сохраняет все операции булевой алгебры.

(1) Рассмотрим операцию дополнения. Если $x = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, то $\varphi(\omega \backslash x) = \omega \backslash \sum\limits_{i=1}^{n} = p_i = \omega \backslash \varphi(x)$. Случай конечного x доказывается аналогично.

(2) Рассмотрим бинарную операцию объединения (случай пересечения рассматривается аналогично).

Пусть $a = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i$, $b = \sum\limits_{j=1}^{k} q_j$, где p_i, q_j — атомы $\mathfrak{B}_{\omega}$. Тогда, $(a \cup b) = \sum\limits_{i=1}^{n+k} r_i$, где $r_i = p_i$ при $i \in \{1 \ldots n\}$ и $r_i = q_{i-n}$ при $i \in \{n+1 \ldots n+k\}$ и верна следующая цепочка равенств:

$$\varphi(a \cup b) = \varphi(\sum_{i=1}^{n+k} r_i) = \sum_{i=1}^{n+k} \varphi(r_i) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(p_i) + \sum_{j=1}^{k} \varphi(q_i) = \varphi(a) \cup \varphi(b).$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично.

Будем говорить, что атомы a, b *попадают в один цикл*, если

$$\exists n((\varphi^n(a) = b) \vee (\varphi^n(b) = a)).$$

Тогда все атомы $\mathfrak{B}_{\omega}$ разбиваются на циклы. Назовем *длиной цикла* наименьшее число t, такое что $\varphi^t(a) = a$, где a — произвольный элемент цикла. Если такого t нет, то цикл назовем *бесконечным*. *Порядком* элемента $a \in \mathfrak{B}_\omega$ назовем наименьшее число t, такое что $\varphi^t(a) = a$.

Лемма 2. *Пусть $a_1, \ldots, a_n$ атомы $\mathfrak{B}_\omega$, имеющие порядки $k_1, \ldots, k_n$ соответственно. Тогда $a_1 \cup \ldots \cup a_n$ имеет порядок НОК$(k_1, \ldots, k_n)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что $\varphi^{\text{НОК}(k_1,\ldots,k_n)}(a_1\cup\ldots\cup a_n) = a_1\cup\ldots\cup a_n$. Пусть n — порядок $a_1 \cup \ldots \cup a_n$. Предположим, что $n < \text{НОК}(k_1, \ldots, k_n)$. Тогда $\text{НОК}(k_1, \ldots, k_n) = m * n + r$, $0 < r < n$ и

$$a_1 \cup \ldots \cup a_n = \varphi^{НОК(k_1,\ldots,k_n)}(a_1 \cup \ldots \cup a_n) = \varphi^{m*n+r}(a_1 \cup \ldots \cup a_n) = \\ = \varphi^r(\varphi^{m*n}(a_1 \cup \ldots \cup a_n)) = \varphi^r(a_1 \cup \ldots \cup a_n),$$

противоречие. Значит, наше предположение неверно и $n = \text{НОК}(k_1, \ldots, k_n)$.

Будем отдельно рассматривать следующие случаи возможного действия автоморфизма на атомах.

(1) Число бесконечных и конечных циклов на атомах конечно.
(2) Число бесконечных циклов на атомах бесконечно.
(3) Все циклы на атомах конечны и существует бесконечно много циклов одинаковой длины.
(4) Все циклы на атомах конечны, и существует натуральное число, что имеется бесконечно много циклов, длина которых есть степень этого числа.
(5) Длины циклов являются различными простыми числами.

§ 2.1. *Автоустойчивость* $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ *при конечном числе циклов на атомах*

Лемма 3. *Пусть число бесконечных и конечных циклов на атомах конечно. Тогда множество атомов является рекурсивным.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как число циклов на атомах конечно, то можно взять по элементу p_i из каждого цикла. Положим $A_0 = \{p_1, \ldots, p_k\}$, тогда множество атомов определяется следующим образом:

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n, \quad \text{где} \quad A_{n+1} = A_n \cup \bigcup_{i=1}^{k} (\varphi^{n+1}(p_i) \cup \varphi^{-(n+1)}(p_i)).$$

Поскольку в вычислимой булевой алгебре вычислимость множества атомов равносильна его вычислимой перечислимости, то утверждение доказано.

Теорема 1. *Пусть число бесконечных и конечных циклов на атомах конечно. Тогда $\{\mathfrak{B}_\omega, \varphi\}$ автоустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим два вычислимых представления $(\mathfrak{B}_1, \varphi_1), (\mathfrak{B}_2, \varphi_2)$ данной булевой алгебры. Между ними существует некоторый изоморфизм f. Так как число циклов на атомах конечно, то можно взять конечное число атомов $\{\mathfrak{B}_1, \varphi_1\}$: $a_1, \ldots, a_k$. Тогда $b_1 = f(a_1), \ldots, b_k = f(a_k)$ — атомы алгебры $\{\mathfrak{B}_2, \varphi_2\}$. Рекурсивный изоморфизм определим следующим образом: $\psi(a_i) = b_i \, \forall i \in \{1, \ldots, k\}$, так как множество атомов рекурсивно, то ψ однозначно продолжается на множество атомов и однозначно продолжается до вычислимого изоформизма между $(\mathfrak{B}_1, \varphi_1)$ и $(\mathfrak{B}_2, \varphi_2)$.

§ 2.2. *Неавтоустойчивость* $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ *при бесконечном числе бесконечных циклов на атомах*

Теорема 2. *Пусть число бесконечных циклов бесконечно, тогда* $\{\mathfrak{B}_\omega, \varphi\}$ *неавтоустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть булева алгебра $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ такая, что существует бесконечное число бесконечных циклов. Рассмотрим обогащение исходной сигнатуры $\sigma = (\cup, \cap, \setminus, P_1^2, 0, 1)$, где $P_1(x, y) \leftrightharpoons (\varphi(x) = y) \vee (\varphi(y) = x)$ с помощью следующих предикатных символов $P_n(x, y) \leftrightharpoons (\varphi^n(x) = y) \vee (\varphi^n(y) = x)$; $\sigma' = \sigma \cup \{P_2^2, \ldots, P_k^2, \ldots\}$. Заметим, что данное обогащение будет несущественным, благодаря бескванторности добавленных предикатов.

Построим представление $\mathfrak{B}_\omega$. Положим $\mathfrak{A}_0 = \{0, 1\}, \sigma_0 = \sigma$. Пусть $\mathfrak{A}_i, \sigma_i$ построена. Пусть $b_0, \ldots, b_n$ — все атомы $\mathfrak{A}_i$. Рассмотрим наименьший в $\mathbb{N}$ элемент $a \in \mathfrak{B}_\omega$, такой что $a \notin \mathfrak{A}_i$ и что существует наименьший в $\mathbb{N}$ атом $b_j \in \mathfrak{A}_i : (b_j \,\&\, a \neq 0)$. Тогда определим $\mathfrak{A}_{i+1} = \mathrm{gr}((\varphi^{-4*|\mathfrak{A}_i|}(b_0), \ldots, b_0, \ldots, \varphi^{4*|\mathfrak{A}_i|}(b_0)), \ldots, (\varphi^{-4*|\mathfrak{A}_i|}(b_n), \ldots, b_n, \ldots, \varphi^{4*|\mathfrak{A}_i|}(b_n)), a)$.

Найдем конечную подалгебру $\mathfrak{A}' : \mathfrak{A}_{i+1} \subseteq \mathfrak{A}' \subset \mathfrak{B}_\omega$, такую что существует x_{r_1} — атом в $\mathfrak{A}'$ такой, что для любого a — атома $\mathfrak{A}_i$ верно одно из условий:

(1) a не атом.

(2) a лежит в конечном φ-цикле.

(3) В цепи φ-образований a найдется $4|\mathfrak{A}_i|$ последовательных атомов, отстоящих от a на расстояние не менее $|\mathfrak{A}_i|$ (т. е. в данной цепи между a и первым элементом последовательности находится не менее $|\mathfrak{A}_i|$ элементов), лежащих под x_{r_1}.

Переопределим $\mathfrak{A}_{i+1} = \mathfrak{A}'$ и положим $\sigma_{i+1} = \sigma \cup \{P_2^2, \ldots, P^2_{|\mathfrak{A}_{i+1}|}\}$. Заметим, что в таком случае $\sigma_i \subseteq \sigma_{i+1}$, $\sigma' = \bigcup\limits_{i \geqslant 0} \sigma_i$.

Элементы a, b назовем *связанными на шаге* t, если в $\mathfrak{A}_t$ лежит либо цепочка $a, \varphi(a), \varphi^2(a), \ldots, \varphi^n(a) = b$, либо $b, \varphi(b), \varphi^2(b), \ldots, \varphi^n(b) = a$.

Покажем, что $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ неограничена относительно формулы $\Psi = \,\&\, \psi_n(x, y)$, где $\psi_n(x, y) \rightleftharpoons (\varphi^n(x) \neq y) \,\&\, (\varphi^n(y) \neq x)$. Зафиксируем некоторую неограниченную монотонно возрастающую функцию g.

Пусть фиксировано некоторое t_0; $c_0, \ldots, c_s$ — все атомы $\mathfrak{A}_{t_0}$. Существует атом $\mathfrak{A}_{t_0}$, под которым в $\mathfrak{B}_\omega$ лежит бесконечное число атомов. Без ограничения общности считаем, что это c_0. Так как число циклов бесконечно, то на каком-то шаге $\widetilde{t}$ появятся два атома основной алгебры a, b, лежащие под c_0 в разных циклах и не связанные с элементами алгебры $\mathfrak{A}_{t_0}$. Так как функция $g(t)$ монотонно неограниченно возрастает, то найдется $t \geqslant \widetilde{t}$, такой что $a, b \leqslant g(t)$. Пусть в $\mathfrak{A}_t$ лежат элементы $\varphi^{-n_0}(a), \ldots, a, \ldots, \varphi^{n_1}(a)$ и $\varphi^{-m_0}(b), \ldots, b, \ldots, \varphi^{m_1}(b)$, причем a, b такие, что все они лежат под c_0.

Пусть $x_1, \ldots, x_r$ – все атомы $\mathfrak{A}_t$. По построению, в $\mathfrak{A}_{t+1}$ попадают следующие элементы: $\varphi^{-n_0-4|\mathfrak{A}_t|-k_1}(a), \ldots, a, \ldots, \varphi^{n_1+4|\mathfrak{A}_t|+k_2}(a)$, такие что существуют $4\,|\mathfrak{A}_t|$, идущих подряд элементов $\varphi^{k_0}(a), \ldots, \varphi^{k_0+4|\mathfrak{A}_t|}(a)$, которые лежат под атомом x_{r_1}.

Тогда определим изоморфное вложение β на атомах $\mathfrak{A}_t$ следующим образом: пусть c — атом $\mathfrak{A}_t$, тогда

- если c связан с b: $c = \varphi^k(b)$, $k \in \{-m_0, \ldots, 0, \ldots, m_1\}$, то $\beta(c) = \varphi^{k+k_0+m_0}(a)$;

- если c не связан с b и $c \neq x_{r_1}$, то $\beta(c) = c$;
- если $c = x_{r_1}$, то $\beta(c)$ — объединение всех атомов $\mathfrak{A}_{t+1}$, не лежащих под уже определенными образами.

Непосредственно из вида β следует, что непересекающиеся элементы перешли в непересекающиеся и разбиение 1 A_t перешло в разбиение 1 A_{t+1}.

Заметим, что по построению $\mathfrak{A}_{t+1} \models \&_{j=0}^{h(t+1)} \psi_j(a,b)$, но $\mathfrak{A}_{t+1} \models \neg \&_{j=0}^{h(t+1)} \psi_j(\beta(a),\beta(b))$, где $h(t+1) = |\mathfrak{A}_{t+1}|$, т. е. $\mathfrak{B}_\omega$ неограничена относительно Ψ, а значит, по теореме о неограниченной модели [5] $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ неавтоустойчива.

§ 2.3. *Описание автоустойчивости* $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ *при бесконечном числе конечных циклов на атомах*

Лемма 4. *Пусть все циклы на атомах конечны, тогда существует вычислимая последовательность* $\{\mathfrak{A}_i\}$ *конечных подалгебр* $\mathfrak{B}_\omega$ *таких, что* $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i = \mathfrak{B}_\omega, \mathfrak{A}_i \subseteq \mathfrak{A}_{i+1}$ *и* $\mathfrak{A}_i = \overline{\mathfrak{A}_i}^{\,\varphi}$, *где* $\overline{\mathfrak{A}_i}^{\,\varphi}$ *— замыкание булевой алгебры относительно автоморфизма* φ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим $\mathfrak{A}_0 = \{0, 1\}$. Пусть $\mathfrak{A}_i$ построена. Рассмотрим наименьший в $\mathbb{N}$ элемент $a \in \mathfrak{B}_\omega$, такой что $a \notin \mathfrak{A}_i$ и что существует наименьший в $\mathbb{N}$ атом $b \in \mathfrak{A}_i : (b \,\&\, a \neq 0)$. Пусть $\mathfrak{A}_{i+1} = \overline{\mathrm{gr}(\mathfrak{A}_i \cup \{b \,\&\, a\})}^{\,\varphi}$.

Покажем, что $\mathfrak{A}_{i+1}$ конечна. Очевидно, что $\mathrm{gr}(\mathfrak{A}_i \cup \{b \,\&\, a\})$ конечна. Другими словами, надо показать, что замыкание булевой алгебры относительно автоморфизма конечности не портит.

Пусть $a_0, \ldots, a_{n+1}$ — атомы $\mathrm{gr}(\mathfrak{A}_i \cup \{b \,\&\, a\})$, такие что $a_i = \bigcup_{j=1}^{k_i} b_{ij} \,\forall\, i = 1, \ldots, n$, где b_{ij} — атомы $\mathfrak{B}_\omega$, а a_{n+1} — бесконечный элемент $\mathfrak{B}_\omega$.

$$\overline{\mathrm{gr}(\mathfrak{A}_i \cup \{b \,\&\, a\})}^{\,\varphi} \subseteq \mathrm{gr}\Big(\bigcup_{i=1,j=1}^{i=n,j=k_i} (\{b_{ij}\} \cup \{\varphi(b_{ij})\} \cup \ldots \cup \{\varphi^{m_{ij}}(b_{ij})\}) \cup c \Big) \text{ — конечно,}$$

где m_{ij} — порядок b_{ij}, а

$$c = 1 \setminus \bigcup_{i=1,j=1}^{i=n,j=k_i} \big(\{b_{ij}\} \cup \{\varphi(b_{ij})\} \cup \ldots \cup \{\varphi^{m_{ij}}(b_{ij})\}\big).$$

§ 2.3.1. *Неавтоустойчивость* $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ *при бесконечном числе конечных циклов одинаковой длины на атомах*

Лемма 5. *Пусть все циклы на атомах конечны, и существует бесконечно много циклов одинаковой длины* r, *тогда* $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ *неавтоустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теоремой о ветвлении [4]. Покажем, что представление, построенное в лемме 4, ветвится относительно формулы $\psi(x) \leftrightharpoons \forall\, y(y < x \to y = 0) \,\&\, (x \neq 0) \,\&\, (\varphi^{r+1}(x) = x) \,\&\, (\varphi^j(x) \neq x, j \leqslant r)$.

Рассмотрим $A_t, a_n \in A_t$ — атом $\mathfrak{B}_\omega$, тогда a_n — атом в A_t. Пусть $A_t \subset A_{t+1}$, тогда какой-то атом A_t не является атомом в A_{t+1}.

Пусть p фиксировано. $\overline{c} := (c_0, \ldots, c_s)$ — все атомы A_p. Изоморфное вложение β должно быть тождественно на $c_0, \ldots, c_s$. Так как A_p конечно, то существует атом, под которым в $\mathfrak{A}$ лежит бесконечное число атомов. Без ограничения общности будем считать, что это c_0.

Существует наименьшее $n \in \omega$, такое что $a_n \leqslant c_0$ порядка r, $\widehat{c}_0$ — бесконечная алгебра. Существует бесконечно много t, таких что $A_t \cap \widehat{c}_0 \subset A_{t+1} \cap \widehat{c}_0$, и что существует $x_l \leqslant c_0$, являющийся атомом в A_t порядка 1 и не являющийся атомом в A_{t+1}, такой что существует $y \in A_{t+1} \backslash \{0\}$ порядка r, $y, \varphi(y), \ldots, \varphi^r(y) z | x_l$, $z = x_l \backslash (y \cup \ldots \cup \varphi^r(y))$. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — атомы A_t.

Изоморфное вложение β зададим на атомах A_t. Пусть x — атом A_t.

- Если $x \leqslant c_j$, $j \geqslant 1$ $\beta(x) = x$.
- $x = \varphi^j(a_n) \Rightarrow \beta(x) = \varphi^j(a_n) + \varphi^j(y)$, $j = 1 \ldots r$.
- $x = x_l \Rightarrow \beta(x) = z$.
- $\beta(x) = x$, иначе.

Покажем, что β — изоморфное вложение. Для этого достаточно показать, что разбиение 1 A_t перешло в разбиение 1 A_{t+1}. Действительно, $1 = \bigcup\limits_{i=1}^{n} x_i$,

$$\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{n} \beta(x_i) &= \bigcup_{x \nleqslant c_0} \beta(x) \cup \bigcup_{\substack{x \leqslant c_0 \\ x \neq x_l \\ x \neq \varphi^j(a_n)}} \beta(x) \cup \bigcup_{x = x_l} \beta(x) \cup \bigcup_{x = \varphi^j(a_n)} \beta(x) = \\
&= \bigcup_{x \nleqslant c_0} x \cup \bigcup_{\substack{x \leqslant c_0 \\ x \neq x_l \\ x \neq \varphi^j(a_n)}} x \cup \bigcup_{x = x_l} z \cup \bigcup_{x = \varphi^j(a_n)} (\varphi^j(a_n) + \varphi^j(y)) = \\
&= \bigcup_{i=1}^{n} x_i = 1
\end{aligned}$$

Так же надо показать, что $\beta(x_i) \cap \beta(x_j) = \varnothing$, $i \neq j$.

- $x_i, x_j \nleqslant c_0$, $x_i \cap x_j = \varnothing \Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = x_i \cap x_j = \varnothing$.
- $x_i \leqslant c_0, x_j \nleqslant c_0$, $x_i \cap x_j = \varnothing \Rightarrow \beta(x_i) \leqslant c_0$, $\beta(x_j) \nleqslant c_0 \Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = \varnothing$.
- $x_i, x_j \leqslant c_0$, $x_i, x_j \neq \varphi^k(a_n)$, $x_i, x_j \neq x_l \Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = x_i \cap x_j = \varnothing$.
- $x_i, x_j \leqslant c_0$, $x_i = \varphi^k(a_n)$, $x_j \neq x_l, \varphi^m(a_n) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = (x_i \cup \varphi^k(y)) \cap x_j = (x_i \cap x_j) \cup (\varphi^k(y) \cap x_j) = \varnothing$.
- $x_i, x_j \leqslant c_0$, $x_i = \varphi^k(a_n)$, $x_j = x_l \Rightarrow$
  $\Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = (\varphi^k(a_n) \cup \varphi^k(y)) \cap z = (\varphi^k(a_n) \cap z) \cup (\varphi^k(y) \cap z) = \varnothing$.
- $x_i, x_j \leqslant c_0$, $x_i = \varphi^k(a_n)$, $x_j = \varphi^m(a_n) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = (\varphi^k(a_n) \cup \varphi^k(y)) \cap (\varphi^m(a_n) \cup \varphi^m(y)) = \varnothing$.
- $x_i, x_j \leqslant c_0$, $x_i = x_l$, $x_j \neq x_l, \varphi^m(a_n) \Rightarrow$
  $\Rightarrow \beta(x_i) \cap \beta(x_j) = z \cap x_j = \varnothing$.

§ 2.3.2. *Неавтоустойчивость $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ при бесконечном числе конечных циклов длиной равной степени некоторого числа n на атомах*

Лемма 6. *Пусть все циклы на атомах конечны и существует такое натуральное число n, что все длины конечных циклов равны его некоторой степени. Тогда $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ неавтоустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теоремой о ветвлении [4]. Покажем, что представление, построенное в лемме 4, ветвится относительно формулы $\psi(x) \leftrightharpoons \forall\, y(y < x \to y = 0)\,\&\,(x \neq 0)$.

По лемме 2 порядок любого элемента $x \in \mathfrak{B}_\omega$ есть n^k для некоторого k. Рассмотрим A_t, $a_n \in A_t$ — атом $\mathfrak{B}_\omega$, тогда a_n — атом в A_t. Пусть $A_t \subset A_{t+1}$, тогда какой-то атом A_t не является атомом в A_{t+1}. Пусть p фиксировано. $\overline{c} := (c_0, \ldots, c_s)$ — все атомы A_p. Изоморфное вложение β должно быть тождественно на $c_0, \ldots, c_s$. Так как A_p конечно, то существует атом, под которым в $\mathfrak{A}$ лежит бесконечное число атомов. Без ограничения общности будем считать, что это c_0.

Пусть n минимальное, такое что $a_n \leqslant c_0$, пусть порядок a_n — n^{k_1}; $\widehat{c}_0$ — бесконечная алгебра. Существует бесконечно много t, таких что $A_t \cap \widehat{c}_0 \subset A_{t+1} \cap \widehat{c}_0$ и что существует x_i, являющийся атомом в A_t и не являющийся в A_{t+1}, имеющий порядок 1, для которого существует $y \in A_{t+1} \backslash \{0\}, y \leqslant x_i$, имеющий порядок n^k, $k > k_1$ (иначе существует бесконечно много циклов одинаковой длины и можно использовать лемму 5). Тогда справедливо следующее разбиение: $y, \varphi(y), \ldots, \varphi^{n^k}(y), z | x_i;\quad z = x_i \backslash (y \cup \ldots \cup \varphi^{n^k})$.

Изоморфное вложение β зададим на атомах A_t. Пусть x — атом A_t.

- Если $x \leqslant c_j,\quad j \geqslant 1\quad \beta(x) = x$.
- $x = \varphi^j(a_n) \Rightarrow \beta(x) = \varphi^j(a_n) + y + \varphi^{n^{k_1}+j+1}(y) + \varphi^{2n^{k_1}+j+1}(y) + \ldots + \varphi^{(\frac{n^k}{n^{k_1}}-1)n^{k_1}+j+1}(y)$, где $j \in \{1 \ldots n^{k_1} - 1\}$.
- $x = x_i \Rightarrow \beta(x) = z$.

β — изоморфное вложение. Доказательство полностью аналогично доказательству изоморфности β в лемме 5.

§ 2.3.3. *Пример автоустойчивой $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ при бесконечном числе конечных циклов на атомах*

Лемма 7. *Пусть длины всех циклов являются различными простыми числами, тогда множество атомов $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ рекурсивно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что формула

$$\psi(x) \rightleftharpoons \Big((\varphi^{p_i}(x) = x)\ \&\ \big(\varphi^i(x) \cap (\varphi^j(x) = 0, i \neq j, 1 \leqslant i, j < p_i, i \in \mathbb{N})\big)\Big)$$

определяет, является ли x атомом или нет.

По лемме 2 порядок x есть наименьшее общее кратное атомов, из которых он (или его дополнение) состоит. Следовательно, $\varphi^{p_i}(x) = x$ тогда и только тогда, когда x состоит из атомов одного и того же цикла. Но, если x не является атомом, то найдутся $i \neq j$: $\varphi^i(x) \cap \varphi^j(x) \neq 0$. А значит, $\psi(x)$ действительно определяет, является x атомом или нет. Поскольку в вычислимой булевой алгебре вычислимость множества атомов равносильна его вычислимой перечислимости, то утверждение доказано.

Теорема 3. *Пусть число конечных циклов бесконечно и все длины конечных циклов являются различными простыми числами, тогда $(\mathfrak{B}_\omega, \varphi)$ автоустойчива.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ — два представления $\mathfrak{B}_\omega$. Поставим каждому элементу булевой алгебры натуральное число по следующему принципу:

$$f(a) = \mu y \,(y = \langle n, p_{j_1}, \ldots, p_{j_n} \rangle \mid \; a = \bigcup_{i=1}^{n} b_i, \text{ где } b_i \text{ атом порядка } p_{j_i}),$$

заметим, что $f(a)$ рекурсивна.

Рекурсивный изоморфизм ψ построим следующим образом:

$$\psi(a_1) = \mu\, a_2 \,(f(a_1) = f(a_2)).$$

Список литературы

1. *Гончаров С. С., Дзгоев В. Д.* Автоустойчивость моделей // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 45–58.

2. *Remmel J. B.* Recursive Isomorphism Types of Recursive Boolean Algebras // J. Symb. Log. 1981. Vol. 46. No. 3. P. 572–594.

3. *Когабаев Н. Т.* Автоустойчивость булевых алгебр с выделенным идеалом // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 39, № 5. С. 1074–1084.

4. *Алаев П. Е.* Автоустойчивые I-алгебры // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 5. С. 511–550.

5. *Гончаров С. С.* Автоустойчивость моделей и абелевых групп // Алгебра и логика. 1980. Т. 19, № 1. С. 23–44.

6. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

7. *Гончаров С. С., Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели. Новосибирск: Научная книга, 1999.

Материал поступил в редколлегию 31.10.2009

Адрес автора

ТУХБАТУЛЛИНА Регина Расимовна

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: regina88@bk.ru