УДК 517.944 + 532.5

Н. Ю. Босых, А. П. Чупахин

ОБ ОДНОМ ЧАСТИЧНО ИНВАРИАНТНОМ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ ГИДРОДИНАМИКИ АТМОСФЕРЫ*

Уравнения гидродинамики атмосферы в приближении f — плоскости допускают обширную бесконечномерную группу Ли преобразований, найденную Л. В. Овсянниковым (1967). В работе исследуется частично инвариантное решение этих уравнений, обладающее функциональным произволом. Отыскание решения сводится к интегрированию уравнения Хопфа и конечным формулам.

Ключевые слова: уравнения гидродинамики атмосферы в приближении f-плоскости, бесконечномерная группа Ли, частично инвариантное решение.

Введение

Для описания движения воздушных масс в атмосферах планет и жидкости в мировом океане используется модель несжимаемой неоднородной идеальной жидкости в приближении f-плоскости. Рассмотрение уравнений движения среды в плоской полосе, касательной к сфере, а не на самой сфере, оправданно при моделировании процессов, происходящих в средних широтах.

Уравнения гидродинамики в приближении f-плоскости выводятся при следующих предположениях [1–4]:

1) рассматриваемые движения достаточно быстрые, при этом исключаются эффекты вязкости, теплопроводности, массовой диффузии;

2) исключаются из рассмотрения эффекты, связанные с неоднородностью поля внешних сил, в частности центробежных сил;

3) плотность среды переменна, но любая ее часть, состоящая из одних и тех же частиц, в процессе движения сохраняет величину своего объема.

Такая модель описывает крупномасштабные процессы, в которых применительно к Земле характерные длины волн составляют тысячи километров, времена — порядка суток. Скорость волн намного меньше скорости звука. Учет сжимаемости позволяет учесть неадиабатические факторы, в частности притоки тепла.

Приведем кратко основные этапы получения дифференциальных уравнений модели.

Вектор скорости $\mathbf{u} = (u, v, w)$, давление p и плотность ρ являются функциями времени t и пространственных координат $\mathbf{x} = (x, y, z)$. При сделанных предположениях

* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы ОЭММПУ № 2.14.1, Интеграционного проекта СО РАН № 65, грантов Министерства образования и науки РФ (№ 2.1.1/3543), РФФИ (код проекта № 08-01-00047), Научной школы № НШ-4368.2010.1.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 4. С. 26–35

система дифференциальных уравнений гидродинамики атмосферы имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{d\mathbf{u}}{dt} + 2\vec{\omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g}, \\ &\frac{d\rho}{dt} = 0, \\ &\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\vec{g}$ — ускорение силы тяжести, $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения планеты.

Система (1) является определенной. Она состоит из пяти уравнений относительно пяти неизвестных функций $\mathbf{u}, \rho$ и p. Добавление к ней уравнения состояния, связывающего плотность ρ, давление p и еще одну термодинамическую величину (энтропию или температуру), формально переопределяет ее. Однако можно рассуждать следующим образом. Вычислив из системы (1) значения p и ρ, можно по уравнению состояния восстановить энтропию или температуру. Система (1) является приближенной, ее подробный вывод описан в [1; 3]. В [3] уравнение неразрывности расщепляется на два, это мотивируется тем, что в отсутствие сжимаемости и диффузии плотность жидкости не должна изменяться вдоль траектории частицы. С другой стороны, при исследовании влияния диффузии в модели с несжимаемой жидкостью необходимо использовать уравнения для термодинамических величин (давление, температура, энтропия и т. д.).

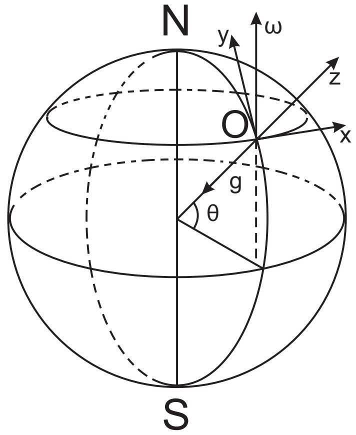


Рис. 1. Система координат

Выберем систему координат как показано на рис. 1. Через N и S обозначены северный и южный полюсы, θ — географическая широта точки O на сфере. Ось Ox направлена на восток, Oy — на север, сила тяжести действует в отрицательном направлении оси Oz. Вектор угловой скорости вращения планеты имеет координаты $\vec{\omega} = (0, \omega\cos\theta, \omega\sin\theta)$, $|\vec{\omega}| = \omega$. Ускорение силы тяжести $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Обозначим $f = 2\omega\sin\theta, m = 2\omega\cos\theta$. Тогда предыдущая система уравнений в координатной записи принимает вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv + mw = -\rho^{-1}p_x, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu = -\rho^{-1}p_y, \\ w_t + uw_x + vw_y + ww_z - mu = -\rho^{-1}p_z - g, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z = 0, \\ u_x + v_y + w_z = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Система уравнений, описывающая движения сплошной среды в приближении f-плоскости, получается из системы (2) при предположении постоянства параметра Кориолиса f. Она имеет вид

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y + wu_z - fv + \rho^{-1}p_x = 0, \\ v_t + uv_x + vv_y + wv_z + fu + \rho^{-1}p_y = 0, \\ \rho_t + u\rho_x + v\rho_y + w\rho_z = 0, \\ u_x + v_y + w_z = 0, \qquad \rho g = -p_z. \end{cases} \tag{3}$$

Подробный ее вывод содержится в работе [1], а также в книге [3]. Заметим, что растяжением переменных параметр f и ускорение g можно сделать равными единице.

В работе [1] выбраны отличные от [3] направления осей Oy и Oz, поэтому уравнения из [1] переходят в систему (3) при замене: $y \to -y, z \to -z, v \to -v, w \to -w$.

Важными особенностями модели (3) являются переменная плотность при сохранении ее в частице и наличие вертикального переноса, обусловленного ненулевой компонентой скорости w.

§ 1. Групповые свойства уравнений

Система (3) допускает бесконечномерную группу Ли, найденную в [1].

Запишем уравнения (3) в цилиндрических координатах $\{r, \theta, z\}$, $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; U и V — радиальная и окружная компоненты скорости в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$, W — компонента скорости вдоль оси Oz (рис. 1).

$$\begin{cases} U_t + UU_r + r^{-1}VU_\theta + WU_z - V + \rho^{-1}p_r = r^{-1}V^2, \\ V_t + UV_r + r^{-1}VV_\theta + WV_z + U + (r\rho)^{-1}p_\theta = -r^{-1}UV, \\ \rho_t + U\rho_r + r^{-1}V\rho_\theta + W\rho_z = 0, \\ U_r + r^{-1}U + r^{-1}V_\theta + W_z = 0, \\ \rho = -p_z. \end{cases} \tag{4}$$

Плотность ρ сохраняется вдоль траекторий, давление p связано с плотностью по гидростатическому закону. Уравнения (4) описывают трехмерные движения среды при наличии вращения и притяжения с учетом вертикального переноса. Заметим, что модель (4) является более общей по сравнению с моделью мелкой воды на вращающейся плоскости [2; 3], которая получается из (4) при интегрировании уравнения неразрывности на свободной поверхности с учетом условия гидростатичности.

Базисные операторы соответствующей алгебры Ли имеют вид

$$\begin{aligned} X_1 &= r\partial_r + 2z\partial_z + U\partial_U + V\partial_V + 2W\partial_W + 2p\partial_p, \quad X_2 = \partial_\theta, \quad X_3 = p\partial_p + \rho\partial_\rho, \\ X_{4,\tau} &= 2\tau\partial_t + \tau' r\partial_r - \tau\partial_\theta - \big[(\tau' + \tau''')r^2/2 + 2\tau' z\big]\partial_z + \\ &\quad + (-\tau' U + \tau'' r)\partial_U - \tau'(V + r)\partial_V - \\ &\quad - \big[(\tau''' + \tau')rU + 4\tau' W + (\tau'''' + \tau'')r^2/2 + 2\tau'' z\big]\partial_W - 2\tau' p\partial_p, \\ X_{5,\alpha} &= \alpha\cos\theta\partial_r - \alpha r^{-1}\sin\theta\partial_\theta - r(\alpha''\cos\theta + \alpha'\sin\theta)\partial_z + (\alpha'\cos\theta - \alpha r^{-1}V\sin\theta)\partial_U + \\ &\quad + (-\alpha'\sin\theta + \alpha r^{-1}U\sin\theta)\partial_V - \big[\alpha''(U\cos\theta - V\sin\theta) + \alpha'(U\sin\theta + V\cos\theta) + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ r(\alpha''' \cos\theta + \alpha'' \sin\theta)\big]\partial_W,\\
X_{6,\beta} = &- \beta\sin\theta\partial_r - \beta r^{-1}\cos\theta\partial_\theta - r(\beta'\cos\theta - \beta''\sin\theta)\partial_z - (\beta'\sin\theta + \beta r^{-1}V\cos\theta)\partial_U +\\
&+ (-\beta'\cos\theta + \beta r^{-1}U\cos\theta)\partial_V - \big[\beta'(U\cos\theta - V\sin\theta) - \beta''(U\sin\theta + V\cos\theta) +\\
&+ r(\beta''\cos\theta - \beta'''\sin\theta)\big]\partial_W,\\
X_{7,\gamma} = &\gamma\partial_z + \gamma'\partial_w, \quad X_{8,\delta} = \delta\partial_p. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

В (5) $\tau = \tau(t)$, $\alpha = \alpha(t)$, $\beta = \beta(t)$, $\gamma = \gamma(t)$, $\delta = \delta(t)$ — произвольные функции времени t, символами со штрихами обозначены их производные.

Групповой анализ различных моделей мелкой воды, в том числе с учетом вращения, и исследование инвариантных решений этих моделей выполнены в [5–8].

§ 2. Частично инвариантное решение системы (4)

Рассмотрим следующую четырехмерную подалгебру алгебры Ли симметрии (5) системы (4):

$$L_4 = \big\langle \partial_z, t\partial_z + \partial_W,\ r\partial_r + 2z\partial_z + U\partial_U + V\partial_V + 2W\partial_W + (a+2)p\partial_p + a\rho\partial_\rho,\ \partial_p \big\rangle, \qquad (6)$$

где $a \in \mathbb{R}$ — произвольный параметр, $a \neq 0$. Базисные операторы алгебры (6) соответствуют, в порядке следования, таким операторам алгебры Ли (5): $X_{7,1}, X_{7,t}, X_1 + aX_3$, $X_{8,1}$.

Алгебра (6) имеет инварианты $t, \theta, U/r, V/r, \rho/r^a$ и порождает частично инвариантное решение ранга два и дефекта два, имеющее представление

$$
\begin{aligned}
&U = ru(t,\theta), \quad V = rv(t,\theta), \quad \rho = r^a R(t,\theta),\\
&W = w(t,r,\theta,z), \quad p = p(t,r,\theta,z),
\end{aligned} \qquad (7)
$$

причем $R > 0$, $p > 0$ в силу неотрицательности плотности и давления.

Подставим представление (7) в систему (4) и разрешим полученные уравнения относительно производных функции p:

$$p_r = -r^{a+1}R(u_t + vu_\theta + u^2 - v^2 - v), \qquad (8)$$

$$p_\theta = -r^{a+2}R(v_t + vv_\theta + 2uv + u), \qquad (9)$$

$$p_z = -r^a R, \qquad (10)$$

$$W_z = -(2u + v_\theta), \qquad (11)$$

$$R_t + vR_\theta + aRu = 0. \qquad (12)$$

Система (8)–(12) является активной относительно p, поскольку содержит представления (8)–(10) для производных этой функции. Условия равенства вторых смешанных производных p будут условиями совместности. Система (8)–(12) является переопределенной, поскольку ее нужно дополнить соотношениями $u_r = u_\theta = v_r = v_\theta = R_r = R_\theta = 0$. Покажем, что эта система может быть сведена к неоднородному уравнению Хопфа и явным формулам.

Обозначим через

$$h = -(2u + v_\theta)$$

функцию инвариантных переменных t, θ. Тогда из (11) следует формула

$$W = h(t,\theta)z + W_1(t,r,\theta), \tag{13}$$

где W_1 — произвольная функция указанных переменных.

Остальные уравнения системы (8)–(12) не содержат функции W и производных от нее, тем самым (13) задает формулу для компоненты скорости W в данном решении.

Уравнение (10) можно проинтегрировать один раз по переменной z:

$$p = -r^a Rz + p_1(t,r,\theta), \tag{14}$$

где p_1 — функция, подлежащая определению.

Дифференцируем уравнения (8), (9) по переменной z, с учетом формул (7) получим

$$p_{rz} = p_{\theta z} = 0. \tag{15}$$

С другой стороны, вычисляя производные p_{zr} и $p_{z\theta}$ из (10), приходим к равенствам

$$(r^a R)_r = (r^a R)_\theta = 0. \tag{16}$$

Из (15), (16) следует, что $r^a R$ зависит лишь от переменной t. Тем самым получаем формулу

$$R = \frac{R_1(t)}{r^a}, \tag{17}$$

где $R_1 > 0$ — произвольная функция времени. Подставляя (17) в (12), получим представление

$$u = -\frac{R_1'}{aR_1}. \tag{18}$$

Выпишем условие равенства смешанных производных $p_{r\theta}$ и $p_{\theta r}$ из уравнений (8) и (9). Подставим в уравнения (8) и (9) представление (14), получим:

$$p_{1r} = -rR_1 S(t,\theta), \quad p_{1\theta} = -r^2 R_1 Q(t,\theta), \tag{19}$$

где

$$S = -\frac{1}{a}\Big(\frac{R_1'}{R_1}\Big)' + \frac{1}{a^2}\Big(\frac{R_1'}{R_1}\Big)^2 - v^2 - v, \tag{20}$$

$$Q = v_t + vv_\theta - \frac{2}{a}\frac{R_1'}{R_1}v - \frac{1}{a}\frac{R_1'}{R_1}. \tag{21}$$

Условие совместности $p_{1r\theta} = p_{1\theta r}$ в терминах величин (20) и (21) принимает вид

$$rR_1 S_\theta = 2rR_1 Q. \tag{22}$$

При $R_1 \neq 0$ из (22) следует уравнение $S_\theta = 2Q$, которое в развернутом виде с учетом (20) и (21) представляет собой неоднородное уравнение Хопфа на функцию v:

$$v_t + 2vv_\theta + \frac{1}{2}v_\theta - \frac{2R_1'}{aR_1}v = \frac{R_1'}{aR_1}. \tag{23}$$

Тем самым выведены все условия совместности системы (8)–(12). Заметим, что из (19)–(22), с учетом (14), следует явная формула для давления

$$p = -R_1\big(z + \frac{r^2}{2}S(t,\theta)\big) + P(t). \tag{24}$$

Суммируя полученные результаты приходим к следующему утверждению.

Теорема 1. *Алгебра Ли (6) порождает частично инвариантное решение ранга два и дефекта два системы (4). Это решение задается следующими формулами:*

$$U = -r\frac{R_1'}{aR_1}, \quad V = rv(t,\theta), \quad W = h(t,\theta)z + W_1(t,r,\theta),$$

где v является решением неоднородного уравнения Хопфа (23). Плотность и давление имеют вид:

$$\rho = R_1(t), \quad p = -R_1\bigl(z + \frac{r^2}{2}S(t,\theta)\bigr) + P(t).$$

Функции $R_1 > 0$, W_1 и P являются произвольными, $h = 2R_1'/(aR_1) - v_\theta$.

Замечание. Произвол в искомом решении, описываемом теоремой 1, определяется следующим образом: произвольные функции одной переменной R_1 и P, произвольная функция трех переменных W_1, произвольная функция одной переменной, задающая общее решение уравнения Хопфа (23).

Теорема 2. *Общее решение уравнения Хопфа (23) задается формулой*

$$\theta - q\tau + \int \frac{\tau A'}{2A^2}\,d\tau = F\bigl(q + \frac{1}{2A}\bigr), \tag{25}$$

где F — произвольная гладкая функция.

Указание. Для интегрирования (23) используются замены функции $v_1 = 2v + \frac{1}{2}, v_1 = = Aq$ и времени $\tau = \int A(t)\,dt$, $A = A_0R_1^{2/a}$. Эти замены приводят уравнение (23) к стандартному уравнению Хопфа с правой частью, общее решение которого и задается (25).

§ 3. Анализ решения

Найденному решению отвечает однородная плотность $\rho = R_1(t)$. Она постоянна во всем пространстве и меняется со временем. Давление задается формулой (24).

Если считать, что среда характеризуется уравнением состояния Клапейрона $p/\rho = = R_gT$ (R_g — универсальная газовая постоянная), то ее температура задается формулой:

$$T = -\frac{1}{R_g}\bigl(z + \frac{1}{2}r^2S\bigr) + \frac{P}{R_1R_g}. \tag{26}$$

Согласно (26) температура постоянна на поверхностях $z + \frac{1}{2}r^2S(t,\theta) - \frac{P}{R_1} = \mathrm{const}$, где функция S определена формулой (20) и представляется через решение v уравнения Хопфа (23).

Интеграл уравнения траекторий для радиальной компоненты скорости $dr/dt = U = = ru$ в силу (18) имеет вид $r^aR_1 = \mathrm{const}$. С учетом формулы (7) для плотности, этот интеграл можно записать так:

$$r^a\rho = r_0^a\rho_0. \tag{27}$$

Равенство (27) описывает изменение плотности вдоль траектории частицы среды имеющей при $t = 0$ начальное положение r_0 и плотность ρ_0. Поскольку в модели плотность сохраняется в частице, то уравнение (27) задает распределение плотности в жидком объеме. Оно полностью определяется начальным распределением плотности,

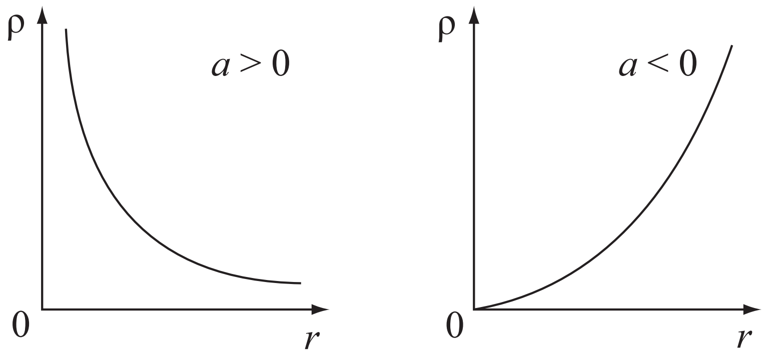


Рис. 2. Зависимость плотности ρ от знака параметра a

причем величина объема сохраняется в процессе движения. Качественная зависимость плотности от знака параметра a иллюстрируется рис. 2.

Уравнение траекторий для окружной компоненты скорости V на данном решении имеет вид $d\theta/dt = v(t, \theta)$.

Для его интегрирования нужна информация о решении уравнения Хопфа (23). Фактически оно является одним из уравнений характеристик для уравнения (23).

Оставшееся уравнение траекторий для вертикальной компоненты скорости

$$\frac{dz}{dt} = \Big(\frac{2R_1'}{aR_1} - v_\theta\Big) z + W_1(t, r, \theta)$$

является линейным уравнением относительно z и для своего интегрирования также требует знания решения v уравнения Хопфа (23). Функция W_1 является произвольной, ее задание определяется конкретной физической задачей.

Вихрь $\vec{\omega} = \operatorname{rot} \vec{u}$ в данном решении имеет следующие компоненты (индекс вверху обозначает соответствующую координату):

$$\omega^r = r^{-1}(h_\theta z + W_{1\theta}), \quad \omega^\theta = -r^{-1} W_{1r}, \qquad \omega^z = 2v. \tag{28}$$

Из (28) следует, что движение является завихренным даже при $W \equiv 0$, если $v \neq 0$. В этом случае движение, определяемое данным решением, происходит в плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$ и имеет компоненту вихря, направленную по оси Oz.

§ 4. Пример вихревого движения

Рассмотрим частное решение вида (7), в котором $R_1 = e^{-t}$. Пусть в формуле (25) $F(\sigma) = \sigma$, тогда имеем:

$$q = \frac{\theta + \alpha e^{2t} - \alpha^{-1} e^{-2t}/8}{1 + 2\alpha e^{2t}}, \quad \alpha = \mathrm{const}\,.$$

Подставляя это представление для q в формулы теоремы 1, получим формулы точного решения:

$$U = -r, \quad V = \frac{r}{2}\Big[4\alpha e^{2t} q - \frac{1}{2}\Big],$$

$$W = 2z\frac{1+\alpha e^{2t}}{1+2\alpha e^{2t}} + W_1(t,r,\theta),$$
$$\rho = e^{-t}, \quad p = -e^{-t}\Big(z + \frac{1}{2}r^2(1-v^2-v)\Big) + P(t),$$

где $v = \frac{1}{2}\big[4\alpha e^{2t}q - \frac{1}{2}\big]$.

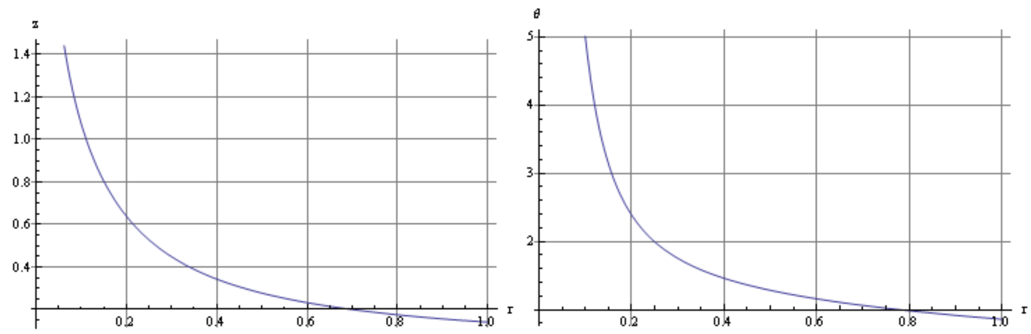
Проинтегрировав уравнения для траекторий частиц, находим

$$\theta = C_0 A + \frac{1}{4A}\Big(2A - \ln\Big|\frac{1+A}{1-A}\Big| + \frac{1}{A}\Big),$$
$$r = r_0 e^{-t}, \quad z = C_1\left|ae^{2t}/A\right|^{1/a}, \tag{29}$$

где $A = |1+2ae^{2t}|^{1/2}$.

В (29) C_0, C_1, r_0 — постоянные интегрирования. Опишем движение среды, задаваемое формулами (29). Плотность $\rho = \rho_0 e^{-t}$ постоянна во всем объеме, занятом средой, причем $\rho \to 0$ при $t \to +\infty$. Из (29) следует, что все частицы собираются на оси Oz или на ее части. При $t \to +\infty$ следует различать случаи $a > 0$ и $a < 0$.

Пусть $a > 0$. Поведение функций $z = z(r)$ и $\theta = \theta(r)$ иллюстрируется графиками на рис. 3.



а б

Рис. 3. Качественное поведение функций z, θ при а > 0

Все частицы движутся по винтовым кривым, лежащим на поверхности $z = z(r)$ таким образом, что $z \to +\infty$ при $t \to +\infty$ (рис. 3, *а*). Такое движение можно интерпретировать как восходящий вихревой поток.

При отрицательных a в движении возникают особенности. Качественное поведение функций $z = z(r)$ и $\theta = \theta(r)$ показано на рис. 4.

По мере возрастания времени и убывания r до $r \to r_A$ (рис. 4, *б*) угол θ уменьшается. В точке A односторонние производные θ_r неограничены, что можно интерпретировать как сток при $r \to r_A + 0$ и источник при $r \to r_A - 0$. На интервале $r \in (r_B, r_A)$ угол θ вначале возрастает, частица движется по дуге раскручивающейся спирали, приближаясь к оси Oz, а затем в малой окрестности точки B в движении меняется направление закрутки. Как следует из графика (рис. 4, *а*), при $r \to r_B$ все частицы стремятся к началу координат. Эта точка является стоком в течении.

На интервале $r \in (0, r_B)$ частицы движутся по раскручивающейся винтовой линии, лежащей на поверхности $z = z(r)$ (см. рис. 4, *а*), приближаясь к оси Oz, при этом

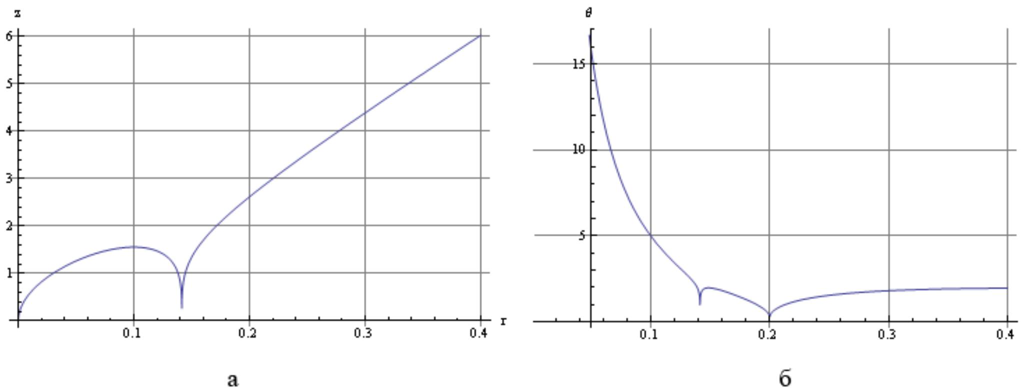


Рис. 4. Качественное поведение функций z, θ при а < 0

их расстояние до плоскости Oxy меняется немонотонно. Это следует из вида функции $z = z(r)$ на этом интервале.

Таким образом, при $a < 0$ решение определено лишь на интервалах $(0, r_B)$, (r_B, r_A), $(r_A, +\infty)$. В точках O, r_A, r_B решение имеет особенности, которые можно интерпретировать как источники и стоки в движении. Траектории частиц по-прежнему являются винтовыми линиями $\theta = \theta(r)$ на поверхностях вращения $z = z(r)$. Решение описывает вихревые потоки газа.

Заключение

Модель гидродинамики атмосферы в приближении f-плоскости является перспективной для построения точных решений. Обширная группа симметрии и построенное в работе частично инвариантное решение свидетельствуют о физической содержательности модели.

Список литературы

1. *Овсянников Л. В.* Уравнения динамической конвекции моря. Препр. Ин-та гидродинамики АН СССР, 1967.

2. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.

3. *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. М.: Мир, 1981. Т. 1.

4. *Дийкстра Х. А.* Нелинейная физическая океанография. Ижевск, 2007.

5. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.

6. *Чесноков А. А.* Симметрии и точные решения уравнений мелкой воды на пространственном сдвиговом потоке // ПМТФ. 2008. Т. 49, № 5. С. 41–54.

7. *Чесноков А. А.* Симметрии уравнений теории мелкой воды на вращающейся плоскости // СибЖИМ. 2008. Т. 11, № 3. С. 135–146.

8. *Chesnokov A. A.* Symmetries and Exact Solutions of the Rotating Shallow-Water Equations // Euro. J. Applied Mathematics. Cambridge University Press, 2009. Vol. 20. P. 461–477.

Материал поступил в редколлегию 11.12.2009

Адреса авторов

БОСЫХ Надежда Юрьевна
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: bosykh@ngs.ru

ЧУПАХИН Александр Павлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru