

Я. Д. Гельруд

ОБОБЩЕННЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ СЕТЕВЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ УПРАВЛЕНИЯ КОМПЛЕКСНЫМИ ПРОЕКТАМИ

В статье предлагается новый класс циклических альтернативных сетевых моделей — ЦАСМ, адекватно отображающих процесс реализации сложного комплексного проекта и используемых для постановки и решения задач оптимального управления этим процессом. Этот класс моделей является синтезом обобщенных сетевых моделей с вероятностными и стохастическими моделями, в значительной степени учитывающими факторы риска и неопределенности при осуществлении проекта. Данные модели являются наиболее гибкими и адекватными из известных инструментов моделирования комплексов дискретных операций и описания процесса управления реализацией сложного или комплексного проекта. Приводится математическое описание ЦАСМ с обоснованием необходимых условий непротиворечивости. Рассмотрена формальная постановка задач временного анализа ЦАСМ, а также представлены алгоритмы ресурсно-временного анализа ЦАСМ, в том числе алгоритмы расчета временных параметров ЦАСМ для получения планов ранних и поздних сроков, планов минимальной продолжительности.

Ключевые слова: управление проектами, циклические альтернативные сетевые модели, детерминированные, вероятностные сетевые модели, непротиворечивость сетевой модели.

Введение

Современные формальные методы управления проектами получили развитие с появлением в конце 1950-х гг. математических моделей комплексов операций (проектов) и соответствующих алгоритмических и программных средств их обработки на компьютере с последующим применением на практике.

Однако после бурного восторга от простоты и эффективности применения методов СПУ (1960–1970 гг.) [1] наступило заметное охлаждение к ним (1980–1990 гг.), а затем и разочарование (1995–2000 гг.) [2].

В настоящее время образовался огромный разрыв между развитием теории и практикой применения теоретических результатов. С начала 1960-х гг. наукой был предложен широкий спектр сетевых моделей, методов планирования и управления проектами с большими функциональными возможностями, покрывающими самые изощренные требования практики. За этот же период практиками создана целая индустрия разработки и логистика распространения программных средств для управления проектами (УП). На мировом рынке число пакетов УП достигает 350 [3], а годовой оборот этого бизнеса превышает \$25 млрд. Центральное ядро пакетов, предназначенное для календарного планирования и контроля проектов, использует, как правило, сетевые модели и методы их анализа, разработанные еще в конце 1960-х гг. [1; 4]. Остальные научные результаты мало известны практикам и специалистам.

В чем причина такой ситуации? К чему это может привести? Каков выход из создавшегося положения?

Ответы на эти вопросы требуют специальных исследований. Одна из причин очевидна: неадекватность моделей и методов, используемых в доступных на рынке пакетах УП, сложным реалиям моделируемых процессов проектной деятельности.

В то же время моделирование процессов осуществления проектов остается главной методологической основой дисциплины «Управление проектами» [2]. От степени адекватности используемых моделей реальным процессам и задачам управления проектами во многом зависят эффективность принимаемых решений и успех проектов.

За последние годы сильно возросли сложность и комплексность проектов, выполняемых в условиях турбулентной окружающей среды с высокой степенью рисков и неопределенности. Для успешного управления проектами требуются новые подходы и технологии. Один из таких подходов — управление комплексными проектами — развивается проф. Д. Добкинсом [5; 6].

Известные к настоящему времени математические методы моделирования процессов реализации комплексных проектов (классические [4], обобщенные [3; 7], вероятностные [8] и стохастические [9] сетевые модели) не всегда оказываются адекватными моделируемыми процессам.

В статье предлагается новый класс сетевых моделей, адекватно отображающих процесс реализации сложного комплексного проекта и используемых для постановки и решения задач оптимального управления этим процессом. Этот класс моделей является синтезом обобщенных сетевых моделей (с их богатым спектром возможностей эквивалентных преобразований моделей и описанием логико-временных взаимосвязей между элементами структуры проекта) с вероятностными и стохастическими моделями, в значительной степени учитывающими факторы риска и неопределенности при осуществлении проекта. Данные модели (называемые в дальнейшем *циклические альтернативные сетевые модели* — ЦАСМ) являются наиболее гибкими и адекватными из известных инструментов моделирования комплексов дискретных операций и описания процесса управления реализацией сложного или комплексного проекта.

ЦАСМ имеют все преимущества обобщенных, вероятностных и стохастических моделей, при этом язык их описания усложнен незначительно. Общие принципы представлены в ряде статей и докладов [10; 11].

В настоящей работе приводится подробное математическое описание ЦАСМ с обоснованием необходимых условий непротиворечивости. Рассмотрена формальная постановка задач временного анализа ЦАСМ, а также представлены алгоритмы ресурсно-временного анализа ЦАСМ, проиллюстрированные численными примерами. Они включают предложенные алгоритмы расчета временных параметров ЦАСМ для получения планов ранних и поздних сроков, планов минимальной продолжительности, вычисления резервов времени, коэффициентов напряженности работ, p -квантильных критических, резервных и промежуточных зон в сетях рассматриваемого класса.

В заключительном разделе статьи описано применение ЦАСМ для решения класса задач календарного планирования сложных проектов с ограничениями на ресурсы.

Рассмотрены следующие задачи:

- сокращение времени выполнения проекта при ограничениях на ресурсы и постоянной интенсивности выполнения работ;
- минимизация меры неравномерности потребления ресурсов при заданной продолжительности проекта и постоянной интенсивности выполнения работ (рассматриваются различные варианты задания меры неравномерности потребления ресурсов);
- сокращение времени выполнения проекта при ограничениях на ресурсы и переменной интенсивности выполнения работ;
- минимизация меры неравномерности потребления ресурсов при заданной продолжительности проекта и переменной интенсивности выполнения работ;
- формирование плана минимальной стоимости при линейной аппроксимации зависимости затрат от продолжительности проекта.

Предложенные модели и методы их анализа могут применяться как для управления отдельными комплексными проектами, так и для мультипроектного управления, в том числе в активных иерархических социально-экономических системах.

§ 1. Описание ЦАСМ

ЦАСМ представляет собой конечный, ориентированный, циклический граф $G(\Omega, A)$, состоящий из множества событий Ω и дуг (i, j) ($i, j \in \Omega$), определяемых матрицей смежности $A = \{ p_{ij} \}$, $0 \leq p_{ij} \leq 1$, причем $p_{ij} = 1$ задает детерминированную дугу (i, j) , а $0 < p_{ij} < 1$ определяет альтернативное событие i , которое с вероятностью p_{ij} связано дугой с событием j . Множество дуг подразделяется на дуги-работы и дуги-связи. Первые реализуют определенный объем производственной деятельности во времени, вторые отражают только логические связи между событиями. Событиями могут быть как моменты начала и окончания выполняемых работ, так некоторые их промежуточные состояния.

Обозначим через T_i время свершения i -го события, тогда соотношение между сроками свершения событий, связанных дугой (i, j) , задается неравенством

$$T_j - T_i \geq \psi_{ij}, \quad (1)$$

где ψ_{ij} в общем случае — случайная величина, распределенная по некоторому закону в интервале от $-\infty$ до 0 или от 0 до $+\infty$.

Кроме того, возможны абсолютные ограничения на момент свершения события i :

$$l_i \leq T_i \leq L_i. \quad (2)$$

Соотношения (1)–(2) являются обобщением соответствующих неравенств при описании обобщенных сетевых моделей [3; 7], где параметр ψ_{ij} и матрица смежности A несут детерминированный характер.

Рассмотрим смысловую нагрузку соотношения (1) при вероятностном характере параметра ψ_{ij} .

Если (i, j) есть дуга-работа (или ее часть), то положительно распределенная случайная величина ψ_{ij} задает распределение минимальной продолжительности этой работы (связанной с максимальным насыщением ее определяющим ресурсом). Планируя максимально возможное использование ресурса на работе, мы ожидаем ее быстрое исполнение, однако непредвиденные помехи и случайные обстоятельства обуславливают вероятностный характер этого времени, причем, как правило, мода (наиболее вероятное минимальное время выполнения работы) сдвигается вправо относительно математического ожидания. Вследствие этого распределение величины ψ_{ij} является унимодальным и асимметричным, а данным требованиям удовлетворяет бета-распределение, которое интуитивно было введено для оценки продолжительности работ еще в системе PERT [1], а затем получило аналитические и эмпирические подтверждения [8].

Таким образом, минимальная продолжительность работы есть случайная величина $\psi_{ij} = t_{\min}(i, j)$, распределенная по закону бета-распределения на отрезке $[a, b]$ с плотностью

$$\varphi(t) = C(t - a)^{p-1}(b - t)^{q-1}, \quad (3)$$

где C определяется из условия $\int_a^b \varphi(t) dt = 1$.

В работе [4] показано, что параметры распределения ψ_{ij} — математическое ожидание $M\psi_{ij}$ и дисперсия $\sigma^2\psi_{ij}$ — приближенно определяются по формулам

$$M\psi_{ij} = (a_{ij} + 4m_{ij} + b_{ij})/6, \quad (4)$$

$$\sigma\psi_{ij} = (b_{ij} - a_{ij})/6, \quad (5)$$

где a_{ij}, b_{ij}, m_{ij} — соответственно оптимистическая, пессимистическая и наиболее вероятная оценки минимальной продолжительности работы (i, j) , задаваемые ее ответственными исполнителями (при использовании трехоценочной методики). В случае применения двухоценочной методики (предложенной и обоснованной в работе [8]) плотность распределения имеет вид

$$\varphi(t) = C(t - a)(b - t)^2, \quad (6)$$

где $C = 12/(b - a)^4$, а параметры распределения

$$Mt = (3a + 2b)/5, \quad (7)$$

$$M = (2a + b)/3, \quad (8)$$

$$Dt = 0,04(b - a)^2. \quad (9)$$

Если случайная величина ψ_{ij} в (1), соответствующая дуге-работе (i, j) , распределена в интервале от $-\infty$ до 0, то $-\psi_{ij} = t_{\max}(j, i)$ задает распределение максимальной продолжительности работы (j, i) (связанной с минимальным насыщением ее определяющим ресурсом). Проведя для этой величины рассуждения, аналогичные вышеизложенным, получим ее распределение вида (3) или (6) и параметры, вычисляемые по формулам (4)–(5) или (7)–(9) соответственно.

Принимая, что эти случайные величины имеют наиболее вероятные значения (моды), получаем в частном случае известную двухоценочную вероятностную модель (рассмотренную в работе [8]), где $a_{ij} = mt_{\min}(i, j)$, а $b_{ij} = mt_{\max}(i, j)$. Таким образом, введение в (1)

отрицательно распределенных величин ψ_{ij} для дуг-работ (i, j) существенно расширяет возможности описания временных характеристик работ, делая широко используемую вероятностную модель лишь одним из частных случаев.

Для дуг-связей (i, j) величина ψ_{ij} задает распределение временной зависимости между событиями i и j , причем положительно распределенная величина ψ_{ij} определяет взаимосвязь типа «не ранее» (событие j может наступить не раньше, чем через ψ_{ij} дней после свершения события i), а отрицательно распределенная величина ψ_{ij} определяет взаимосвязь типа «не позднее» (событие i может наступить не позже, чем через ψ_{ij} дней после свершения события j). В последнем случае такие связи называют «обратными».

В [7] подробно описаны широкие возможности задания технологических связей между работами с помощью детерминированных параметров ψ_{ij} , в данной статье эти связи обобщены с учетом возможно вероятностного их характера.

Поскольку сроки совершения событий T_i определяются суммой продолжительностей работ, технологически им предшествующих, то в соответствии с центральной предельной теоремой при достаточно большом числе таких работ распределение случайной величины T_i стремится к нормальному с параметрами: математическое ожидание MT_i и дисперсия DT_i . Следует ожидать нормальное распределение и от параметра ψ_{ij} , соответствующего «обратным» дугам, что также подтверждается статистическим анализом [8].

Абсолютные ограничения на сроки свершения событий, заданные (2), отражают соответствующие директивные, организационные и технологические ограничения на сроки выполнения работ или их частей, заданные в «абсолютной» (реальной или условной) шкале времени. Абсолютные ограничения также характеризуются типом «не ранее» или «не позднее». В абсолютной шкале времени значения l_i и L_i не отрицательны. Если принять начало отсчета (абсолютное или относительное) за нулевое событие, то можно ввести дуги $(0, i)$ и $(i, 0)$ с параметрами $\psi_{0i} = l_i$ и $\psi_{i0} = -L_i$ соответственно, и тогда (2) примет вид $T_i - T_0 \geq l_i$, $T_0 - T_i \geq -L_i$. Таким образом, абсолютные ограничения вида (2) являются частным случаем ограничений вида (1) для определенных дуг-связей.

Рассмотрим теперь дополнительные возможности для описания процесса создания сложного проекта, которые дает введение стохастической матрицы смежности A в сочетании с обобщенными связями.

Пусть $L(i, j)$ — некоторый путь, соединяющий события i и j . Тогда

$$L(i, j) = \{i = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_v = j\}.$$

Назовем путь *детерминированным*, если для всех $k \in [1, v]$ справедливо $p_{i_{k-1}i_k} = 1$, и *стохастическим* в противном случае. Таким образом, по определению стохастический путь содержит хотя бы одну дугу, вероятность «исполнения» которой строго меньше 1. Здесь под «исполнением» дуги понимается выполнение работы (для дуги-работы) или выполнение требования о временной связности событий (для дуг-связей).

Аналогично определим детерминированный и стохастический контур: $K(i) = \{i = i_0 \rightarrow i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_v = i\}$ (такие события i назовем «контурными»).

Пусть события i и j соединены путем $L(i, j)$, тогда вероятность свершения события j $P(j/i)$ при условии, что событие i произошло, есть произведение коэффициентов

матрицы смежности A , соответствующих дугам связующего пути:

$$P(j/i) = \prod_{k=1}^v p_{i_{k-1}i_k}.$$

Если события i и j соединены несколькими путями, то выполняется эквивалентное GERT-преобразование данного фрагмента сети в соответствии с формулами, приведенными в работе [9], вычисляется производящая функция $\Psi_{ij}(s)$ и вероятность свершения события j при условии, что событие i произошло: $P(j/i) = \Psi_{ij}(0)$.

Первая производная функции $\Psi_{ij}(s)/\Psi_{ij}(0)$ по s в точке $s = 0$ (первый момент $\mu_1(j/i)$) определяет математическое ожидание $MT(j/i)$ времени свершения события j относительно времени свершения события i . Вторая производная функции $\Psi_{ij}(s)/\Psi_{ij}(0)$ по s в точке $s = 0$ (второй момент $\mu_2(j/i)$) позволяет вычислить дисперсию времени свершения события j относительно времени свершения события i по формуле

$$\sigma^2 T(j/i) = \mu_2(j/i) - (\mu_1(j/i))^2.$$

GERT-преобразование фрагмента сети применимо для вычисления вероятности свершения события j , соединенного стохастическими путями с одной альтернативной вершиной i , к которой ведет детерминированный полный путь. Если к событию j ведут стохастические пути из разных альтернативных вершин i , то предлагаются следующие рекуррентные соотношения:

$$P(j) = 1 - \prod_{\forall i \ll j} (1 - P(i)p_{ij}), \quad (10)$$

где $P(i)$ — вероятность свершения i -го события, $P(0) = 1$, и уже известны $P(i)$ для всех i , строго предшествующих j ($\forall i \ll j$). Из (10) следует, что если событию j предшествует хотя бы один полный детерминированный путь, то $P(j) = 1$ (одна из скобок в произведении обращается в 0). Будем называть такое событие *детерминированным*, в противном случае — *стохастическим*.

Рассмотрим небольшой числовой пример (рис. 1).

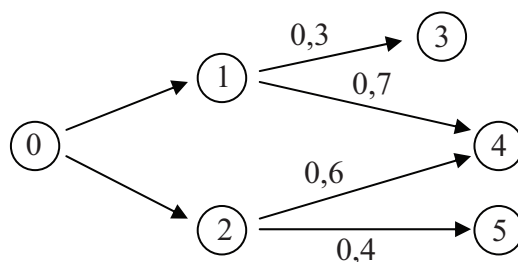


Рис. 1. Фрагмент стохастической сети

Здесь $P(0) = P(1) = P(2) = 1$. Для вычисления $P(4)$ GERT-преобразование не применимо ($0,7 + 0,6 = 1,3 > 1$). В соответствии с (10)

$$P(4) = 1 - (1 - 0,7)(1 - 0,6) = 0,88.$$

Действительно, ненаступление события 4 соответствует совместному наступлению событий 3 и 5, а вероятность этого $0,3 \times 0,4 = 0,12$.

Ниже (в § 4) предлагается еще один (имитационный) способ определения вероятности свершения событий, который более эффективен для сети большой размерности (количество дуг больше 300).

Длина пути $L(i, j)$ есть случайная величина, математическое ожидание которой $ML(i, j)$ есть сумма математических ожиданий длин всех дуг, составляющих данный путь, а дисперсия $DL(i, j)$ равна сумме дисперсий. Математические ожидания длин дуг вычисляются по формулам (4) или (7), а дисперсии — по формулам (5) или (9) при трех- или двухочечной методике соответственно.

При этих условиях длина пути (контура) может принимать отрицательные значения, что интерпретируется следующим образом (рассмотрим пример детерминированного контура на рис. 2).

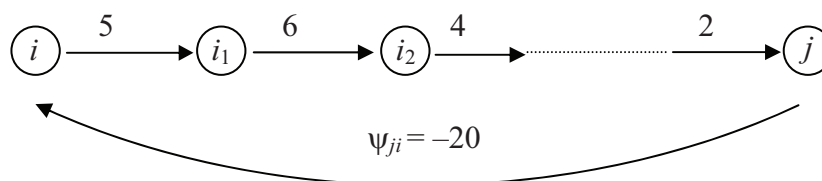


Рис. 2. Пример детерминированного контура

В данном случае событие j должно свершиться не позднее, чем через $-\psi_{ji}$ дней после наступления события i . В отличие от обобщенных сетевых моделей [7], параметр ψ_{ji} носит вероятностный характер, что позволяет более гибко описывать логико-временные связи между событиями.

§ 2. Постановка задач временного анализа ЦАСМ

Задачи временного анализа ЦАСМ, так же как и классических, обобщенных или стохастических сетевых моделей, лежат в основе решения всех календарных задач управления проектом. Они имеют самостоятельное значение при решении задач управления проектом без учета ограничений на ресурсы, что используется при создании уникальных или особо важных проектов.

Задачи временного анализа могут применяться также самостоятельно для создания различных вариантов плана при определенных значениях вектора наличия ресурсов с целью их последующего сопоставления, оценки качества вариантов плана и выбора направления его дальнейшего улучшения.

При решении всех задач оптимального календарного планирования алгоритмы временного анализа ЦАСМ применяются как вспомогательный инструмент для вычисления необходимых параметров, используемых в соответствующих оптимизационных алгоритмах.

Задачи временного анализа ЦАСМ сводятся к нахождению случайного вектора $T = (T_0, T_1, \dots, T_n)$, где T_i — время свершения i -го события, координаты которого удо-

влетворяют неравенствам (1) и (2) и обращают в экстремум некоторую целевую функцию $F(T)$.

Поскольку здесь $\{T_i\}$ суть случайные величины, то задачи временного анализа ЦАСМ характеризуются не только видом функции $F(T)$, но и способом вычисления $\{T_i\}$ и их параметров.

В силу этого выделим три класса задач временного анализа:

- классические, в которых для вычисления $\{T_i\}$ используются математические ожидания продолжительностей всех дуг;
- вероятностные, в которых на основании предельной теоремы Ляпунова или другими аналитическими средствами [8] вычисляются математические ожидания сроков свершения i -х событий $\{MT_i\}$, являющиеся аргументами целевой функции $F(T)$;
- статистические, в которых для заданного уровня достоверности p методом статистических испытаний (см. 4.1) определяются p -квантильные оценки эмпирических распределений как сроков свершения i -х событий $\{W_p(T_i)\}$, так и производных от них величин, в том числе значений целевой функции $F(W_p(T))$, где $W_p(T) = \{W_p(T_0), W_p(T_1), \dots, W_p(T_n)\}$.

Вид целевой функции $F(T)$ позволяет вычислять различные типы планов (ранние, поздние, сжатые и т. д.), а также ряд необходимых показателей (критический путь, резервы времени) для их последующего самостоятельного или вспомогательного использования.

§ 3. Понятие непротиворечивости ЦАСМ

Циклическая альтернативная сетевая модель называется непротиворечивой, если найдется хотя бы один допустимый план, вычисленный для соответствующего класса задач временного анализа (классического, вероятностного или статистического), удовлетворяющий системе неравенств (1)–(2). Разберем отдельно эти три понятия.

3.1. Классическая непротиворечивость модели

Математические ожидания продолжительностей всех дуг вычисляются по соответствующей формуле (7) или (4) (при двух- или трехочечной методике) и задают сеть с постоянными длинами дуг. В теории классических сетевых моделей [4] показано, что условием непротиворечивости модели является отсутствие в ней контуров. Учитывая стохастический характер рассматриваемой модели и наличие обобщенных связей, после проведенных выше вычислений в ЦАСМ могут иметь место стохастические и детерминированные контуры.

Лемма 1. *Для любого наперед заданного доверительного уровня α наличие стохастического контура не приводит к противоречивости модели, а именно: можно утверждать, что с вероятностью α модель будет непротиворечивой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть задан контур $K(i)$ и вероятность прохождения по нему $P(i/i) < 1$. Вероятность выхода из контура при k -кратном прохождении по нему вычисляется по формуле $1 - P^k(i/i)$. Отсюда определим количество k возможных проходов

по контуру, после которого с вероятностью α из него выходим: $\alpha = 1 - P^k(i/i)$, следовательно,

$$k = \ln(1 - \alpha) / \ln P(i/i). \quad (11)$$

Например, при $\alpha = 0,95$ и $P(i/i) = 0,4$ получаем $k \approx 3$, т.е. после трехкратного прохождения по контуру выйдем из него с вероятностью 0,95. При определении допустимого (с вероятностью α) срока свершения события j , отождествляемого с выходом из контура, к длине пути, проходящего через событие i до события j , необходимо добавить величину $kL(K(i))$, где $L(K(i))$ — длина контура $K(i)$.

Лемма 2. *Чтобы циклическая альтернативная модель, в которой продолжительности дуг вычислены по классической схеме, была непротиворечивой, необходимо и достаточно, чтобы длины всех детерминированных контуров (при отсутствии стохастических) были не положительны, т.е. $L(K(i)) \leq 0$ для всех «контурных» i .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если продолжительности дуг вычислены по классической схеме и отсутствуют стохастические контуры, то получаем обобщенную сетевую модель, для которой доказательство утверждения, содержащегося в лемме 2, проведено достаточно строго в работе [7].

Теорема 1. *Для того чтобы циклическая альтернативная модель, в которой продолжительности дуг вычислены по классической схеме, была непротиворечивой с заданной вероятностью α , необходимо и достаточно, чтобы длины всех детерминированных контуров были не положительными.*

Доказательство теоремы непосредственно следует из совместного применения леммы 1 и леммы 2.

3.2. Вероятностная непротиворечивость модели

Вычисляем математическое ожидание MT_i и дисперсию $\sigma^2 T_i$ сроков свершения событий по формулам из [8]. Следует отметить, что вычисленные подобным аналитическим способом параметры на 15–20 % отличаются по величине от вычисленных классическим способом (по математическим ожиданиям продолжительностей дуг).

Будем говорить о *вероятностной непротиворечивости модели в среднем*, если полученный таким образом набор удовлетворяет неравенствам (1)–(2), где в качестве значения ψ_{ij} взято ее математическое ожидание.

Теорема 2. *Для того чтобы циклическая альтернативная модель была вероятностно непротиворечивой в среднем, необходимо и достаточно, чтобы математические ожидания длин всех детерминированных контуров были не положительными.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K(i)$ — контур, и $ML(K(i))$ — математическое ожидание его длины. Тогда производящая функция моментов для контура $K(i)$ есть $M_{ii}(s) = e^{sML(K(i))}$. Первая производная $M_{ii}(s)$ по s при $s = 0$ (характеризующая математическое ожидание длины контура) есть функция нечетная относительно знака длины контура. Следовательно, в этом же смысле нечетна и функция $\Psi_{ii}(s) = p_{ii}M_{ii}(s)$, где p_{ii} — вероятность «входа» в контур, а $p_b = 1 - p_{ii}$ — вероятность «выхода» из него.

Поскольку производящая функция эквивалентного фрагмента есть

$$\Psi_{ij}(s) = \Psi_b(s)/(1 - \Psi_{ii}(s)), \quad (12)$$

то при $p_{ii} < 1$ получаем

$$p_{ij} = \Psi_{ij}(0) = \Psi_b(0)/(1 - \Psi_{ii}(0)) = (1 - p_{ii})/(1 - p_{ii}) = 1,$$

т. е. из стохастического контура мы выходим с вероятностью 1.

Для определения математического ожидания длины эквивалентного фрагмента вычислим первый момент от (12) в точке $s = 0$:

$$\begin{aligned} \mu_1(j/i) &= [p_b(1 - p_{ii})ML(i, j) + p_b p_{ii}ML(K(i))] / (1 - p_{ii})^2 = \\ &= ML(i, j) + ML(K(i)) [p_{ii}/(1 - p_{ii})]. \end{aligned} \quad (13)$$

Таким образом, для определения среднего срока свершения события j , отождествляемого с выходом из контура, к длине пути, проходящего через событие i до события j , необходимо добавить величину $\delta L(K(i))$, где $L(K(i))$ — длина контура $K(i)$, а $\delta = [p_{ii}/(1 - p_{ii})]$.

Если контур детерминированный ($p_{ii} = 1$), то при положительных значениях $\Psi_{ii}(s)$ и ее производной из (13) получаем невозможность выхода из контура (бесконечность длины эквивалентного фрагмента). При неположительной длине контура $ML(K(i))$ вероятность выхода из него равна 1, и длина эквивалентной дуги лежит в пределах от $ML(i, j)$ до $ML(i, j) + |ML(K(i))|$.

Предполагая, что T_i имеют нормальное распределение с параметрами: математическое ожидание MT_i и дисперсия $\sigma^2 T_i$, введем более широкое понятие *вероятностная непротиворечивость модели ε* .

Будем говорить, что ЦАСМ ε -вероятностно непротиворечива, если существует $\varepsilon > 0$, так что для всех T_i , удовлетворяющих неравенству $|T_i - MT_i| < \varepsilon$, справедливы соотношения (1)–(2).

Теорема 3. *Для того чтобы циклическая альтернативная модель была ε -вероятностно непротиворечивой, необходимо и достаточно, чтобы математические ожидания длин всех детерминированных контуров удовлетворяли соотношению $ML(K(i)) \leq -4\varepsilon$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $K(i)$ — контур, и $ML(K(i))$ — математическое ожидание его длины. Выделим в контуре «положительный путь» и «обратную» дугу, и, не теряя общности, сделаем эквивалентное GERT-преобразование данного фрагмента сети, приведя его к виду, представленному на рис. 3.

Пусть для T_i и T_j , удовлетворяющих неравенствам

$$|T_i - MT_i| < \varepsilon, |T_j - MT_j| < \varepsilon, \quad (14)$$

справедливы соотношения (1), тогда они справедливы и для крайних значений T_i и T_j , минимизирующих левую часть (1), т. е. для $T_i = MT_i \pm \varepsilon$ и $T_j = MT_j \pm \varepsilon$:

$$MT_j - \varepsilon - (MT_i + \varepsilon) \geq M\psi_{ij} \quad \text{и} \quad MT_i - \varepsilon - (MT_j + \varepsilon) \geq M\psi_{ji}.$$

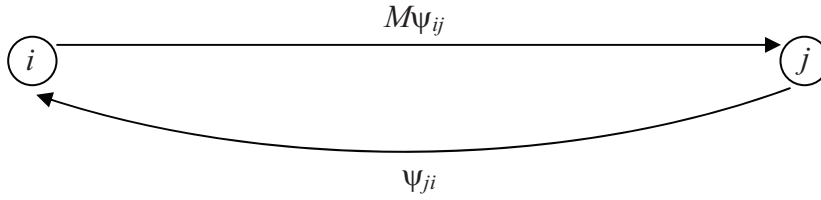


Рис. 3. Фрагмент стохастической сети с контуром, $M\psi_{ij}$ — математическое ожидание «положительной» части контура $K(i)$

Складывая неравенства, получаем:

$$-4\epsilon \geq M\psi_{ij} + M\psi_{ji} \approx ML(K(i)),$$

что доказывает необходимость утверждения теоремы 3.

Для доказательства достаточности положим, что $T_j = T_i + M\psi_{ij}$. Неравенство (1) для дуги (i, j) выполнено. Имеем $T_i - T_j = -M\psi_{ij}$.

Поскольку $M\psi_{ij} + M\psi_{ji} \approx ML(K(i)) \leq -4\epsilon$, то $-M\psi_{ij} \geq 4\epsilon + M\psi_{ji} \geq M\psi_{ji}$, откуда следует справедливость неравенства (1) для дуги (j, i) .

Приведем небольшой числовой пример, иллюстрирующий справедливость теоремы 3.

Пусть для фрагмента сети, представленного на рис. 3, $MT_i = 50$, $MT_j = 100$. Примем $\epsilon = 1$ (один день). Соотношение (1) для дуги (i, j) должно выполняться для всех T_i и T_j , удовлетворяющих неравенствам (14), а значит, и для тех, которые минимизируют левую часть в (1), т. е. для $T_i = 50 + 1 = 51$ и $T_j = 100 - 1 = 99$. Отсюда следует, что должно выполняться неравенство $M\psi_{ij} \leq T_j - T_i = 99 - 51 = 48$. С другой стороны, если рассматривать «обратную» дугу (j, i) и рассуждать аналогично, то (1) справедливо для дуги (j, i) при $T_i = 50 - 1 = 49$ и $T_j = 100 + 1 = 101$. Следовательно, также должно выполняться неравенство $M\psi_{ji} \leq T_i - T_j = 49 - 101 = -52$. Складывая полученные неравенства, окончательно получаем требуемое соотношение:

$$M\psi_{ij} + M\psi_{ji} \approx ML(K(i)) \leq 48 - 52 = -4 = -4\epsilon.$$

Вероятностная непротиворечивость модели в среднем является частным случаем ϵ -вероятностной непротиворечивости при $\epsilon = 0$. Это самый «сильный» случай вероятностной непротиворечивости. Чем больше ϵ , тем меньше шансов, что при практическом использовании модели не будет положительных контуров в сети, т. е. модель будет непротиворечивой. Из формулы достоверной вероятности следует: вероятность того, что $|T_i - MT_i| < \sigma T_i$, равна 0,683, вероятность того, что $|T_i - MT_i| < 2\sigma T_i$, равна 0,954, вероятность того, что $|T_i - MT_i| < 3\sigma T_i$, равна 0,997. Таким образом, при высокой степени риска и неопределенности проекта (относительно больших σ сроков свершения событий T_i) для обеспечения непротиворечивости модели следует внимательно анализировать контуры в сети и обеспечивать требования теоремы 3.

3.3. Статистическая непротиворечивость модели

При статистическом методе расчета параметров сетевой модели мы имеем дело с их p -квантильными оценками значений, которые являются теоретико-вероятностными

аналогами соответствующих показателей [8]. Будем говорить, что циклическая стохастическая модель *статистически непротиворечива с вероятностью p* , если для каждого события i существуют p -квантильные оценки сроков свершения событий $W_p(T_i)$, удовлетворяющие неравенствам

$$W_p(T_j) - W_p(T_i) \geq W_p(\psi_{ij}), \quad (15)$$

$$l_i \leq W_p(T_i) \leq L_i. \quad (16)$$

Здесь соотношения (15)–(16) являются вероятностными аналогами (1)–(2), $W_p(\psi_{ij})$ есть p -квантильная оценка длины дуги (i, j) .

Теорема 4. *Для того чтобы циклическая альтернативная модель была статистически непротиворечивой с вероятностью p , необходимо и достаточно, чтобы p -квантильные оценки длин всех детерминированных контуров удовлетворяли соотношению*

$$W_p(L(K(i))) \leq 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. После вычисления p -квантильных оценок вероятностная модель превращается в обобщенную сетевую модель, а для нее утверждение теоремы 4 справедливо [7].

Наличие альтернативных вершин (с возможным появлением стохастических контуров) в соответствии с леммой 1 не приводит к непротиворечивости сети, следовательно, теорема справедлива для любой ЦАСМ.

Понятие непротиворечивости сетевой модели очень важно для проектировщика сети. Как и в случае классической детерминированной сети, где могут появиться запрещенные контуры, и тогда временной расчет будет остановлен до устранения ошибки составления сетевой модели, так и при составлении циклической альтернативной модели следует учитывать требования теорем 1–4. Даже если при последующих расчетах сеть окажется противоречивой, это произойдет с запланированной малой вероятностью p . Расчеты будут остановлены, выданы рекомендации по корректировке сети и затем продолжены.

§ 4. Алгоритмы расчета временных параметров ЦАСМ

4.1. Планы ранних и поздних сроков

Для расчета ранних и поздних сроков свершения событий предлагается модифицированный алгоритм «Маятник». Идея модификации заключается в синтезе статистического метода расчета параметров, применяемого для вероятностных сетей [8], и алгоритма «Маятник», используемого в обобщенных сетях [7], и последующего применения его для ЦАСМ.

Применяемый в данном алгоритме метод статистических испытаний при всей его сравнительной простоте позволяет вычислить все необходимые временные параметры сетевой модели для очень сложной топологии сети — вероятностные параметры, альтернативные события, наличие стохастических и детерминированных контуров и пр. (рис. 4).

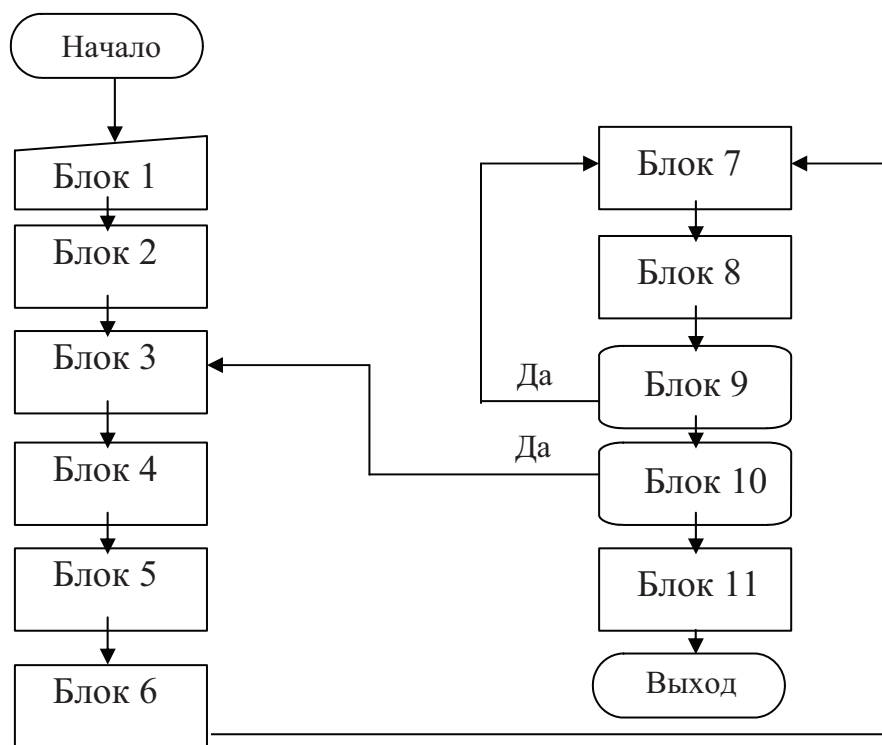


Рис. 4. Принципиальная блок-схема алгоритма для расчета p -квантильных оценок ранних сроков совершения событий

Блок 1. Ввод исходных данных (коэффициентов матрицы A , параметров распределения ψ_{ij} , уровня достоверности p). Упорядочение сети. Для небольших сетей вычисление $P(j)$ производится по формулам GERT-преобразований и (10).

Блок 2. Вычисление необходимого числа «розыгрышей» N для обеспечения заданной точности результатов. Прделанные расчеты показали, что при $p = 0,95$, $\varepsilon = 0,05$ получаем $N \approx 270$.

Блок 3. $v := v + 1$ (v — номер розыгрыша).

Блок 4. Розыгрыш v -го варианта случайных величин ψ_{ij} , каждой в соответствии с ее законом распределения, получение констант $\psi_{ij}^{(v)}$ — длины дуги (i, j) при v -м розыгрыше.

Блок 5. Розыгрыш для каждой альтернативной вершины i перехода в смежную вершину j (разыгрывается дискретная случайная величина p_{ij} , представленная i -ой строкой матрицы смежности A , $0 < p_{ij} < 1$ и $\sum_j p_{ij} = 1$). Выбранная дуга помечается, остальные из графа исключаются. Если в полученном графе образовался контур $K(i)$, содержащий хотя бы одну помеченную дугу, он является стохастическим, вычисляем его длину $L^{(v)}K(i)$ и опять для вершины i разыгрываем дискретную случайную величину p_{ij} . В соответствии с леммой 1 один и тот же стохастический контур при заданном уровне достоверности p может образоваться не более k раз, где k оценивается по формуле (11). k -кратную длину контура прибавляем к длине дуги, которую мы «разыграли» на шаге $(k + 1)$, и переходим к анализу другого стохастического контура (если он есть). При этом могут образоваться противоречия в сети (положительные детерминированные контуры), тогда в соответствии с (13) прибавляем δ -кратную длину контура, оценивая тем самым время совершения «выходного» из контура события в среднем.

Блок 6. Полученную детерминированную обобщенную сеть $G^{(v)}$ разбиваем на две сети $G_1^{(v)}$ и $G_2^{(v)}$ так, чтобы ни та, ни другая сеть не содержала контуров. Вершины в сети $G_1^{(v)}$ упорядочиваем по рангам и в соответствии с ними устанавливаем «правильную» нумерацию. Переносим эту нумерацию на сеть $G_2^{(v)}$ и на исходную $G^{(v)}$.

Блок 7. Для всех вершин i сети $G_1^{(v)}$ вычисляем ранние сроки свершения:

$$T_i^{0(v)} := \max_j \left\{ T_i^{0(v)}, T_j^{0(v)} + \psi_{ij}^{(v)} \right\}.$$

Блок 8. Прodelываем процедуры, аналогичные блоку 7, для вершин сети $G_2^{(v)}$.

Блок 9. Если результаты блоков 7 и 8 хоть по одному показателю не совпадают, то возвращаемся к блоку 7 (количество таких возвратов не превышает число обратных дуг в $G_2^{(v)}$), иначе — блок 10.

Блок 10. Если номер розыгрыша $v < N$, то переходим к блоку 3, иначе — к блоку 11.

Блок 11. Для каждой вершины i подсчитываем количество ее наступлений $N(i)$. Для детерминированных вершин, естественно, $N(i) = N$. $P(i) = N(i)/N$ — статистическая характеристика вероятности наступления события i , полученная методом имитационного моделирования. Из полученной совокупности $\{T_i^{0(v)}\}$ для каждой вершины i строим вариационный ряд. Фиксируем такое значение $T_i^{0(\xi)}$, чтобы $N_\xi/N(i) = p$, где N_ξ — число членов вариационного ряда, меньших $T_i^{0(\xi)}$. Величина $T_i^{0(\xi)}$ является искомым p -квантилем раннего срока совершения i -го события $W_p(T_i^0)$. Аналогично по вариационным рядам $\{\psi_{ij}^{(v)}\}$ строим p -квантильные оценки длин дуг $W_p(\psi_{ij})$.

На вход блока 6 поступает v -й вариант обобщенной сетевой модели $G^{(v)}$, и, собственно, блоки 6–9 представляют собой укрупненную блок-схему алгоритма «Маятник» для вычисления ранних сроков совершения событий в ОСМ. Подробно этот алгоритм изложен в [7], там же приведен алгоритм для вычисления поздних сроков совершения событий. Применяя этот алгоритм в блоках 7 и 8, получаем $T_i^{1(v)}$ — поздние сроки совершения событий для v -го варианта обобщенной сетевой модели, при этом блок 11 дает p -квантильные оценки поздних сроков свершения событий $W_p(T_i^1)$.

4.2. Планы минимальной продолжительности

Продолжительность $L(T^{(v)})$ любого допустимого плана $T^{(v)} = \{T_i^{(v)}\}$ v -го варианта сети $G^{(v)}$ определяется по формуле

$$L(T^{(v)}) = \max_{ij} |T_i^{(v)} - T_j^{(v)}|. \quad (17)$$

Заменяя в блок-схеме на рис. 4 блоки 6–9 на блок нахождения минимума функции (17), получаем план минимальной продолжительности для сети $G^{(v)}$ (или «сжатый» план). Величина

$$L(T^{*(v)}) = \min \max_{ij} |T_i^{(v)} - T_j^{(v)}|$$

является критическим временем сети $G^{(v)}$.

4.3. Вычисление резервов, коэффициентов напряженности работ, p -квантильных критических, резервных и промежуточных зон

Резервам времени для работы (i, j) здесь соответствуют их p -квантильные аналоги, вычисляемые по формулам

$$R_p^n(i, j) = W_p(T_j^n) - W_p(T_i^p) - W_p(\psi_{ij}) \quad \text{для полного резерва,}$$

$$R_p^c(i, j) = W_p(T_j^p) - W_p(T_i^p) - W_p(\psi_{ij}) \quad \text{для свободного резерва.}$$

p -квантильные коэффициенты напряженности работ вычисляются по формуле:

$$W_p(k_H(i, j)) = 1 - R_p^n(i, j) / (W_p(T_n^0) - W_p(T_{кр}(i, j))),$$

где $W_p(T_n^0)$ — p -квантильная оценка критического времени выполнения проекта, $W_p(T_{кр}(i, j))$ — p -квантильная оценка продолжительности совпадающего с критическим путем отрезка максимального пути, содержащего работу (i, j) . $0 \leq W_p(k_H(i, j)) \leq 1$, причем чем ближе $W_p(k_H(i, j))$ к 1, тем относительно меньше резерва для работы (i, j) , следовательно, выше риск ее невыполнения в заданные сроки.

Затем определяются p -квантильные критическая, резервная и промежуточная зоны:

- p -квантильная *критическая зона* содержит работы с $W_p\{K_{ij}^H\} > p_1$, где значение p_1 близко к 1 ($p_1 \approx 0,8 - 0,9$);
- p -квантильная *зона резервов* объединяет работы со значениями $W_p\{K_{ij}^H\} < p_2$, где p_2 близко к 0 ($p_2 \approx 0,2$);
- p -квантильная *промежуточная зона* включает работы с $p_2 \leq W_p\{K_{ij}^H\} \leq p_1$.

Заключение

С помощью ЦАСМ можно учесть альтернативный характер как технологии производства работ, так и способов выделения ресурсов на работы и определить их оптимальное количество и темпы использования.

Если объектом управления является программа, портфель или комплекс проектов и если требуется каждый проект в отдельности и комплекс проектов в целом реализовать в максимально сжатые сроки, то строятся сжатые планы для каждого проекта, а затем для комплекса в целом.

Предлагаемые алгоритмы с учетом степени риска (величин дисперсии сроков свершения событий) позволяют провести анализ и построить непротиворечивые модели процесса реализации комплекса проектов, что, в свою очередь, способствует формированию оптимальных календарных планов их выполнения.

Список литературы

1. Moder J. J., Philips C. R., Devis E. W. Project Management with CPM, PERT and Precedence Diagramming. N. Y.: Van Nostrand Reinhold, 1983.
2. Воронаев В. И. Управление проектами в России. М.: Аланс, 1995.

3. Бурков В. Н., Воропаев В. И., Гельруд Я. Д., Сежлетова Г. И. и др. Математические основы управления проектами. М.: Высш. шк., 2005.
4. Зуховицкий С. И., Радчик И. А. Математические методы сетевого планирования. М.: Наука, 1965.
5. Домбкин Д. Менеджеры комплексных проектов // Управление проектами и программами. 2007. № 3 (11); 2007. № 4 (12); 2008. № 1 (13).
6. *Dombkins D. H.* Complex Project Managers // Presented at the Defense Partnerships Conference. L., 2007.
7. Воропаев В. И., Нудельман М. П., Орел Т. Я. Задачи и методы временного анализа календарных планов на обобщенных сетевых моделях // Экономико-математические методы и АСУ в строительстве. М.: НИИЭС, 1986. С. 82–108.
8. Голенко Д. И. Статистические методы сетевого планирования и управления. М.: Наука, 1968.
9. Филлипс Д., Гарсиа-Диас А. Методы анализа сетей. М.: Мир, 1984.
10. Воропаев В. И., Любкин С. М., Гельруд Я. Д., Титаренко Б. П., Голенко Гинзбург Д. И. Новые модели и методы для управления проектами // Труды международного симпозиума «СОВНЕТ–99». Управление проектами: Восток-Запад — грань тысячелетий. SOVNET. М., 1999. Т. 1. С. 295–312.
11. *Voropaev V. I., Gelrud Ya. D.* Cyclic Alternative Network Models for Project Management // Proceedings of the 17th World Congress on Project Management, June 4–6. 2003.

Материал поступил в редколлегию 28.04.2009

Адрес автора

ГЕЛЬРУД Яков Давидович

Южно-уральский государственный университет

пр. им. В. И. Ленина, 76, Челябинск, 76454080, Россия

e-mail: gelrud@mail.ru