УДК 517.925

Е. П. Волокитин

ОБ УСЛОВИЯХ НЕВЫРОЖДЕННОСТИ ДЛЯ БИФУРКАЦИИ АНДРОНОВА – ХОПФА*

Рассмотрены различные способы вычисления ляпуновских величин и показана эквивалентность полученных формул применительно к исследованию бифуркациии Андронова – Хопфа.

Ключевые слова: бифуркация Андронова – Хопфа, ляпуновские величины, константы Пуанкаре – Ляпунова.

Рассмотрим плоскую динамическую систему

$$\dot{x} = p(x, y, \alpha), \quad \dot{y} = q(x, y, \alpha), \quad \alpha \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

у которой начало координат является точкой покоя при всех значениях параметра α.

Если в системе (1) при $\alpha = 0$ имеет место бифуркация Андронова – Хопфа, то матрица линейного приближения имеет пару чисто мнимых собственных чисел: $\lambda = \pm\omega i$, $\omega > 0$. Без ущерба для общности можно считать, что $\omega = 1$, и система (1) при $\alpha = 0$ имеет вид

$$\dot{x} = y + p_{20}x^2 + p_{11}xy + p_{02} + \dots, \quad \dot{y} = -x + q_{20}x^2 + q_{11}xy + q_{02} + \dots \tag{2}$$

Комплексная нормальная форма такой системы имеет вид

$$\dot{w} = iw + \ell_1 w|w|^2 + O(|w|^4), \quad w \in \mathbb{C}^1.$$

Величина ℓ_1 называется первым ляпуновским коэффициентом. Если $\ell_1 \neq 0$ и система (1) зависит от параметра α_1 невырожденным образом, то она локально топологически эквивалентна нормальной форме

$$\dot{w} = (\beta_1 + i)w + \ell_1 w|w|^2.$$

Такая нормальная форма описывает бифуркацию коразмерности один возникновения единственного предельного цикла вокруг состояния равновесия, когда параметр β_1 проходит через бифуркационное значение $\beta_1 = 0$. Направление бифуркации и устойчивость возникающего предельного цикла определяются знаком коэффициента ℓ_1.

Обобщенная бифуркация Андронова – Хопфа в системе (1) характеризуется тем, что $\lambda = \pm i$, $\ell_1 = 0$. В таком случае при $\alpha = 0$ нормальная комплексная форма имеет вид

$$\dot{w} = iw + \ell_2 w|w|^4 + O(|w|^6), \quad w \in C^1,$$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00070), Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный интеграционный проект № 107, 119).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 3–14

где второй ляпуновский коэффициент ℓ_2 действительный. Если $\ell_2 \neq 0$, то в ситуации общего положения система (1) эквивалентна нормальной форме

$$\dot{w} = \beta_1 + iw + \beta_2 w|w|^2 + \ell_2 w|w|^4.$$

Такая форма описывает бифуркацию коразмерности два двукратного сложного фокуса. В частности, эта бифуркация гарантирует наличие на плоскости параметров кривой кратных циклов, где сливаются и исчезают через двукратный негиперболический цикл два предельных цикла. Эту бифуркацию иногда называют также бифуркацией Баутина.

По поводу более детального описания этих бифуркаций см., например, [1].

Мы видим, что при рассмотрении бифуркации Андронова–Хопфа коразмерности один и обобщенной бифуркации Андронова–Хопфа коразмерности два с необходимостью приходится вычислять первый и второй ляпуновские коэффициенты ℓ_1, ℓ_2, которые иногда называют также ляпуновскими (фокусными) величинами.

В [2] приведены явные формулы, позволяющие вычислить в символьном виде коэффициенты ℓ_1, ℓ_2 в терминах коэффициентов p_{ij}, q_{ij} правых частей системы (2). Применение этих формул дает

$$\ell_1=(1/2)(-p_{02}p_{11} + p_{12} - p_{11}p_{20} + 3p_{30} - 2p_{02}q_{02} + 3q_{03} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{11}q_{20} + q_{21});$$

$$\ell_2 = -(1/9)(20p_{02}^3p_{11} - 39p_{02}p_{03}p_{11} + 18p_{04}p_{11} + 5p_{02}p_{11}^3 - 20p_{02}^2p_{12} + 9p_{03}p_{12} - 5p_{11}^2p_{12} +$$
$$30p_{02}p_{13} - 18p_{14} + 4p_{02}^2p_{11}p_{20} - 33p_{03}p_{11}p_{20} + 5p_{11}^3p_{20} - 14p_{02}p_{12}p_{20} + 42p_{13}p_{20} - 32p_{02}p_{11}p_{20}^2 -$$
$$2p_{12}p_{20}^2 - 16p_{11}p_{20}^3 - 15p_{02}p_{11}p_{21} + 9p_{12}p_{21} - 21p_{11}p_{20}p_{21} + 6p_{11}p_{22} + 30p_{02}^2p_{30} - 27p_{03}p_{30} -$$
$$3p_{11}^2p_{30} + 102p_{02}p_{20}p_{30} + 48p_{20}^2p_{30} + 9p_{21}p_{30} + 18p_{02}p_{31} + 54p_{20}p_{31} - 18p_{32} - 30p_{11}p_{40} - 90p_{50} +$$
$$40p_{02}^3q_{02} - 78p_{02}p_{03}q_{02} + 36p_{04}q_{02} - 27p_{02}p_{11}^2q_{02} + 25p_{11}p_{12}q_{02} - 32p_{02}^2p_{20}q_{02} - 48p_{03}p_{20}q_{02} -$$
$$31p_{11}^2p_{20}q_{02} - 92p_{02}p_{20}^2q_{02} - 36p_{20}^3q_{02} + 30p_{02}p_{21}q_{02} + 60p_{20}p_{21}q_{02} - 24p_{22}q_{02} + 33p_{11}p_{30}q_{02} -$$
$$132p_{40}q_{02} - 90p_{02}p_{11}q_{02}^2 + 52p_{12}q_{02}^2 - 46p_{11}p_{20}q_{02}^2 + 78p_{30}q_{02}^2 - 32p_{02}q_{02}^3 + 36p_{20}q_{02}^3 - 60p_{02}^2q_{03} +$$
$$27p_{03}q_{03} + 3p_{11}^2q_{03} + 18p_{02}p_{20}q_{03} + 78p_{20}^2q_{03} - 9p_{21}q_{03} + 57p_{11}q_{02}q_{03} + 48q_{02}^2q_{03} + 120p_{02}q_{04} +$$
$$132p_{20}q_{04} - 90q_{05} + p_{02}^2p_{11}q_{11} - 12p_{03}p_{11}q_{11} - p_{02}p_{12}q_{11} + 12p_{13}q_{11} - 18p_{02}p_{11}p_{20}q_{11} + p_{12}p_{20}q_{11} -$$
$$19p_{11}p_{20}^2q_{11} + 51p_{02}p_{30}q_{11} + 57p_{20}p_{30}q_{11} - 18p_{02}^2q_{02}q_{11} - 15p_{03}q_{02}q_{11} + p_{11}^2q_{02}q_{11} + 8p_{02}p_{20}q_{02}q_{11} +$$
$$46p_{20}^2q_{02}q_{11} - 3p_{21}q_{02}q_{11} + 19p_{11}q_{02}^2q_{11} + 16q_{02}^3q_{11} + 27p_{02}q_{03}q_{11} + 33p_{20}q_{03}q_{11} + 30q_{04}q_{11} -$$
$$p_{02}p_{11}q_{11}^2 + p_{12}q_{11}^2 - p_{11}p_{20}q_{11}^2 + 3p_{30}q_{11}^2 + 27p_{02}q_{02}q_{11}^2 + 31p_{20}q_{02}q_{11}^2 - 3q_{03}q_{11}^2 - 5q_{02}q_{11}^3 -$$
$$9p_{02}p_{11}q_{12} + 9p_{12}q_{12} - 3p_{11}p_{20}q_{12} + 9p_{30}q_{12} + 42p_{02}q_{02}q_{12} + 60p_{20}q_{02}q_{12} - 9q_{03}q_{12} - 21q_{02}q_{11}q_{12} -$$
$$54q_{02}q_{13} - 23p_{02}p_{11}^2q_{20} + 23p_{11}p_{12}q_{20} + 20p_{02}^2p_{20}q_{20} - 18p_{03}p_{20}q_{20} - 27p_{11}^2p_{20}q_{20} + 68p_{02}p_{20}^2q_{20} +$$
$$32p_{20}^3q_{20} + 12p_{02}p_{21}q_{20} + 42p_{20}p_{21}q_{20} - 12p_{22}q_{20} + 27p_{11}p_{30}q_{20} - 120p_{40}q_{20} - 80p_{02}p_{11}q_{02}q_{20} +$$
$$46p_{12}q_{02}q_{20} - 8p_{11}p_{20}q_{02}q_{20} + 18p_{30}q_{02}q_{20} - 68p_{02}q_{02}^2q_{20} + 92p_{20}q_{02}^2q_{20} + 51p_{11}q_{03}q_{20} +$$
$$102q_{02}q_{03}q_{20} + 10p_{02}^2q_{11}q_{20} - 9p_{03}q_{11}q_{20} + p_{11}^2q_{11}q_{20} + 80p_{02}p_{20}q_{11}q_{20} + 90p_{20}^2q_{11}q_{20} -$$
$$9p_{21}q_{11}q_{20} + 18p_{11}q_{02}q_{11}q_{20} + 32q_{02}^2q_{11}q_{20} + 23p_{02}q_{11}^2q_{20} + 27p_{20}q_{11}^2q_{20} - 5q_{11}^3q_{20} +$$
$$12p_{02}q_{12}q_{20} + 30p_{20}q_{12}q_{20} - 15q_{11}q_{12}q_{20} - 18q_{13}q_{20} - 10p_{02}p_{11}q_{20}^2 + 10p_{12}q_{20}^2 + 18p_{11}p_{20}q_{20}^2 -$$
$$60p_{30}q_{20}^2 - 20p_{02}q_{02}q_{20}^2 + 32p_{20}q_{02}q_{20}^2 + 30q_{03}q_{20}^2 - p_{11}q_{11}q_{20}^2 - 4q_{02}q_{11}q_{20}^2 - 40p_{20}q_{20}^3 -$$

$$20q_{11}q_{20}^3+10p_{02}^2q_{21}-9p_{03}q_{21}+p_{11}^2q_{21}+46p_{02}p_{20}q_{21}+52p_{20}^2q_{21}-9p_{21}q_{21}+p_{11}q_{02}q_{21}-2q_{02}^2q_{21}+$$
$$23p_{02}q_{11}q_{21}+25p_{20}q_{11}q_{21}-5q_{11}^2q_{21}-9q_{12}q_{21}-p_{11}q_{20}q_{21}-14q_{02}q_{20}q_{21}-20q_{20}^2q_{21}+12p_{02}q_{22}+$$
$$24p_{20}q_{22}-6q_{11}q_{22}-18q_{23}-9p_{02}p_{11}q_{30}+9p_{12}q_{30}-15p_{11}p_{20}q_{30}-27p_{30}q_{30}-18p_{02}q_{02}q_{30}-$$
$$48p_{20}q_{02}q_{30}+27q_{03}q_{30}-12p_{11}q_{11}q_{30}-33q_{02}q_{11}q_{30}-78p_{20}q_{20}q_{30}-39q_{11}q_{20}q_{30}-9q_{21}q_{30}-$$
$$12p_{11}q_{31}-42q_{02}q_{31}-30q_{20}q_{31}-36p_{20}q_{40}-18q_{11}q_{40}-18q_{41}).$$

Отметим, что приведенные результаты совпадают с результатами других авторов, относящимися к подсчету различными методами ляпуновских величин на основе их классического определения как коэффициентов в разложении функции последования

$$\rho=\rho_0+\alpha_3\rho_0^3+\alpha_5\rho_0^5+\ldots$$

(см., например, [3–8] и др.).

Так, например,

$$\alpha_3=\frac{\pi}{4}(-p_{02}p_{11}+p_{12}-p_{11}p_{20}+3p_{30}-2p_{02}q_{02}+3q_{03}+q_{02}q_{11}+2p_{20}q_{20}+q_{11}q_{20}+q_{21}).$$

Вновь рассмотрим плоскую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=y+P(x,y)=y+\sum_{i+j\geq 2}p_{ij}x^iy^j,\quad \dot{y}=-x+Q(x,y)=-x+\sum_{i+j\geq 2}q_{ij}x^iy^j, \tag{3}$$

имеющую в начале координат $O(0,0)$ особую точку с чисто мнимыми характеристическими корнями $\lambda=\pm i$.

Согласно [9], чтобы охарактеризовать поведение траекторий системы (3) в окрестности начала координат, можно построить функцию Ляпунова вида

$$F(x,y)=(x^2+y^2)/2+f_{30}x^3+f_{21}x^2y+f_{12}xy^2+f_{03}y^3+\ldots,$$

производная которой в силу системы (3) имеет вид

$$dF\equiv\frac{\partial F}{\partial x}(y+P(x,y))+\frac{\partial F}{\partial y}(-x+Q(x,y))=$$
$$=D_1(x^4+y^4)+D_2(x^6+y^6)+D_3(x^8+y^8)+\ldots \tag{4}$$

Знак первого из коэффициентов D_i, отличного от нуля, определяет устойчивость сложного фокуса; в том случае, если все коэффициенты D_i равны нулю, начало координат является особой точкой типа центр системы (3).

Алгоритм построения функции $F(x,y)$ и коэффициентов D_i выглядит следующим образом.

Пусть

$$P(x,y)=\sum_{k\geq 2}P_k(x,y),\quad Q(x,y)=\sum_{k\geq 2}Q_k(x,y),\quad F(x,y)=\sum_{k\geq 2}F_k(x,y),$$
$$\frac{\partial F}{\partial x}(y+P(x,y))+\frac{\partial F}{\partial y}\Big(-x+Q(x,y)\Big)=\sum_{k\geq 2}d_kF(x,y),$$

где $P_k(x,y),Q_k(x,y),F_k(x,y),d_kF(x,y)$ — однородные многочлены степени k.

Очевидно, $d_2F \equiv 0$.

Далее

$$d_3F = \frac{\partial F_3}{\partial x}y - \frac{\partial F_3}{\partial y}x + \frac{\partial F_2}{\partial x}P_2(x,y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}Q_2(x,y) =$$
$$= \frac{\partial F_3}{\partial x}y - \frac{\partial F_3}{\partial y}x + g_{30}x^3 + g_{21}x^2y + g_{12}xy^2 + g_{03}y^3 =$$
$$= (-f_{21}+g_{30})x^3+(3f_{30}-2f_{12}+g_{21})x^2y+(2f_{21}-3f_{03}+g_{12})xy^2+(f_{12}+g_{03})y^3,$$

где коэффициенты g_{ij} известны (могут быть выражены через коэффициенты многочленов $P_2(x,y), Q_2(x,y)$).

Для того, чтобы выполнялось (4), мы с необходимостью должны иметь $d_3F \equiv 0$, что эквивалентно следующей системе уравнений относительно неизвестных $f_{30}, f_{21}, f_{12}, f_{03}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{30} \\ f_{21} \\ f_{12} \\ f_{03} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{30} \\ g_{21} \\ g_{12} \\ g_{03} \end{pmatrix}.$$

Система имеет ненулевой определитель, что позволяет нам найти коэффициенты $f_{30}, f_{21}, f_{12}, f_{03}$.

Далее

$$d_4F = \frac{\partial F_4}{\partial x}y - \frac{\partial F_4}{\partial y}x + g_{40}x^4 + g_{31}x^3y + g_{22}x^2y^2 + g_{13}xy^3 + g_{04}y^4,$$

где коэффициенты g_{ij} известны (могут быть выражены через коэффициенты многочленов $P_2(x,y)$, $P_3(x,y), Q_2(x,y), Q_3(x,y)$ и уже найденные коэффициенты $f_{30}, f_{21}, f_{12}, f_{03}$ функции $F(x,y)$).

Для того, чтобы выполнялось (4), мы должны иметь $d_4F \equiv D_1(x^4+y^4)$, что эквивалентно системе уравнений

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{40} \\ f_{31} \\ f_{22} \\ f_{13} \\ f_{04} \end{pmatrix} - D_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{40} \\ g_{31} \\ g_{22} \\ g_{13} \\ g_{04} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Мы имеем линейную систему уравнений пятого порядка относительно шести неизвестных $f_{40}, f_{31}, f_{22}, f_{13}, f_{04}, D_1$. Нетрудно показать, что ранг этой системы равен пяти, и мы можем выразить через f_{04} все остальные неизвестные. Точнее, неизвестные f_{31}, f_{13}, D_1 определяются однозначно; для определения коэффициентов f_{40}, f_{22}, f_{04} получаем систему из двух линейных уравнений с тремя неизвестными ранга 2

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{40} \\ f_{22} \\ f_{04} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{31} \\ g_{13} \end{pmatrix},$$

которая однозначно разрешима, если зафиксировать одно из неизвестных. Для определённости можно положить $f_{04} = 0$.

Продолжая аналогичным образом, мы сможем определить коэффициенты f_{ij}, D_i с любыми наперед заданными индексами. При этом коэффициенты однородных многочленов $F_k(x, y)$ с нечетными индексами k, находятся однозначно, как это имело место в случае $k = 3$. В случае четного $k = 2l$ коэффициенты $f_{k-1,1}, f_{k-3,3}, \dots, f_{1,k-1}$ и величина D_{l-1} находятся из получающейся линейной системы однозначно, оставшиеся коэффициенты однозначно выражаются, если положить $f_{0k} = 0$.

Чтобы убедиться в справедливости этих фактов, укажем вначале, что имеет место следующее равенство:

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} 0 & a_k & 0 & . & 0 & 0 \\ b_k & 0 & a_{k-1} & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & b_{k-1} & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & b_1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{l+1} a_1 a_3 \dots a_n b_1 b_3 \dots b_n, \\ \text{если } k = 2l+1, \\ \\ 0, \\ \text{если } k = 2l. \end{cases} \tag{6}$$

Справедливость равенства (6) вытекает из соотношения

$$\Delta_k = -a_k b_k \Delta_{k-2},$$

которое может быть проверенно непосредственно.

Отсюда сразу ясно, что коэффициенты многочленов F_{2l+1} однозначно определяются из соответствующей системы уравнений, поскольку в этом случае ее определитель есть

$$\Delta^1_{2l+1} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 2l+1 & 0 & -2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -(2l+1) \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \end{vmatrix} = ((2l+1)!!)^2 \neq 0.$$

Если соответствующую линейную систему для коэффициентов $f_{2l,0}, \dots, f_{0,2l}$ и величины D_{l-1} дополнить уравнением $f_{0,2l} = 0$, то получим систему

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ 2l & 0 & -2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l-1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -2l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{2l,0} \\ f_{2l-1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ f_{1,2l-1} \\ f_{0,2l} \\ D_{l-1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{2l,0} \\ g_{2l-1,1} \\ \cdot \\ \cdot \\ g_{2,2l-2} \\ g_{0,2l} \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

(ср. с (5)).

Вычислим определитель этой системы.

$$\Delta^1_{2l} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & -1 \\ 2l & 0 & -2 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l-1 & 0 & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -2l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 & -1 \\ 2l & 0 & -2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 2l-1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 2l & 0 & -2 & \cdot & 0 \\ 0 & 2l-1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 \\ 2l & 0 & -2 & \cdot & 0 \\ 0 & 2l-1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 \end{vmatrix} = 2(2l)!$$

Последнее слагаемое вычислено с использованием (6).

Таким образом, и в случае четного k в предположении, что $f_{0,k} = 0$, коэффициенты многочлена $F_k(x, y)$ и величина D_{l-1} определяются из системы (7) единственным образом.

Изложенный алгоритм может быть реализован в виде программы для персонального компьютера в рамках системы *Mathematica*.

```
constPL[n_]:=
Module[{dF,ff,fF,x,y,pP,qQ,d},
       fF[2]:=(x^2+y^2)/2;
       fF[i_]:=Sum[ff[i-j,j]*x^(i-j)*y^j,{j,0,i}];
       pP[1]:=y;
       pP[i_]:=Sum[p[i-j,j]*x^(i-j)*y^j,{j,0,i}];
       qQ[1]:=-x;
       qQ[i_]:=Sum[q[i-j,j]*x^(i-j)*y^j,{j,0,i}];
       dF[k_]:=(Sum[D[fF[i],x]*pP[k+1-i],{i,2,k}]+
                Sum[D[fF[i],y]*qQ[k+1-i],{i,2,k}])//Expand;
       Do[
          Solve[Table[Coefficient[dF[k],x^(k-j) y^j],{j,0,k}]
                ==Table[0,{k+1}],
                Table[ff[k-j,j],{j,0,k}]
               ]/.Rule->Set;
          Solve[Table[Coefficient[dF[k+1],x^(k+1-j)*y^j],{j,0,k+1}]
                ==Flatten[{d[k],Table[0,{k}],d[k]}]&&ff[0,k+1]==0,
                Flatten[{Table[ff[k+1-j,j],{j,0,k+1}],d[k]}]
               ]/.Rule->Set,
          {k,3,2n+1,2}];
          Table[Factor[Together[d[k]]],{k,3,2n+1,2}]
         ]
```

Процедура `constPL[n]` возвращает список коэффициентов $\{D_1, \dots, D_n\}$. С применением этой процедуры мы нашли коэффициенты D_1, D_2.

$$\begin{gathered}
D_1 = (1/6)(-p_{02}p_{11} + p_{12} - p_{11}p_{20} + 3p_{30} - 2p_{02}q_{02} + 3q_{03} + q_{02}q_{11} + 2p_{20}q_{20} + q_{11}q_{20} + q_{21});\\
D_2 = (1/90)(10p_{02}^3p_{11} + 30p_{02}p_{03}p_{11} - 9p_{04}p_{11} - 10p_{02}^2p_{12} - 15p_{03}p_{12} - 15p_{02}p_{13} + 9p_{14}+\\
97p_{02}^2p_{11}p_{20} + 27p_{03}p_{11}p_{20} - 72p_{02}p_{12}p_{20} - 21p_{13}p_{20} + 176p_{02}p_{11}p_{20}^2 - 80p_{12}p_{20}^2 + 89p_{11}p_{20}^3\\
+ 15p_{02}p_{11}p_{21} - 12p_{12}p_{21} + 18p_{11}p_{20}p_{21} - 3p_{11}p_{22} - 75p_{02}^2p_{30} - 18p_{03}p_{30} - 6p_{11}^2p_{30}-\\
288p_{02}p_{20}p_{30} - 267p_{20}^2p_{30} - 27p_{21}p_{30} - 9p_{02}p_{31} - 27p_{20}p_{31} + 9p_{32} + 15p_{11}p_{40} + 45p_{50}+\\
20p_{02}^3q_{02} + 60p_{02}p_{03}q_{02} - 18p_{04}q_{02} + 34p_{02}p_{11}^2q_{02} - 28p_{11}p_{12}q_{02} + 174p_{02}^2p_{20}q_{02} + 24p_{03}p_{20}q_{02}+\\
31p_{11}^2p_{20}q_{02} + 208p_{02}p_{20}^2q_{02} + 18p_{20}^3q_{02} - 30p_{20}p_{21}q_{02} + 12p_{22}q_{02} - 63p_{11}p_{30}q_{02} + 66p_{40}q_{02}+\\
121p_{02}p_{11}q_{02}^2 - 71p_{12}q_{02}^2 + 68p_{11}p_{20}q_{02}^2 - 174p_{30}q_{02}^2 + 106p_{02}q_{02}^3 - 18p_{20}q_{02}^3 - 30p_{02}^2q_{03}-\\
45p_{03}q_{03} - 9p_{11}^2q_{03} - 246p_{02}p_{20}q_{03} - 282p_{20}^2q_{03} - 18p_{21}q_{03} - 75p_{11}q_{02}q_{03} - 159q_{02}^2q_{03}-\\
60p_{02}q_{04} - 66p_{20}q_{04} + 45q_{05} + 31p_{02}^2p_{11}q_{11} + 6p_{03}p_{11}q_{11} - 31p_{02}p_{12}q_{11} - 6p_{13}q_{11}+\\
110p_{02}p_{11}p_{20}q_{11} - 70p_{12}p_{20}q_{11} + 79p_{11}p_{20}^2q_{11} - 120p_{02}p_{30}q_{11} - 237p_{20}p_{30}q_{11} + 52p_{02}^2q_{02}q_{11}-\\
3p_{03}q_{02}q_{11} - 3p_{11}^2q_{02}q_{11} + 56p_{02}p_{20}q_{02}q_{11} - 104p_{20}^2q_{02}q_{11} - 6p_{21}q_{02}q_{11} - 25p_{11}q_{02}^2q_{11}-\\
53q_{02}^3q_{11} - 108p_{02}q_{03}q_{11} - 225p_{20}q_{03}q_{11} - 15q_{04}q_{11} + 21p_{02}p_{11}q_{11}^2 - 21p_{12}q_{11}^2 + 21p_{11}p_{20}q_{11}^2-\\
63p_{30}q_{11}^2 - 4p_{02}q_{02}q_{11}^2 - 85p_{20}q_{02}q_{11}^2 - 60q_{03}q_{11}^2 - 18q_{02}q_{11}^3 + 15p_{02}p_{11}q_{12} - 15p_{12}q_{12}+\\
12p_{11}p_{20}q_{12} - 36p_{30}q_{12} - 30p_{20}q_{02}q_{12} - 27q_{03}q_{12} + 27q_{02}q_{13} + 25p_{02}p_{11}^2q_{20} - 25p_{11}p_{12}q_{20}-\\
50p_{02}^2p_{20}q_{20} - 12p_{03}p_{20}q_{20} + 22p_{11}^2p_{20}q_{20} - 192p_{02}p_{20}^2q_{20} - 178p_{20}^3q_{20} - 6p_{02}p_{21}q_{20}-\\
36p_{20}p_{21}q_{20} + 6p_{22}q_{20} - 54p_{11}p_{30}q_{20} + 60p_{40}q_{20} + 110p_{02}p_{11}q_{02}q_{20} - 66p_{12}q_{02}q_{20}+\\
16p_{11}p_{20}q_{02}q_{20} - 138p_{30}q_{02}q_{20} + 120p_{02}q_{02}^2q_{20} - 136p_{20}q_{02}^2q_{20} - 66p_{11}q_{03}q_{20} - 180q_{02}q_{03}q_{20}-\\
25p_{02}^2q_{11}q_{20} - 6p_{03}q_{11}q_{20} - 3p_{11}^2q_{11}q_{20} - 182p_{02}p_{20}q_{11}q_{20} - 265p_{20}^2q_{11}q_{20} - 3p_{21}q_{11}q_{20}-\\
38p_{11}q_{02}q_{11}q_{20} - 104q_{02}^2q_{11}q_{20} - 43p_{02}q_{11}^2q_{20} - 124p_{20}q_{11}^2q_{20} - 18q_{11}^3q_{20} - 6p_{02}q_{12}q_{20}-\\
36p_{20}q_{12}q_{20} - 3q_{11}q_{12}q_{20} + 9q_{13}q_{20} + 25p_{02}p_{11}q_{20}^2 - 25p_{12}q_{20}^2 - 16p_{11}p_{20}q_{20}^2 - 30p_{30}q_{20}^2+\\
50p_{02}q_{02}q_{20}^2 - 102p_{20}q_{02}q_{20}^2 - 75q_{03}q_{20}^2 - 13p_{11}q_{11}q_{20}^2 - 61q_{02}q_{11}q_{20}^2 - 20p_{20}q_{20}^3-\\
10q_{11}q_{20}^3 - 25p_{02}^2q_{21} - 6p_{03}q_{21} - 3p_{11}^2q_{21} - 102p_{02}p_{20}q_{21} - 107p_{20}^2q_{21} - 3p_{21}q_{21} - 16p_{11}q_{02}q_{21}-\\
44q_{02}^2q_{21} - 43p_{02}q_{11}q_{21} - 82p_{20}q_{11}q_{21} - 18q_{11}^2q_{21} - 6q_{12}q_{21} - 13p_{11}q_{20}q_{21} - 36q_{02}q_{20}q_{21}-\\
10q_{20}^2q_{21} - 6p_{02}q_{22} - 12p_{20}q_{22} + 3q_{11}q_{22} + 9q_{23} + 12p_{02}p_{11}q_{30} - 12p_{12}q_{30} + 15p_{11}p_{20}q_{30}-\\
9p_{30}q_{30} + 24p_{02}q_{02}q_{30} + 24p_{20}q_{02}q_{30} - 36q_{03}q_{30} + 6p_{11}q_{11}q_{30} + 9q_{02}q_{11}q_{30} + 24p_{20}q_{20}q_{30}+\\
12q_{11}q_{20}q_{30} - 3q_{21}q_{30} + 6p_{11}q_{31} + 21q_{02}q_{31} + 15q_{20}q_{31} + 18p_{20}q_{40} + 9q_{11}q_{40} + 9q_{41}). \qquad (8)
\end{gathered}$$

Как было отмечено, коэффициент D_1 определяется однозначно, значение коэффициента D_2 зависит от выбора величины f_{04}. Оказывается, если выбрать f_{04} произвольно, то получается коэффициент D_2', связанный со значением найденного коэффициента D_2 следующим образом

$$D_2' = D_2 + 72 f_{04} D_1. \qquad (9)$$

Непосредственные вычисления показывают, что имеют место следующие соотношения:

$$3D_1 = \ell_1, \quad 180D_2 = 9\ell_2 - R\ell_1,$$

$$R = 40p_{02}^2 + 21p_{03} + 5p_{11}^2 + 158p_{02}p_{20} + 162p_{20}^2 + 15p_{21} + 31p_{11}q_{02} + 90q_{02}^2 + 63p_{02}q_{11}+$$

$$139p_{20}q_{11} + 41q_{11}^2 + 21q_{12} + 27p_{11}q_{20} + 86q_{02}q_{20} + 40q_{20}^2 + 15q_{30}.$$

Мы видим, что величины D_1, ℓ_1 имеют один и тот же знак и обращаются в ноль одновременно. Если же D_1 (а значит, и ℓ_1) обращаются в ноль, то величины D_2, ℓ_2 имеют один и тот же знак и обращаются в ноль одновременно. Отсюда вытекает, что при рассмотрении бифуркации Андронова – Хопфа коразмерности один и обобщенной бифуркации Андронова – Хопфа коразмерности два рассмотрение первой и второй ляпуновских величин ℓ_1, ℓ_2 может быть заменено рассмотрением коэффициентов D_1, D_2, которые можно вычислять по полученным нами формулам (8) или непосредственно с помощью процедуры `constPL[n]`.

Пусть имеется система

$$\begin{aligned} \dot u &= f(u,v) \equiv f_{10}u + f_{01}v + f_{20}u^2 + f_{11}uv + f_{02}v^2 + \dots \\ \dot v &= g(u,v) \equiv g_{10}u + g_{01}v + g_{20}u^2 + g_{11}uv + g_{02}v^2 + \dots, \end{aligned} \tag{10}$$

где функции $f(u,v)$, $g(u,v)$ достаточно гладкие, и $f_v(0,0) = f_{01} \neq 0$. В таком случае гладкой заменой переменных $x = u$, $y = f(u,v)$ система (10) приводится к виду

$$\dot x = y, \quad \dot y = \tilde q_{10}x + \tilde q_{01}y + \tilde q_{20}x^2 + \tilde q_{11}xy + \tilde q_{02}y^2 + \dots \tag{11}$$

Как показывает наш опыт, в ряде случаев система (11) лучше поддается аналитическому и численному исследованию. Например, в некоторых случаях мы получаем систему льенаровского типа — объект, сравнительно подробно изученный в рамках качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Далее, такая форма записи системы «близка» к нормальной форме для случая вырождений начала координат с нильпотентной клеткой в линейной части. Наконец, очевидным образом многие формулы, содержащие коэффициенты разложения правых частей, становятся более обозримыми.

Система (3) после предложенной замены превращается в систему

$$\dot x = y, \quad \dot y = -x + \tilde q_{20}x^2 + \tilde q_{11}xy + \tilde q_{02}y^2 + \dots, \tag{12}$$

которая по-прежнему имеет центр по линейному приближению в начале координат.

Для системы (12) соответствующие коэффициенты $\tilde D_1$, $\tilde D_2$, вычисленные с помощью процедуры `constPL[2]` имеют вид

$$\tilde D_1 = (1/6)(3\tilde q_{03} + \tilde q_{02}\tilde q_{11} + \tilde q_{11}\tilde q_{20} + \tilde q_{21});$$

$$\begin{aligned} \tilde D_2 = (1/90)(&-159\tilde q_{02}^2\tilde q_{03} + 45\tilde q_{05} - 53\tilde q_{02}^3\tilde q_{11} - 15\tilde q_{04}\tilde q_{11} - 60\tilde q_{03}\tilde q_{11}^2 - 18\tilde q_{02}\tilde q_{11}^3 - 27\tilde q_{03}\tilde q_{12} + \\ & 27\tilde q_{02}\tilde q_{13} - 180\tilde q_{02}\tilde q_{03}\tilde q_{20} - 104\tilde q_{02}^2\tilde q_{11}\tilde q_{20} - 18\tilde q_{11}^3\tilde q_{20} - 3\tilde q_{11}\tilde q_{12}\tilde q_{20} + 9\tilde q_{13}\tilde q_{20} - 75\tilde q_{03}\tilde q_{20}^2 - \\ & 61\tilde q_{02}\tilde q_{11}\tilde q_{20}^2 - 10\tilde q_{11}\tilde q_{20}^3 - 44\tilde q_{02}^2\tilde q_{21} - 18\tilde q_{11}^2\tilde q_{21} - 6\tilde q_{12}\tilde q_{21} - 36\tilde q_{02}\tilde q_{20}\tilde q_{21} - 10\tilde q_{20}^2\tilde q_{21} + 3\tilde q_{11}\tilde q_{22} + \\ & 9\tilde q_{23} - 36\tilde q_{03}\tilde q_{30} + 9\tilde q_{02}\tilde q_{11}\tilde q_{30} + 12\tilde q_{11}\tilde q_{20}\tilde q_{30} - 3\tilde q_{21}\tilde q_{30} + 21\tilde q_{02}\tilde q_{31} + 15\tilde q_{20}\tilde q_{31} + 9\tilde q_{11}\tilde q_{40} + 9\tilde q_{41}). \end{aligned}$$

Как и ожидалось, эти выражения проще, чем выражения для D_1, D_2. К тому же в некоторых интересных для исследования случаях они, в свою очередь, могут быть заметно упрощены, [10].

Мы нашли выражения для коэффициентов $\tilde{q}_{ij}$ системы (12) через коэффициенты p_{ij}, q_{ij} системы (3) и подставили их в выражения $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$. В результате мы получили выражения $\widehat{D}_1, \widehat{D}_2$ для $\tilde{D}_1, \tilde{D}_2$ в терминах коэффициентов исходной системы. Оказалось, что

$$\widehat{D}_1 = D_1,\ 15\widehat{D}_2 = 15D_2 + RD_1,$$

где

$$R = -83p_{02}^2 + 42p_{03} - 9p_{11}^2 + 246p_{02}p_{20} + 17p_{20}^2 - 6p_{21} - 30p_{11}q_{02} + 112p_{02}q_{11} + 4p_{20}q_{11} - 6p_{11}q_{20}.$$

Это означает, что при анализе бифуркации Андронова – Хопфа и обобщенной бифуркации Андронова – Хопфа мы вправе заменить подсчет первой и второй ляпуновских величин для системы (3) вычислением их для полученной из нее системы (12).

При изучении проблемы различения центра и фокуса для полиномиальных плоских систем иногда используется функция Ляпунова

$$F(x,y) = (x^2+y^2)/2 + f_{30}x^3 + f_{21}x^2y + f_{12}xy^2 + f_{03}y^3 + \ \dots,$$

производная которой в силу системы (3) имеет вид

$$dF \equiv \frac{\partial F}{\partial x}(y+P(x,y)) + \frac{\partial F}{\partial y}(-x+Q(x,y) = V_1(x^2+y^2)^2 + V_2(x^2+y^2)^3 + V_3(x^2+y^2)^4 + \dots$$

(см., например, [11–15]).

Коэффициенты V_i при этом называют константами Пуанкаре – Ляпунова (Poincairé – Lyapunov (P-L) constants), а иногда ляпуновскими (фокусными) величинами.

Возможность построить такую функцию Ляпунова и найти рекуррентно коэффициенты V_i доказывается рассуждениями, повторяющими проделанные выше, с той разницей, что теперь при четных $k = 2l$ для определения коэффициентов однородных многочленов F_k и величин V_{l-1} мы имеем систему уравнений вида

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ k & 0 & -2 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & k-1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & . & 0 & -k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{k,0} \\ f_{k-1,1} \\ f_{k-2,2} \\ \cdot \\ f_{1,k-1} \\ f_{0,k} \end{pmatrix} - V_{l-1} \begin{pmatrix} C_k^0 \\ 0 \\ C_k^1 \\ \cdot \\ 0 \\ C_k^k \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} g_{k,0} \\ g_{k-1,1} \\ g_{k-2,2} \\ \cdot \\ g_{2,k-2} \\ g_{0,k} \end{pmatrix}$$

(ср. с (7)).

Как и выше, коэффициент V_1 определяется однозначно, последующие коэффициенты определяются с некоторым произволом, который может быть устранен введением дополнительного условия. В [15; 16] в качестве такого условия предлагается равенство[1]

$$C_{2l}^l f_{2l,0} + (C_{2l-2}^{l-2}C_2^2 + C_{2l-2}^{l-1}C_2^1 + C_{2l-2}^{l}C_2^0)f_{2l-2,2} +$$

[1] Условие означает, что при переходе к комплексным переменным $z, \bar{z}$ ($x{=}(z{+}\bar{z})/2,\ y{=}(z{-}\bar{z})/(2i)$) в записи функции Ляпунова $F(x,y)$ будут отсутствовать мономы $f_{nn}z^n\bar{z}^n$.

$$+ (C^{l-4}_{2l-4}C^4_4 + C^{l-3}_{2l-4}C^3_4 + C^{l-2}_{2l-4}C^2_4 + C^{l-1}_{2l-4}C^1_4 + C2l-4^l C^0_4) f_{2l-4,4} + \ldots = 0.$$

Построенная таким образом функция Ляпунова называется отмеченной [16] или стандартной [15].

Проделанные нами вычисления дают следующий результат:

$$\begin{aligned}
&8V_1 = 3D_1, \quad 480V_2 = 300D_2 + RD_1,\\
&R = 50p_{02}^2 + 237p_{03} - 93p_{11}^2 + 534p_{02}p_{20} + 136p20^2 + 123p_{21} - 403p_{11}q_{0,2} - 584q_{02}^2 +\\
&\quad + 317p_{02}q_{11} + 677p_{20}q_{11} + 267q_{11}^2 + 237q_{12} - 43p_{11}q_{20} - 186q_{02}q_{20} + 50q_{20}^2 + 123q_{30}.
\end{aligned}$$

Таким образом, величины V_1, V_2 в интересующем нас аспекте целиком аналогичны вычисленным нами ранее величинам D_1, D_2.

Это обстоятельство дает нам право называть коэффициенты D_1, D_2 так же, как V_1, V_2, постоянными Пуанкаре – Ляпунова, а с учетом всего сказанного выше называть и те, и другие ляпуновскими величинами наравне с величинами ℓ_1, ℓ_2.

Для величин V_i имеет место единственность в следующем смысле [17].

Теорема. *Пусть $\mathcal{A}$ — кольцо многочленов с рациональными коэффициентами от переменных p_{ij}, q_{ij}. Пусть имеем множество $V_1, V_2, \ldots, V_i$ констант Пуанкаре – Ляпунова и пусть $\mathcal{I}_{k-1}$ — идеал в $\mathcal{A}$, порожденный $V_1, V_2, \ldots, V_{k-1}$. Если $V_1', V_2', \ldots, V_i'$ — другое множество констант Пуанкаре – Ляпунова, то*

$$V_k \equiv V_k' \pmod{\mathcal{I}_{k-1}}.$$

Отметим, что полученное нами выше утверждение относительно V_1, V_2 является частным случаем приведенной теоремы, а соотношение (9) утверждает, что аналогичным свойством обладают коэффициенты D_1, D_2, найденные нами согласно [9]. По-видимому, соответствующее утверждение может быть доказано для них в общем случае.

Замечание. Мы вывели аналогичные утверждения для величин ℓ_3, D_3, V_3, но не приводим здесь их формулировку в связи с громоздкостью полученных выражений.

Замечание. Уже после того, как моя работа была принята к печати, я узнал о выходе монографии [18]. В этой книге, в частности, изучается вопрос об эквивалентности условий невырожденности бифуркации Андронова – Хопфа для системы, представленной в комплексной нормальной форме

$$\dot{x} = ix(1 + \sum_{i>0} \alpha_i x^i y^i), \quad \dot{y} = iy(-1 + \sum_{i>0} \beta_i x^i y^i),$$

и условиями, которые имеют место на основе вычисления и анализа ляпуновских величин, определенных как коэффициенты в разложении функции последования.

Список литературы

1. *Kuznetsov Y. A.* Elements of Applied Bifurcation Theory. N. Y.: Springer-Verlag, 1995.

2. *Kuznetsov Yu. A.* Numerical Normalization Techniques for all Codim 2 Bifurcations of Equilibria in ODE's // SIAM J. Numer. Anal. 1999. Vol. 30. No 4. P. 1104–1124.

3. *Андронов А. А. и др.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М.: Наука, 1967.

4. *Баутин Н. Н.* Поведение динамических систем вблизи границ области устойчивости. М.: Гостехиздат, 1949. (М.: Наука, 1984 (2-е изд.)).

5. *Серебрякова Н. Н.* О поведении динамической системы с одной степенью свободы вблизи тех точек границы, области устойчивости, где «безопасная» граница переходит в «опасную» // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 2. С. 178–182.

6. *Щуко С. Д.* К проблеме различения центра и фокуса // Докл. АН СССР. 1972. Т. 203, № 5. С. 08–1010.

7. *Леонов Г. А., Кузнецов Н. В., Кудряшова Е. В.* Циклы двумерных систем. Компьютерные вычисления, эксперименты // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2008. Вып. 3. С. 216–250.

8. *Gassul A., Gulliamon A., Manosa V.* An Explicit Expression of the First Liapunov and Period Constants with Applications // J. of Mathematical Analysis and Applications. 1997. Vol. 211. No. 1. P. 190–212.

9. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1949.

10. *Волокитин Е. П., Тресков С. А.* О поведении ляпуновских величин сложного фокуса для систем, близких к системе с нильпотентной линейной частью // Дифференциальные уравнения. 1995. Т. 31, № 10. С. 1704–1706.

11. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1947.

12. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературы, 1950.

13. *Shi S.* A Method of Constructing Cycles without Contacts Around a Weak Focus // J. Differential Equations. 1981. Vol. 41. No. 3. P. 301–312.

14. *Shlomiuk D.* Algebraic and Geometric Aspects of the Theory of Polynomial Vector Fields // Bifurcations and Periodic Orbits of Vector Fields. NATO ASI Series, Advanced Science Institutes Series. Series C: Mathematical and Physical Sciences. Vol. 408. Proc. of the NATO Advanced Study Institute and Seminaire de mathematiques superieures on bifurcations and periodic orbits of vector fields. Montreal, Canada, July 13–24, 1992. Dordrecht; Boston; London: Kluver Academic Publischers, 1993. P. 429–467.

15. *Rui M., Duo W.* Jumping Property of Lyapunov Values // Science in China. Series A. 1996. Vol. 39. No. 12. P. 1280–1287.

16. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 1. С. 7–149.

17. *Shi S.* On the Structure of Poincaré Constants for the Weak Focus of Polynomial Vector Fields // J. Differential Equations. 1984. Vol. 52. No. 1. P. 52–57.

18. *Romanovski V. G., Douglas S.* The Center and Cyclity Problems: a Computational Algebra Approach. Birkhäser Boston, Inc., Boston, MA, 2009. MR2500203.

Материал поступил в редколлегию 16.04.2011

Адрес автора

ВОЛОКИТИН Евгений Павлович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: volok@math.nsc.ru