УДК 510.64

С. И. Мардаев

ПОДМОДЕЛЬНЫЕ ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ФОРМУЛЫ*

В статье исследуются наименьшие неподвижные точки модальных формул. Введено понятие подмодельной определяющей формулы и доказано, что для любой формулы, позитивной по выделенной переменной, существует формула, являющаяся подмодельной определяющей формулой для любой транзитивной модели. Эта формула строится по исходной формуле с помощью простого алгоритма и сохраняет позитивность параметров.

Ключевые слова: нестандартные логики, модальные логики, неподвижные точки, позитивные операторы, модель, шкала.

В статье исследуются наименьшие неподвижные точки модальных формул. Введено понятие подмодельной определяющей формулы и доказано, что для любой формулы, позитивной по выделенной переменной, существует формула, являющаяся подмодельной определяющей формулой для любой транзитивной модели. Эта формула строится по исходной формуле с помощью простого алгоритма и сохраняет позитивность параметров.

Вообще говоря, наименьшие неподвижные точки модальных позитивных операторов не определимы в транзитивных моделях. Более того, они могут быть не определимы в частично упорядоченных и строго частично упорядоченных моделях. В тех же случаях, когда определимость есть, зачастую требуется общий алгоритм, описание которого занимает не одну страницу. Поэтому интересны ситуации, в которых определимость достигается с помощью идейно простого алгоритма. Одним из таких алгоритмов является алгоритм итерации, когда формула подставляется в саму себя без всяких изменений. Это не означает, что определяющая формула получится короткой, но зато описание алгоритма занимает всего несколько строк. Конечно, для того, чтобы это было алгоритмом, нужно иметь эффективную верхнюю границу для числа итераций. В [1] указан класс формул (так называемые DS-формулы), для которых работает алгоритм итерации. В общем же случае этот алгоритм не работает. Тем не менее в предлагаемой статье получен результат об алгоритме итерации для общего случая. Оказывается, в транзитивном случае всегда существует подмодель, в которой определимость наименьших неподвижных точек сводится к определимости для DS-формул. Соответствующая DS-формула строится по исходной формуле очень простым способом (надо закрыть ромбами внешние квадраты), и после этого применяется итерация.

Модальные пропозициональные формулы составляются из пропозициональной константы $\bot$ (ложь) и пропозициональных переменных $p, q, r, \dots$ с помощью бинарных связок $\wedge$, $\vee$ и унарных связок $\neg$, $\Box$ и $\Diamond$. Будем использовать сокращения $\top = \neg\bot$,

* Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант № 09-01-00090, и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы», проект 2.1.1.419.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 1. С. 82–86

$\Diamond\alpha = \alpha \vee \Diamond\alpha$, $\boxdot\alpha = \alpha \wedge \Box\alpha$. Далее будем считать, что все отрицания пронесены до переменных.

Шкала Крипке $\langle W, R \rangle$ состоит из непустого множества W и бинарного отношения R на W. *Модель Крипке* $\langle W, R, v \rangle$ состоит из шкалы Крипке $\langle W, R \rangle$ и означивания v. *Означивание* v — это функция, которая каждой переменной q ставит в соответствие подмножество $v(q)$ множества W. Значение переменной q_i будем обозначать соответствующей прописной буквой Q_i. Функция v естественным образом продолжается на формулы: константе $\perp$ всегда соответствует пустое множество, связкам $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Box$, $\Diamond$ соответствуют дополнение, пересечение, объединение и следующие операции на множествах:

$$\Box A = \{x \mid \forall y(xRy \Rightarrow y \in A)\}, \quad \Diamond A = \{x \mid \exists y(xRy \wedge y \in A)\}.$$

Пусть дана формула $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ от переменных $p, q_1, \ldots, q_n$ и модель Крипке $\langle W, R, v \rangle$, в которой заданы значения $Q_1, \ldots, Q_n$ переменных $q_1, \ldots, q_n$, а значение переменной p не задано. Формула φ определяет на модели $\langle W, R, v \rangle$ оператор $F_\varphi(P) = \varphi(P, Q_1, \ldots, Q_n)$. Множество P называется *неподвижной точкой* оператора F, если выполняется $P = F(P)$. Для удобства будем говорить, что P является неподвижной точкой формулы φ, имея в виду оператор F_φ. Здесь мы рассматриваем только *позитивные* формульные операторы F_φ. Это означает, что формула φ содержит переменную p только позитивно. Если неподвижная точка P совпадает со значением некоторой формулы $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, то формула ω *определяет* неподвижную точку P. Формулу назовем *подмодельной определяющей формулой* для данной модели, если она определяет наименьшую неподвижную точку в некоторой подмодели данной модели. Определяющая формула *сохраняет позитивность параметров*, если всякая переменная q_i, входящая в φ только позитивно, входит в ω тоже только позитивно.

Нетрудно доказать, что если все вхождения p, не находящиеся под действием модальностей, заменить на $\perp$, то наименьшая неподвижная точка не изменится. Поэтому считаем, что в формуле φ все вхождения p находятся под действием модальностей.

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi^0(q_1, \ldots, q_n) &= \perp, \\ \varphi^{k+1}(q_1, \ldots, q_n) &= \varphi(\varphi^k(q_1, \ldots, q_n), q_1, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

Эти формулы резонно назвать итерациями формулы φ. Кроме того, положим $P^k = \varphi^k(Q_1, \ldots, Q_n)$.

Нам потребуется связь между наименьшими неподвижными точками позитивного оператора в модели и в ее подмодели. Рассмотрим модель $\langle W, R, v \rangle$ и ее подмодель $\langle W', R, v \rangle$. Это по определению означает, что если выполняется $u \in W'$ и uRv, то выполняется $v \in W'$. Рассмотрим также оператор F_φ на модели и его ограничение F'_φ на подмодель. Через P обозначим наименьшую неподвижную точку оператора F_φ, а через P' — оператора F'_φ.

Лемма 1. *$P' = P \cap W'$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что $P \cap W'$ является неподвижной точкой оператора F'_φ. Допустим, что существует неподвижная точка P'' оператора F'_φ, которая строго содержится в P'. Рассмотрим множество $M = P'' \cup (P \setminus W')$. Подействуем на него оператором F_φ. Так как M содержится в неподвижной точке P, то $F_\varphi(M)$ содержится в P. Ясно, что в подмодели получим P''. Имеем, что $F_\varphi(M)$ содержится в M. Поэтому и наименьшая неподвижная точка P содержится в M. Противоречие. $\square$

Теорема 1. *Для любой модальной формулы $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$, позитивной по переменной p, существует сохраняющая позитивность параметров формула $\omega(q_1, \ldots, q_n)$, которая является подмодельной определяющей формулой для любой транзитивной модели. Существует алгоритм построения этой формулы ω.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем транзитивную модель Крипке $\langle W, R, v \rangle$. Через P обозначим наименьшую неподвижную точку формулы φ в этой модели. Возьмем в качестве значения переменной p множество P.

Мертвым концом назовем максимальный элемент шкалы, являющийся иррефлексивным.

Случай 1: в модели есть мертвый конец. Обозначим его x. На этом элементе все формулы с главной связкой $\Box$ истинны, а с $\Diamond$ — ложны. Заменим все максимальные подформулы с главной связкой $\Box$ на $\top$, а с $\Diamond$ — на $\bot$. Получим формулу, которая не содержит p и модальностей. Эту формулу обозначим ω_1. Она определяет наименьшую неподвижную точку в подмодели с носителем $\{x\}$.

Случай 2: в модели нет мертвых концов. Проделаем следующую процедуру. Занумеруем максимальные модализованные подформулы формулы φ с главной связкой $\Box$, т. е. такие, в которой главная связка $\Box$ не находится под действием $\Diamond$ в формуле φ. Обозначим эти подформулы $\Box\theta_i$. Построим возрастающую последовательность элементов y_i следующим образом. Рассмотрим $\Box\theta_1$. Если эта подформула ложна во всей модели, то в качестве y_1 берем произвольный элемент модели. Если эта подформула истинна на некотором элементе z_1 модели, то в качестве y_1 берем z_1.

Рассмотрим подмодель, порожденную элементом y_1, т. е. имеющую носитель $\{y_1\} \cup \cup \{u \in W \mid y_1 R u\}$. В ней находим элемент y_2 аналогичным способом. Иными словами, если подформула $\Box\theta_2$ ложна на всей этой подмодели, то в качестве y_2 берем произвольный элемент из подмодели. Если эта подформула истинна на некотором элементе z_2 подмодели, то в качестве y_2 берем z_2.

Проделаем это со всеми подформулами $\Box\theta_i$. На последнем шаге получим элемент, который обозначим через y. Подмодель, порожденная элементом y, обладает следующим свойством. Для любой подформулы $\Box\theta_i$ выполняется: либо эта подформула ложна на всех элементах подмодели, либо истинна на всех элементах подмодели.

Построим формулу $\psi(p, q_1, \ldots, q_n)$ следующим образом. В формуле φ заменим каждую подформулу $\Box\theta_i$ на подформулу $\Diamond\Box\theta_i$, т. е. просто навесим $\Diamond$ на эту подформулу.

Докажем, что наименьшие неподвижные точки формул φ и ψ совпадают в подмодели, порожденной элементом y. Сначала докажем, что значения этих формул совпадают в этой подмодели. Если $\Box\theta_i$ ложна на всех элементах подмодели, то и $\Diamond\Box\theta_i$ очевидно ложна на всех элементах подмодели. Если же $\Box\theta_i$ истинна на всех элементах подмодели, то и $\Diamond\Box\theta_i$ истинна на всех элементах подмодели. Докажем это. Рассмотрим произвольный элемент u. Так как u — не мертвый конец, то из него достижим некоторый элемент и на этом элементе истинна $\Box\theta_i$. Значит, на u истинна $\Diamond\Box\theta_i$.

Аналогичное рассуждение показывает,что во всех транзитивных моделях без мертвых концов значение формулы φ содержится в значении формулы ψ. Рассмотрим произвольный элемент u на котором истинна $\Box\theta_i$. Так как u — не мертвый конец, то из него достижим некоторый элемент и на этом элементе истинна $\Box\theta_i$. Значит, на u истинна $\Diamond\Box\theta_i$. Отсюда значение $\Box\theta_i$ содержится в значении $\Diamond\Box\theta_i$.

Поэтому наименьшая неподвижная точка формулы φ в таких моделях содержится в наименьшей неподвижной точке формулы ψ.

Через P' обозначим пересечение P с подмоделью, порожденной элементом y. Из леммы знаем, что P' является наименьшей неподвижной точкой формулы φ в подмодели. Кроме того, мы получили, что значения формул φ и ψ на этой подмодели совпадают. Получаем, что P' является неподвижной точкой формулы ψ в подмодели. Суммируя предыдущие рассуждения, получаем, что P' является наименьшей неподвижной точкой формулы ψ в подмодели. Значит, наименьшие неподвижные точки формул φ и ψ совпадают в этой подмодели.

DS-формулой назовем модальную формулу, составленную с помощью связок $\wedge$, $\vee$ из формул с главной связкой $\Diamond$ и формул, не содержащих модальных связок. Это означает, что каждый квадратик находится под действием некоторого ромба. Напомним, что все отрицания пронесены до переменных. В [1] было доказано, что для любой DS-формулы существует число k такое, что формула $\varphi^k(q_1, \ldots, q_n)$ определяет наименьшую неподвижную точку формулы φ в любой транзитивной модели. Там же указана явная верхняя граница для числа итераций.

Так как ψ является DS-формулой, то существует k такое, что ψ^k определяет наименьшую неподвижную точку во всех транзитивных моделях. Получаем, что в подмодели, порожденной элементом y, наименьшая неподвижная точка формулы φ определяется формулой ψ^k. При этом формула ψ^k строится алгоритмически. Второй случай рассмотрен.

Введем формулу $\omega(q_1, \ldots, q_n) = (\omega_1 \wedge \Box\bot) \vee (\psi_k \wedge \neg\Box\bot)$. В первом случае на мертвом конце x формула $\Box\bot$ истинна, и значение формулы ω совпадает со значением формулы ω_1 и поэтому определяет наименьшую неподвижную точку формулы φ в подмодели, основанной на этом мертвом конце. Во втором случае на всех элементах подмодели, порожденной элементом y, формула $\Box\bot$ ложна, и значение формулы ω совпадает со значением формулы ψ^k и поэтому определяет наименьшую неподвижную точку формулы φ в этой подмодели. Ясно, что формула ω сохраняет позитивность параметров. Теорема доказана. $\Box$

Известно, что модальная логика **K4** характеризуется классом всех транзитивных шкал. Поэтому из теоремы получаем

Следствие. *Логика* **K4** *содержит формулу*

$$\Diamond\boxdot((\omega \leftrightarrow \varphi(\omega)) \wedge (\boxdot(\varphi \to p) \to (\omega \to p))).$$

Здесь первая часть формулы утверждает, что ω определяет неподвижную точку, а вторая — что эта точка наименьшая.

Список литературы

1. *Мардаев С. И.* Неподвижные точки модальных DS-формул // Algebra and Model Theory 6. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. С. 41–44.

Материал поступил в редколлегию 18.11.2009

Адрес автора

МАРДАЕВ Сергей Ильич
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: mardaev@math.nsc.ru