УДК 517.95

Т. А. Ротанова

ЗАДАЧА ОБ ОДНОСТОРОННЕМ КОНТАКТЕ ДВУХ ПЛАСТИН, ОДНА ИЗ КОТОРЫХ СОДЕРЖИТ ЖЕСТКОЕ ВКЛЮЧЕНИЕ*

В представленной работе рассматривается контакт двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу. При этом одна из пластин содержит жесткое включение и деформируется в своей плоскости, а другая — в вертикальном направлении. В предположении достаточной гладкости решения получена дифференциальная постановка этой задачи, эквивалентная вариационной. Рассмотрены различные случаи расположения жесткого включения. Показано, что задача с жестким включением может быть получена как предельная для семейства задач теории упругости.

Ключевые слова: контактная задача, вариационное неравенство, жесткое включение, упругие пластины.

Введение

В последние годы произошло значительное продвижение в исследовании задач со свободными границами в связи со становлением и развитием теории вариационных неравенств. Задачи со свободными границами — это задачи, в которых неизвестная заранее функция в разных частях области удовлетворяет качественно различным условиям. Граница раздела этих зон, называемая свободной границей, также является неизвестной.

Теория вариационных неравенств возникла из практической задачи, известной теперь как задача Синьорини (1933), об одностороннем контакте упругого и недеформируемого тел в отсутствие трения. Обзор и результаты работ, посвященных изучению свойств этой задачи и обобщениям в различных направлениях, можно найти в [1]. Впоследствии проводилось значительное число как зарубежных, так и отечественных исследований широкого класса контактных задач с неизвестной областью контакта.

Большое число физических и инженерных задач со свободной границей могут быть сформулированы как вариационные, в частности это задачи о контакте упругих и неупругих тел. Поэтому исследования контактных задач крайне актуальны. Одностороннему контакту упругих тел разных размерностей посвящены работы [2; 3]. В [4] рассмотрена задача о контакте двух упругих пластин, в естественном состоянии расположенных под углом друг к другу.

В данной работе также рассматривается вопрос о равновесии двух упругих пластин, расположенных под углом друг к другу, под действием внешних сил (модель Кирхгофа–Лява). Главное отличие от работы [4] состоит в том, что нижняя пластина G содержит жесткое включение. При этом пластина G деформируется в своей области, а верхняя

* Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 90, РФФИ (№ 10-01-00054) и Президента РФ (МК-222.2010.1).

пластина подвергается изгибу. Область контакта заранее неизвестна и подлежит определению. В работе проанализированы возможные случаи расположения жесткого включения. Если жесткая часть нижней пластины кроме области контакта пластин захватывает часть границы G, не контактирующую с верхней, то нижнюю пластину можно интерпретировать как тонкое препятствие для верхней пластины, и мы получим задачу о контакте верхней пластины с жестким препятствием. Показано, что задача может быть получена как предельная для семейства задач теории упругости с параметром.

Контактные задачи для двух упругих пластин, одна из которых содержит жесткое включение, можно найти в [5; 6], однако в этих работах рассматриваются только вертикальные перемещения пластин. Следует отметить, что до настоящего времени исследования пластин, содержащих жесткие включения, систематически не проводились. Из работ, затрагивающих этот вопрос, можно назвать [7]. Исследованию трещины на границе жесткого включения посвящена работа [8]. Задачи о равновесии упругих и неупругих тел, содержащих трещины, с краевыми условиями взаимного непроникания берегов тоже можно отнести к классу контактных задач, однако краевые условия, возникающие при этом, принципиально отличаются от краевых условий в задачах о контакте упругих тел разных размерностей.

1. Постановка задачи

Пусть две упругие пластины расположены под углом α друг к другу, где $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2}]$, и в естественном состоянии контактируют по линии γ, как показано на рис. 1. Ограниченные области $\Omega, G \subset \mathbb{R}^2$ с гладкими границами Γ и ∂G соответствуют срединным плоскостям пластин. Пусть $\gamma \subset \partial G$, $\gamma \cap \Gamma = \varnothing$, и $\gamma_0 = (\partial G)\backslash\Omega$, тогда $\partial G = \gamma \cup \overline{\gamma}_0$. Будем предполагать, что нижняя пластина G деформируется в своей плоскости, а точки верхней (горизонтальной) пластины Ω допускают перемещение только в вертикальном направлении.

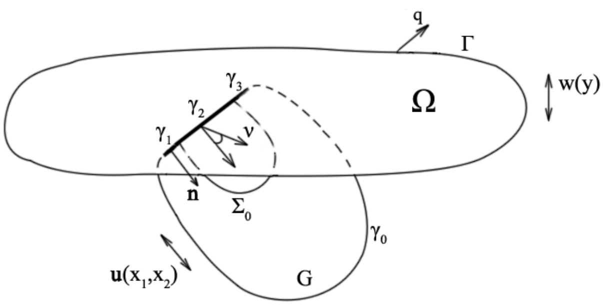

Рис. 1. Контакт пластин

Предполагаем, что нижняя пластина содержит жесткое включение — подобласть $\omega \subset G$ с границей Σ, таким образом, $G\backslash\bar{\omega}$ соответствует упругой части пластины. Пусть $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3$, тогда $\Sigma = \gamma_2 \cup \Sigma_0$, где Σ_0 является кривой класса $C^{0,1}$. Выясним, как взаимодействуют пластины в этом случае.

С целью описать перемещение точек области ω введем пространство жестких перемещений:

$$R(\omega) = \{ \rho = (\rho_1, \rho_2) \mid \rho(x) = Cx + D, \ x \in \omega \},$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & c \\ -c & 0 \end{pmatrix}, \quad D = (d^1, d^2), \quad \text{где } c, d^1, d^2 = \mathrm{const}.$$

Также для дальнейших целей нам потребуется билинейная форма:

$$a_\Omega(w, v) = \int\limits_\Omega (w_{,11}v_{,11} + w_{,22}v_{,22} + æ(w_{,11}v_{,22} + w_{,22}v_{,11}) + 2(1 - æ)w_{,12}v_{,12}),$$

где æ — коэффициент Пуассона верхней пластины Ω. Для описания нижней пластины введем тензор модулей упругости $B = \{b_{ijkl}\}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Пусть имеет место положительная определенность коэффициентов $b_{ijkl} \in L^\infty(G)$:

$$b_{ijkl}\xi_{kl}\xi_{ij} \geqslant c_0|\xi|^2 \quad \forall \xi_{ij} = \xi_{ji}, \quad c_0 > 0; \tag{1}$$

а также их симметричность: $b_{ijkl} = b_{klij} = b_{jikl}$, $i, j, k, l = 1, 2$. Обозначим через $\mathbf{n} = (n_1, n_2)$ единичный вектор внутренней нормали к границе области $G \setminus \overline{\omega}$. Также введем тензоры деформаций и напряжений $\varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$ соответственно:

$$\sigma\mathbf{n} = (\sigma_{1j}n_j, \sigma_{2j}n_j), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad i, j = 1, 2.$$

В области $G \setminus \overline{\omega}$ выполняется закон Гука $\sigma = B\varepsilon(\mathbf{u})$. Все величины с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам; по повторяющимся индексам проводится суммирование. Функции $w(\mathbf{y})$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = (u_1(\mathbf{x}), u_2(\mathbf{x}))$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2) \in \Omega$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in G$ описывают перемещения точек верхней и нижней пластин соответственно.

Будем рассматривать пространство $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$, где

$$H^1_{\gamma_0}(G) = \{\mathbf{v} \in [H^1(G)]^2 \mid \mathbf{v} = 0 \text{ на } \gamma_0\},$$
$$H^2_0(\Omega) = \{w \in H^2(\Omega) \mid w = \frac{\partial w}{\partial q} = 0 \text{ на } \Gamma\};$$

и функционал энергии

$$E(\mathbf{u}, w) = \frac{1}{2}(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G - (\mathbf{g}, \mathbf{u})_G + \frac{1}{2}a_\Omega(w, w) - (f, w)_\Omega,$$

где $\mathbf{g} = (g_1, g_2)$, $g_i \in L^2(G)$, $i = 1, 2$; $f \in L^2(\Omega)$ — заданные функции, а $(u, v)_\Omega = \int\limits_\Omega uv$ обозначает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$.

Допустимыми перемещениями будут являться элементы следующего множества, задающего условие взаимного непроникания пластин:

$$K_\omega = \{(\mathbf{u}, w) \in H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega) \mid \ \mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma; \ \mathbf{u}|_\omega = \rho, \ \rho \in R(\omega)\}.$$

Теперь можно рассмотреть задачу минимизации:

$$\inf_{(\mathbf{u}, w) \in K_\omega} E(\mathbf{u}, w). \tag{2}$$

Покажем, что выполнены все условия теоремы Вейерштрасса [9], и задача (2) разрешима.

Исходное пространство $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$ рефлексивно.

Функционал $E(\mathbf{u}, w)$ является дифференцируемым по Гато. Его производная по Гато имеет следующий вид:

$$E'(\mathbf{u}, w)\langle \mathbf{h}, v\rangle = (\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{h}))_G - (\mathbf{g}, \mathbf{h})_G + a_\Omega(w, v) - (f, v)_\Omega.$$

В силу положительной определенности a_Ω и условия (1) оператор $E' : (\mathbf{u}, w) \to E'(\mathbf{u}, w)$ обладает свойством монотонности, следовательно, функционал $E(\mathbf{u}, w)$ является выпуклым. Из выпуклости и непрерывности функционала вытекает его слабая полунепрерывность снизу. Последовательно применяя неравенство (1), первое неравенство Корна [10] и оценку функций в пространстве $H^2_0(\Omega)$ [9], получаем:

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G + a_\Omega(w, w) \geq c_1(\varepsilon(\mathbf{u}), \varepsilon(\mathbf{u}))_G + c_2(w_{,ij}, w_{,ij}) \geq c_3\|\mathbf{u}\|^2_{H^1_{\gamma_0}(G)} + c_4\|w\|^2_{H^2_0(\Omega)}.$$

Здесь и далее используемые константы положительны. В силу неравенства Коши имеем оценку:

$$(\mathbf{g}, \mathbf{u})_G + (f, w)_\Omega \leq c_5\|\mathbf{u}\|_{H^1_{\gamma_0}(G)} + c_6\|w\|_{H^2_0(\Omega)}.$$

Полученные оценки обеспечивают коэрцитивность функционала $E(\mathbf{u}, w)$.

Множество K_ω является слабо замкнутым. Действительно, множество K_ω выпукло и, по теореме вложения, замкнуто.

Таким образом, решение задачи существует. Запишем задачу в виде вариационного неравенства, эквивалентного задаче минимизации (2):

$$(\mathbf{u}, w) \in K_\omega, \tag{3}$$

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_G + a_\Omega(w, \bar{w} - w) - (f, \bar{w} - w)_\Omega \geq 0 \quad \forall(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) \in K_\omega. \tag{4}$$

Решение задачи (3)–(4) единственно. Чтобы убедиться в этом, предположим, что $(\mathbf{u}_1, w_1)$, $(\mathbf{u}_2, w_2)$ — решения задачи (3)–(4), и подставим в (4) $(\mathbf{u}_1, w_1)$ в качестве решения $(\mathbf{u}, w)$, а в качестве пробной функции $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w})$ берем $(\mathbf{u}_2, w_2)$, и наоборот. Путем сложения полученных неравенств извлекаем $(\mathbf{u}_1, w_1) = (\mathbf{u}_2, w_2)$.

2. Дифференциальная постановка задачи

В этом разделе приведем дифференциальную постановку задачи (3)–(4).

Обозначим $\Omega_\gamma = \Omega\setminus\bar{\gamma}$, $\mathbf{q} = (q_1, q_2)$ — вектор внешней нормали к границе Γ, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — вектор нормали к γ, расположенный в плоскости верхней пластины Ω. Кроме того, $w_\nu = \frac{\partial w}{\partial \nu}, w_q = \frac{\partial w}{\partial q}$.

Очевидно, что решение удовлетворяет следующим условиям на границе:

$$\mathbf{u} = 0 \text{ на } \gamma_0,$$

$$w = w_q = 0 \text{ на } \Gamma;$$

условию склейки:

$$[w] = [w_\nu] = 0 \text{ на } \gamma,$$

где $[w] = w^+ - w^-$, а значения $w^\pm$ соответствуют положительному и отрицательному (по отношению к нормали ν) берегам разреза $\gamma^\pm$. В области ω функция $\mathbf{u}$ представляет собой жесткое перемещение:

$$\mathbf{u}|_\omega = \rho_0, \text{ где } \rho_0 \in R(\omega),$$

при этом

$$\mathbf{u} = \rho_0 \text{ на } \Sigma_0.$$

На γ выполнено условие непроникания пластин:

$$\mathbf{un} \sin\alpha + w \geq 0 \text{ на } \gamma.$$

С целью получить уравнения равновесия пластин, подставим в (4) в качестве пробных функций $(\mathbf{u} + \varphi, w + \psi)$ и $(\mathbf{u} - \varphi, w - \psi)$, где $(\varphi, \psi) \in [C_0^\infty(G \setminus \overline{\omega})]^2 \times C_0^\infty(\Omega_\gamma)$ и φ продолжается нулем в ω. Получим неравенства с противоположными знаками, откуда:

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\varphi))_{G\setminus\overline{\omega}} - (\mathbf{g}, \varphi)_G + a_\Omega(w, \psi) - (f, \psi)_\Omega = 0 \quad \forall(\varphi, \psi) \in [C_0^\infty(G \setminus \overline{\omega})]^2 \times C_0^\infty(\Omega_\gamma).$$

Рассмотрим действие обобщенной функции $\triangle^2 w - f$ на функцию $\psi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma)$. Используя предыдущее равенство при $\varphi = (0, 0)$, находим:

$$(\triangle^2 w - f)(\psi) = a_{\Omega_\gamma}(w, \psi) - (f, \psi)_{\Omega_\gamma} = 0 \quad \forall\psi \in C_0^\infty(\Omega_\gamma).$$

Таким образом, в области Ω_γ выполняется уравнение равновесия в смысле распределений:

$$\triangle^2 w = f \text{ в } \Omega_\gamma.$$

Для области G, занимаемой срединной плоскостью нижней пластины, в смысле распределений в упругой подобласти $G \setminus \overline{\omega}$ выполняется

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \text{ в } G \setminus \overline{\omega}.$$

Будем предполагать, что функции $(\mathbf{u}, w)$ являются достаточно гладкими. Тогда можно применить следующую формулу Грина [9; 10], справедливую для произвольной области Ω с границей Γ класса $C^{1,1}$, к которой ν — внешняя нормаль:

$$(\varphi, \triangle^2 w)_\Omega = a_\Omega(w, \varphi) + (t^\nu(w), \varphi)_\Gamma - (m(w), \varphi_\nu)_\Gamma \quad \forall\varphi \in H^2(\Omega), \tag{5}$$

где

$$m(w) = æ\triangle w + (1 - æ)\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2}, \quad t^\nu(w) = \frac{\partial}{\partial \nu}(\triangle w + (1 - æ)\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}), \quad s = (s_1, s_2) = (-\nu_2, \nu_1)$$

есть изгибающий момент и перерезывающая сила для верхней пластины.

Предполагаем, что кривую γ можно продолжить до замкнутой кривой Σ_1 класса $C^{1,1}$. При этом область Ω разбивается на две подобласти, как указано на рис. 2. Выберем в (4) тестовую функцию в виде $(\mathbf{u}, w + \phi)$, где $\phi \in H_0^2(\Omega)$, $\phi \geq 0$ на γ. Получим:

$$a_\Omega(w, \phi) \geq (f, \phi)_\Omega.$$

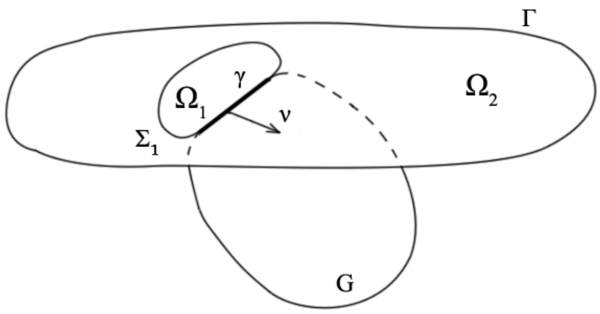

Рис. 2. Продолжение γ до замкнутой кривой

Далее, заменяя область интегрирования Ω на $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$, применяем формулу Грина к левой части полученного неравенства и используем уравнения равновесия. Тогда получим:

$$\big([t^{\nu}(w)], \phi\big)_{\Sigma_1} - \big([m(w)], \phi_{\nu}\big)_{\Sigma_1} \geq 0. \tag{6}$$

Подставляя в неравенство (6) различные значения ϕ_ν и склеивая функции на $\Sigma_1 \setminus \gamma$, найдем, что

$$\begin{aligned} [m(w)] &= 0 \quad \text{на } \gamma, \\ [t^{\nu}(w)] &\geq 0 \quad \text{на } \gamma. \end{aligned} \tag{7}$$

Далее нам потребуется формула Грина, которая справедлива для области $G \setminus \overline{\varpi}$ с внутренней нормалью к границе:

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\psi))_{G\setminus\overline{\varpi}} = -(\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}), \psi)_{G\setminus\overline{\varpi}} - (\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\partial(G\setminus\overline{\varpi})}. \tag{8}$$

Подставим в вариационное неравенство (3)–(4) пробные функции $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = (\mathbf{u} \pm \psi, w \pm \varphi)$, такие, что $(\psi, \varphi) \in K_\omega$ и $\varphi + \psi\mathbf{n}\sin\alpha = 0$ на γ. К левой части полученного соотношения

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\psi))_{G\setminus\overline{\varpi}} + a_\Omega(w, \varphi) = (f, \varphi)_\Omega + (\mathbf{g}, \psi)_G$$

применим формулы Грина, снова заменяя область интегрирования Ω на $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$:

$$\begin{aligned} -\,(\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}), \psi)_{G\setminus\overline{\varpi}} - (\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\gamma_1\cup\gamma_3\cup\Sigma_0} + (\varphi, \triangle^2 w)_{\Omega_1} + (\varphi, \triangle^2 w)_{\Omega_2} +& \\ + ([t^{\nu}(w)], \varphi)_{\Sigma_1} - ([m(w)], \varphi_\nu)_{\Sigma_1} = (f, \varphi)_\Omega + (\mathbf{g}, \psi)_G&. \end{aligned}$$

С учетом уравнений равновесия, условия (7), а также склеивания вне γ функций и их производных, из последнего выражения извлекаем следующее равенство:

$$-(\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\gamma_1\cup\gamma_3\cup\Sigma_0} + ([t^{\nu}(w)], \varphi)_\gamma = (\mathbf{g}, \psi)_\omega,$$

или, в силу выбора пробных функций,

$$-(\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\gamma_1\cup\gamma_3} - ([t^{\nu}(w)], \psi\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_1\cup\gamma_3} = (\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\Sigma_0} + ([t^{\nu}(w)], \psi\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} + (\mathbf{g}, \psi)_\omega. \tag{9}$$

Предполагая, что $\rho \equiv 0$, т. е. пробная функция $\psi|_\omega = 0$, получим

$$-(\sigma\mathbf{n}, \psi)_{\gamma_1\cup\gamma_3} - ([t^{\nu}(w)], \psi\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_1\cup\gamma_3} = 0,$$

откуда

$$[t^{\nu}(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n} \quad \text{на } \gamma_1 \cup \gamma_3. \tag{10}$$

Тогда из (9) следует соотношение:

$$(\sigma\mathbf{n}, \rho)_{\Sigma_0} + ([t^{\nu}(w)], \rho\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} + (\mathbf{g}, \rho)_{\omega} = 0 \ \ \forall\rho \in R(\omega). \tag{11}$$

Чтобы выписать еще одно краевое условие, последовательно применим к вариационному неравенству (4)

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_G + a_{\Omega}(w, \bar{w} - w) - (f, \bar{w} - w)_{\Omega} \geq 0$$

формулы Грина (5)(переходя к областям интегрирования $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$) и (8), получим неравенство:

$$-(\sigma\mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\gamma_1\cup\gamma_3\cup\Sigma_0} + ([t^{\nu}(w)], \bar{w} - w)_{\gamma} - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\omega} \geq 0. \tag{12}$$

Так как $\bar{\mathbf{u}}|_{\omega} = \rho$ и $\mathbf{u}|_{\omega} = \rho_{\mathbf{0}}$, можно применить равенство (11):

$$-(\sigma\mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\Sigma_0} - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\omega} = ([t^{\nu}(w)], (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2}.$$

Тогда (12) принимает следующий вид:

$$-(\sigma\mathbf{n}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_{\gamma_1\cup\gamma_3} + ([t^{\nu}(w)], \bar{w} - w)_{\gamma_1\cup\gamma_3} + ([t^{\nu}(w)], \bar{w} - w + (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} \geq 0.$$

Используя условие (10), находим:

$$([t^{\nu}(w)], \bar{w} - w + (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma} \geq 0.$$

Подставим в последнее неравенство пробную функцию $(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w}) = (0, 0)$, получим неравенство

$$\big([t^{\nu}(w)], \mathbf{un}\sin\alpha + w\big)_{\gamma} \leq 0,$$

из которого в силу $[t^{\nu}(w)] \geq 0$, $\mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0$ на γ следует

$$[t^{\nu}(w)](\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \quad \text{на } \ \gamma.$$

Итак, выпишем для задачи (3)–(4) дифференциальную постановку. Найти функции $\mathbf{u}$ в G, w в Ω, такие что выполняется:

$$-\operatorname{div}(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \quad \text{в } \ G \setminus \overline{\omega}, \tag{13}$$

$$\triangle^2 w = f \quad \text{в } \ \Omega_{\gamma}, \tag{14}$$

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на } \ \gamma_0, \tag{15}$$

$$\mathbf{u}|_{\omega} = \rho_{\mathbf{0}}, \quad \text{где } \ \rho_0 \in R(\omega), \tag{16}$$

$$\mathbf{u} = \rho_0 \quad \text{на } \ \Sigma_0, \tag{17}$$

$$w = w_q = 0 \quad \text{на } \ \Gamma, \tag{18}$$

$$\mathbf{un}\sin\alpha + w \geq 0 \quad \text{на } \ \gamma, \tag{19}$$

$$[w] = [w_{\nu}] = 0, \ \ [m(w)] = 0, \ \ [t^{\nu}(w)] \geq 0, \ \ [t^{\nu}(w)](\mathbf{un}\sin\alpha + w) = 0 \quad \text{на } \ \gamma, \tag{20}$$

$$[t^{\nu}(w)]\mathbf{n}\sin\alpha = -\sigma\mathbf{n} \quad \text{на} \;\; \gamma_1\cup\gamma_3, \tag{21}$$

$$(\sigma\mathbf{n},\rho)_{\Sigma_0} + (g,\rho)_{\omega} + ([t^{\nu}(w)],\rho\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} = 0 \quad \forall\rho\in R(\omega). \tag{22}$$

Покажем теперь, что из (13)–(22) можно получить вариационное неравенство (3)–(4). Это, в частности, будет означать, что система, состоящая из уравнений равновесия (13)–(14) и краевых условий (15)–(22), является полной.

Предположим, что решение (13)–(22) является достаточно гладким. Возьмем произвольную точку $(\bar{\mathbf{u}},\bar{w})\in K_{\omega}$. Умножим уравнение равновесия (13) на $(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})$ и проинтегрируем:

$$-(\operatorname{div}\sigma(\mathbf{u}),\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{G\setminus\bar{\omega}} = (\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{G\setminus\bar{\omega}}.$$

Применяем к полученному равенству формулу Грина (8) и используем условие (15):

$$(\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} + (\sigma\mathbf{n},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{\gamma_1\cup\gamma_3\cup\Sigma_0} = (\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{G\setminus\overline{\omega}}.$$

Далее, с учетом $\bar{\mathbf{u}}|_{\omega}=\rho$ и $\mathbf{u}|_{\omega}=\rho_{\mathbf{0}}$, из (22) находим:

$$(\sigma\mathbf{n},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{\Sigma_0} = -(\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{\omega} - ([t^{\nu}(w)],(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2}.$$

Получаем следующее выражение:

$$(\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} + (\sigma\mathbf{n},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{\gamma_1\cup\gamma_3} - ([t^{\nu}(w)],(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} = (\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{G}. \tag{23}$$

Теперь умножим уравнение равновесия (14) на $(\bar{w}-w)$ и проинтегрируем:

$$(\triangle^2 w,\bar{w}-w)_{\Omega_\gamma} = (f,\bar{w}-w)_{\Omega_\gamma}.$$

Разбивая область интегрирования Ω на $\Omega_1\bigcup\Omega_2$, применяем обобщенную формулу Грина (5) и учитываем (18):

$$\begin{aligned} &a_{\Omega_1}(w,\bar{w}-w) + a_{\Omega_2}(w,\bar{w}-w) - ((t^{\nu}(w))^{+},\bar{w}-w)_{\Sigma_1} + \\ &+\Big((t^{\nu}(w))^{-},\bar{w}-w\Big)_{\Sigma_1} + \Big(m(w)^{+},\Big(\frac{\partial(\bar{w}-w)}{\partial\nu}\Big)^{+}\Big)_{\Sigma_1} - \Big(m(w)^{-},\Big(\frac{\partial(\bar{w}-w)}{\partial\nu}\Big)^{-}\Big)_{\Sigma_1} = \\ &\qquad\qquad = (f,\bar{w}-w)_{\Omega_1} + (f,\bar{w}-w)_{\Omega_2}. \end{aligned}$$

В силу выбора K_{ω} и условия склейки можно перейти от интегралов по областям Ω_1 и Ω_2 к интегралу по области Ω:

$$a_{\Omega}(w,\bar{w}-w) - ([t^{\nu}(w)],\bar{w}-w)_{\Sigma_1} + ([m(w)],(\bar{w}-w)_{\nu})_{\Sigma_1} = (f,\bar{w}-w)_{\Omega}.$$

Так как вне γ происходит склеивание функций и их производных, и выполняется условие $[m(w)]=0$ на γ, получаем следующее выражение:

$$a_{\Omega}(w,\bar{w}-w) - ([t^{\nu}(w)],\bar{w}-w)_{\gamma} = (f,\bar{w}-w)_{\Omega}. \tag{24}$$

Складываем формулы (23) и (24):

$$\begin{aligned} &(\sigma(\mathbf{u}),\varepsilon(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} + a_{\Omega}(w,\bar{w}-w) - (\mathbf{g},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{G} - (f,\bar{w}-w)_{\Omega} = \\ &\qquad = ([t^{\nu}(w)],\bar{w}-w)_{\gamma} - (\sigma\mathbf{n},\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})_{\gamma_1\cup\gamma_3} + ([t^{\nu}(w)],(\bar{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_{\gamma_2} = \end{aligned}$$

$$= ([t^\nu(w)], (\bar{w} - w) + (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_\gamma.$$

В последнем преобразовании была использована формула (21). Имеем следующую цепочку неравенств:

$$([t^\nu(w)], (\bar{w} - w) + (\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\mathbf{n}\sin\alpha)_\gamma = ([t^\nu(w)], \bar{w} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{n}\sin\alpha)_\gamma - \\ - ([t^\nu(w)], w + \mathbf{u}\mathbf{n}\sin\alpha)_\gamma = ([t^\nu(w)], \bar{w} + \bar{\mathbf{u}}\mathbf{n}\sin\alpha)_\gamma \geq 0,$$

в силу двух последних условий в (20) и условия непроникания. Тогда получим в точности неравенство (4):

$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} + a_\Omega(w, \bar{w} - w) - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_G - (f, \bar{w} - w)_\Omega \geq 0.$$

В различных случаях расположения жесткого включения ω нижней пластины G условия на области контакта пластин γ существенно отличаются.

Рассмотрим случай, когда жесткое включение выходит на границу γ_0, как показано на рис. 3,*а*. Возьмем две различные точки $\mathbf{x_1}$ и $\mathbf{x_2}$, принадлежащие $\omega \cap \gamma_0$, тогда $\rho(\mathbf{x_1}) = 0$ и $\rho(\mathbf{x_2}) = 0$. Имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} cx_{12} + d^1 = 0, \\ -cx_{11} + d^2 = 0, \\ cx_{22} + d^1 = 0, \\ -cx_{21} + d^2 = 0; \end{cases}$$

из которой сразу извлекаем $c, d^1, d^2 = 0$. Таким образом, $\rho \equiv 0$, и жесткое включение ω не перемещается.

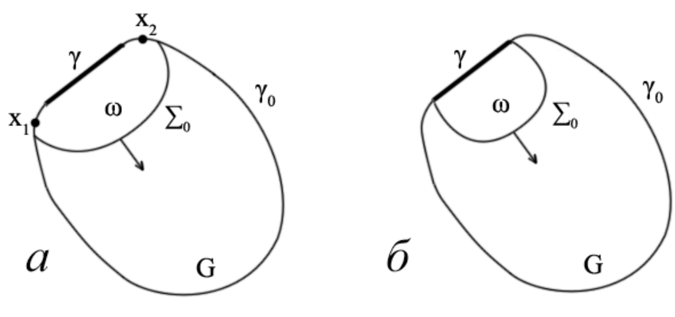

Рис. 3. Случаи расположения жесткого включения

В случае расположения жесткого включения 3,*б* в силу того, что $\mathbf{u} = 0$ на γ_0, имеем $\mathbf{u} \in H^{1/2}_{00}(\gamma)$. Тогда

$$\|\mathbf{u}\|_{H^{1/2}_{00}(\gamma)} = \|\mathbf{u}\|_{H^{1/2}(\gamma)} + \Big(\mathbf{u}^2, \frac{1}{d}\Big)^{1/2}_\gamma < \infty, \tag{25}$$

где d — расстояние от точки $\mathbf{x}$ до концевой точки γ. Интеграл в правой части (25) конечен, когда $\mathbf{u}$ стремится к нулю в окрестности концевых точек кривой. Однако на γ перемещение $\mathbf{u}$ имеет заданный вид $\rho_0 \in R(\omega)$, поэтому может быть только тождественно равной нулю функцией на γ, а значит, и во всей области ω.

Выпишем дифференциальную постановку задачи (3)–(4) в обоих случаях (см. рис. 3,*а* и 3,*б*), предполагая, что γ_0 — часть границы G, на которую не выходит область ω.

Найти функции $\mathbf{u}$ в G, w в Ω, такие что выполняется:

$$
\begin{gathered}
-\operatorname{div}(B\varepsilon(\mathbf{u})) = \mathbf{g} \quad \text{в} \;\; G\setminus\overline{\omega},\\
\triangle^2 w = f \quad \text{в} \;\; \Omega_\gamma,\\
\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \;\; \gamma_0\cup\Sigma_0,\\
\mathbf{u}|_\omega = \mathbf{0},\\
w = w_q = 0 \quad \text{на} \;\; \Gamma,\\
w\ge 0, \;\; [w] = [w_\nu] = 0, \;\; [m_\nu] = 0 \quad \text{на} \;\; \gamma,\\
[t^\nu(w)]\ge 0, \;\; [t^\nu(w)]w = 0 \quad \text{на} \;\; \gamma.
\end{gathered}
$$

Мы получили в точности задачу о контакте пластины Ω с неподвижным жестким препятствием. В упругой части пластины G выполнено уравнение равновесия. Функции $\mathbf{u}$ и w находятся независимо.

3. Предельный переход от упругого включения к жесткому

Оказывается, задача (3)–(4) может быть рассмотрена как предельная для семейства задач с параметром $\lambda > 0$, описывающих односторонний контакт двух упругих пластин, расположенных под углом α друг к другу. В задачах из указанного семейства при каждом $\lambda > 0$ подобласть ω соответствует упругому включению в пластине, а при $\lambda = 0$ точка $x\in\omega$ будет иметь перемещение $\rho_0(x)\in R(\omega)$. Сформулируем указанное семейство задач и обоснуем соответствующий предельный переход.

Положим $B^\lambda = \{b^\lambda_{ijkl}\}$, $i,j,k,l = 1,2$, где

$$
b^\lambda_{ijkl}(x) = \begin{cases} \lambda^{-1} b_{ijkl}, & x\in\omega, \;\; 0<\lambda<\lambda_0;\\ b_{ijkl}, & x\in\Omega\setminus\overline{\omega}.\end{cases}
$$

Пусть $\mathbf{u}^\lambda = (u_1^\lambda(\mathbf{x}), u_2^\lambda(\mathbf{x}))$, $w^\lambda(\mathbf{y})$, $\mathbf{x} = (x_1,x_2)\in G$, $\mathbf{y} = (y_1,y_2)\in\Omega$. Сформулируем задачу в виде вариационного неравенства:

$$
\begin{gathered}
(\mathbf{u}^\lambda, w^\lambda)\in K = \big\{ (\mathbf{u}, w)\in H^1_{\gamma_0}(G)\times H^2_0(\Omega) \mid \mathbf{un}\sin\alpha + w \ge 0 \;\; \text{на} \;\; \gamma \big\},\\
(\sigma^\lambda(\mathbf{u}^\lambda), \varepsilon(\bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda))_G - (\mathbf{g}, \bar{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda)_G + a_\Omega(w^\lambda, \bar{w} - w^\lambda) - (f, \bar{w} - w^\lambda)_\Omega \;\ge\; 0\,,\\
\forall(\bar{\mathbf{u}}, \bar{w})\in K. \qquad (26)
\end{gathered}
$$

Подставляя в (26) в качестве пробных функций $(0,0)$, $2(\mathbf{u}^\lambda, w^\lambda)$ и складывая полученные соотношения, получаем следующее равенство:

$$
(\sigma^\lambda(\mathbf{u}^\lambda), \varepsilon(\mathbf{u}^\lambda))_G + a_\Omega(w^\lambda, w^\lambda) = (\mathbf{g}, \mathbf{u}^\lambda)_G + (f, w^\lambda)_\Omega, \qquad (27)
$$

откуда при $0<\lambda<\lambda_0$ следует

$$
\int\limits_G |\nabla\mathbf{u}^\lambda|^2 + \int\limits_\Omega |\nabla\nabla w^\lambda|^2 \le c_7.
$$

Это означает ограниченность нормы в пространстве $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$:

$$\left\|\mathbf{u}^\lambda\right\|^2_{H^1_{\gamma_0}(G)} + \left\|w^\lambda\right\|^2_{H^2_0(\Omega)} \le c_8, \quad \lambda < \lambda_0.$$

В силу рефлексивности пространств из последовательности $(\mathbf{u}^\lambda, w^\lambda)$ можно извлечь слабо сходящуюся в $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$ к $(\mathbf{u}, w)$ подпоследовательность. Сохраним для подпоследовательности прежнее обозначение. Уменьшая левую часть равенства (27), получаем

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_{\omega} b_{ijkl}\varepsilon_{kl}(\mathbf{u}^\lambda)\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}^\lambda) \le c_9.$$

Тогда имеем

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = 0 \quad \text{в } \omega, \quad i, j = 1, 2.$$

Последнее означает существование функции $\rho_0(x) \in R(\omega)$, что $\mathbf{u} = \rho_0$. Отсюда следует, что предельная функция для слабо сходящейся в $H^1_{\gamma_0}(G) \times H^2_0(\Omega)$ последовательности $(\mathbf{u}^\lambda, w^\lambda)$ принадлежит множеству K_ω.

Подставим теперь в (26) тестовую функцию $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{w}) \in K$, такую, что $\widetilde{\mathbf{u}}|_\omega = \rho$, $\rho \in R(\omega)$, тогда $(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{w}) \in K_\omega$. Получим:

$$\big(b_{ijkl}\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda), \varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda)\big)_{G\setminus\overline{\omega}} - \frac{1}{\lambda}\big(b_{ijkl}\varepsilon(\mathbf{u}^\lambda), \varepsilon\mathbf{u}^\lambda\big)_\omega - \\ - \big(\mathbf{g}, \widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}^\lambda\big)_G + a_\Omega(w^\lambda, \widetilde{w} - w^\lambda) - (f, \widetilde{w} - w^\lambda)_\Omega \ge 0\,.$$

Переход к нижнему пределу в последнем соотношении дает вариационное неравенство:

$$(\mathbf{u}, w) \in K_\omega,$$
$$(\sigma(\mathbf{u}), \varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}))_{G\setminus\overline{\omega}} - (\mathbf{g}, \widetilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})_G + a_\Omega(w, \widetilde{w} - w) - (f, \widetilde{w} - w)_\Omega \ge 0 \quad \forall(\widetilde{\mathbf{u}}, \widetilde{w}) \in K_\omega.$$

Список литературы

1. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Мир, 1974.

2. *Хлуднев А. М., Хоффманн К.-Х., Боткин Н. Д.* Вариационная задача о контакте упругих объектов разных размерностей // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 43, № 6. С. 707–719.

3. *Стекина Т. А.* Вариационная задача об одностороннем контакте упругой пластины с балкой // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т 9, вып. 1. С. 46–56.

4. *Хлуднев А. М.* Об одностороннем контакте двух пластин, расположенных под углом друг к другу // Журнал ПМТФ. 2008. Т. 49, № 4. С. 553–567.

5. *Неустроева Н. В.* Жесткое включение в контактной задаче для упругих пластин // СибЖИМ. 2009. Т. 12, № 4. С. 92–105.

6. *Неустроева Н. В.* Односторонний контакт упругих пластин с жестким включением // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т 9, вып. 4. С. 51–64.

7. *Morrassi A., Rosset E.* Detecting Rigid Inclusions, or Cavities, in an Elastic Body // J. Elasticity. 2003. Vol. 73. P. 101–126.

8. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине // Препринт ИГиЛ СО РАН. 2009. № 1. С. 1–18.

9. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

10. *Темам Р.* Математические задачи теории пластичности. М.: Наука, 1991.

Материал поступил в редколлегию 19.03.2010

Адрес автора

РОТАНОВА Татьяна Александровна

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: t.stekina@gmail.com