УДК 539.311

Н. П. Лазарев, Т. С. Попова

ВАРИАЦИОННАЯ ЗАДАЧА О РАВНОВЕСИИ ПЛАСТИНЫ С ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ НЕПРОНИКАНИЯ ДЛЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ТРЕЩИНЫ*

Рассматривается вариационная задача минимизации функционала энергии упругой изотропной пластины, содержащей трещину. При этом на кривой, задающей разрез (трещину), налагаются краевые условия, описывающие взаимное непроникание точек противоположных берегов трещины. Предложенные в работе краевые условия имеют вид неравенств, которые определяют невыпуклое множество допустимых функций. Доказано, что решение вариационной задачи существует. Установлено, что решение, при достаточной гладкости, удовлетворяет краевым условиям на кривой, соответствующей разрезу. В задаче с заданным углом изгиба одного берега трещины установлена эквивалентность вариационной и дифференциальной постановок задач.

Ключевые слова: пластина Кирхгофа–Лява, трещина, нелинейные краевые условия, вариационное неравенство, контактная задача.

Введение

В классическом подходе в вариационной задаче минимизации функционала энергии пластины, содержащей трещину, предполагается задание условий на перемещения или на напряжения в виде равенств. Мы на кривой, описывающей разрез (трещину), зададим краевые нелинейные условия в виде неравенств.

В настоящее время с помощью вариационного подхода исследованы различные задачи с краевыми условиями в виде неравенств [1–5]. В статической теории упругости перемещения предполагаются настолько малыми, что область, соответствующая деформируемому телу, а также и вектор нормали к поверхности трещины остаются неизменными. В данной работе предполагается, что под воздействием внешних сил пластина вблизи трещины может деформироваться с существенным изгибом. Это обстоятельство, совместно с соотношениями Кирхгофа–Лява [6], обусловливают изменение нормали к поверхности трещины. Для описания контакта противоположных берегов трещины для пластины, деформирующейся с существенными изгибами, предлагается новое условие непроникания для векторов перемещения. Рассматривается ситуация, в которой нелинейное условие непроникания имеет геометрическая смысл. Хотя на разрезе возникают нелинейные слагаемые, геометрически нелинейные деформации фон Кармана в пластине при этом не учитываются. Для простоты некоторые коэффициенты при некоторых физических величинах приняты равными 1. Это упрощение существенно укорачивает действительные физические формулы. Поскольку все физические коэффициенты являются постоянными, то вид соотношений и их математические свойства, полученные

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10-01-00054).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 77–88

для данной упрощенной модели, будут иметь аналогичный вид и для точной модели Кирхгофа–Лява.

В работе доказано существование решения задачи минимизации функционала энергии пластины на множестве функций (перемещений), удовлетворяющих указанному условию непроникания в виде неравенства. Доказано, что решение вариационной задачи удовлетворяет дифференциальным уравнениям равновесия. Получены некоторые соотношения на кривой, описывающей трещину.

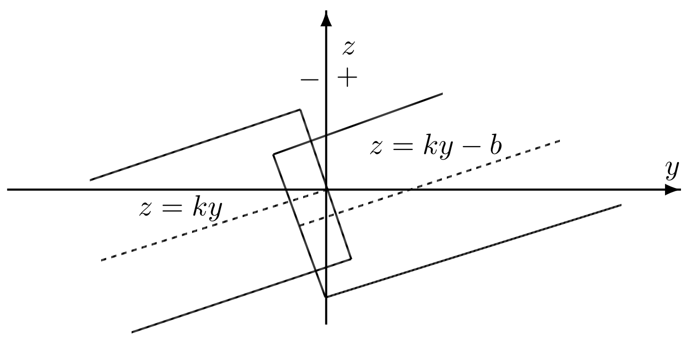
1. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ. Кривая, задающая форму трещины, определяется следующим образом: $\Gamma_c = \{(x, y) \mid y = \psi(x), 0 < x < l\}$, $\psi(x)$ — достаточно гладкая функция, $\Gamma_c \subset \Omega$, $\Gamma_c \cap \Gamma = \varnothing$. Нормаль к кривой к Γ_c обозначим через ν. Считаем, что срединная поверхность пластины совпадает с областью $\Omega_c = \Omega \setminus \overline{\Gamma}_c$. Предположим, что пластина содержит вертикальную трещину, которая описывается в срединной плоскости кривой Γ_c. Это означает, что поверхность трещины можно задать в виде $(x, y) \in \Gamma_c$, $-h \le z \le h$, где $|z|$ — расстояние до срединной поверхности пластины, а $2h$ — толщина пластины. Горизонтальные и вертикальные перемещения точек срединной поверхности обозначим через $W = (w^1, w^2)$ и w соответственно, $\chi = (W, w)$. Предположим, что перемещения точек пластины достаточно малы и описываются гипотезой Кирхгофа–Лява. Считаем один из берегов разреза положительным, а другой отрицательным — в соответствии с направлением ν. В случае, когда след функции v берется на положительном берегу, применяем обозначение v^+, аналогично для отрицательного берега. Скачок функции на Γ_c обозначим через $[v] = v^+ - v^-$.

Рассмотрим известное условие непроникания противоположных берегов вертикальной трещины (разреза), использованное во многих работах [1–3; 7–10]:

$$\left[W(x, y)\nu\right] \ge h\left|\left[\frac{\partial w(x, y)}{\partial \nu}\right]\right| \quad \text{для почти всех } (x, y) \in \Gamma_c. \tag{1}$$

Выделим следующий частный случай. Пусть $\Gamma_c = \{(x, y) | \, y = 0, 0 < x < l\}$, ν — единичный вектор оси Oy. Пусть точки срединной поверхности имеют следующие перемещения $\chi = (W, w)$, соответствующие рисунку:



Горизонтальные $W = (w^1, w^2)$ на обоих берегах равны нулю, т. е. $W^+ = 0$, $W^- = 0$. Вертикальные перемещения вблизи трещины на положительном берегу ($y > 0$) определены соотношением $w^+ = ky - b$, а на отрицательном ($y < 0$) формулой $w^- = ky$. Подчеркнем, что перемещения равны $w^- = ky - b$, $w^+ = ky$ только вблизи трещины (т. е. только для $|y| \leq d$, d — некоторое число). Тогда условие непроникания (1) выполнено. Действительно,

$$[W]\nu = (W^+ - W^-)\nu = [\frac{\partial w(x,y)}{\partial \nu}] = [\frac{\partial w(x,y)}{\partial y}] = k - k = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Хотя условие выполнено, из построения перемещений (см. рис.) и гипотезы Кирхгофа–Лява следует, что имеет место проникание точек берегов трещины друг в друга.

Чтобы исключить возможность проникания подобного вида, необходимо умножить скачок вектора перемещений $[\big((W - z\nabla w), w\big)]$ скалярно на трехмерный вектор $(\nu, \frac{\partial w}{\partial \nu}^+)$ — перпендикулярный к поверхности положительного берега трещины:

$$[\big((W - z\nabla w), w\big)](\nu, \frac{\partial w}{\partial \nu}^+) = [W\nu] - z\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right] + [w]\frac{\partial w}{\partial \nu}^+ \geq 0 \quad \forall z \in [-h; h]\,.$$

Далее, подставляя в последнем неравенстве $z = h$, а затем $z = -h$, выведем неравенство (2).

$$[W\nu] + [w]\frac{\partial w^+}{\partial \nu} \geq h\left|\left[\frac{\partial w}{\partial \nu}\right]\right| \quad \text{на} \;\; \Gamma_c. \tag{2}$$

Заметим, что если добавленным квадратичным слагаемым пренебречь $[w]\frac{\partial w^+}{\partial y}$, то получится предыдущее неравенство (1).

Условие непроникания на кривой Γ_c будем задавать с помощью неравенства (2). На внешней границе зададим краевые условия, описывающие жесткое защемление:

$$w = \frac{\partial w}{\partial n} = W = 0 \;\; \text{на} \;\; \Gamma, \tag{3}$$

где n — внешняя нормаль к Γ. Пусть подпространство $H^{1,0}(\Omega_c)$ пространства Соболева $H^1(\Omega_c)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ. Аналогично, подпространство $H^{2,0}(\Omega_c)$ пространства $H^2(\Omega_c)$ состоит из функций, обращающихся в нуль на Γ вместе со всеми первыми производными. Введем обозначение:

$$H(\Omega_c) = H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{1,0}(\Omega_c) \times H^{2,0}(\Omega_c).$$

Через $H(\Omega)$ обозначим следующее пространство:

$$H(\Omega) = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times H_0^2(\Omega).$$

Рассмотрим следующее множество допустимых перемещений:

$$K_1 = \{\chi = (W, w) \in H(\Omega_c) \mid \chi \text{ удовлетворяет (2)}\}.$$

Заметим, что множество K_1 не является выпуклым, тем не менее оно является слабо замкнутым множеством в $H(\Omega_c)$.

Введем тензоры деформаций срединной поверхности пластины:

$$\varepsilon_{ij}(W) = \frac{1}{2}(w^i{}_{,j} + w^j{}_{,i}), \quad (v_{,i} = \frac{\partial v}{\partial x_i}), \quad x_1 = x,\; x_2 = y,\; (i,j = 1,2),$$

и тензоры усилий

$$\sigma_{11}(W) = D(\varepsilon_{11}(W) + k\varepsilon_{22}(W)),$$
$$\sigma_{22}(W) = D(\varepsilon_{22}(W) + k\varepsilon_{11}(W)),$$
$$\sigma_{12}(W) = \sigma_{21}(W) = D(1-k)2\varepsilon_{12}(W), \quad k = \mathrm{const}, \ 0 < k < \frac{1}{2}, \ D = \frac{3}{2h^3}.$$

Рассмотрим функционал энергии пластины

$$\Pi(\chi) = \frac{1}{2}B_c(w,w) + \frac{1}{2}\big\langle\sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\big\rangle_c - \langle f, \chi\rangle_c, \tag{4}$$

где скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle_c$ означают скалярное произведение в $L_2(\Omega_c)$, $f = (f_1, f_2, f_3) \in [L_2(\Omega_c)]^3$ — заданный вектор внешних сил. В формуле (4) и далее предполагается суммирование по повторяющимся индексам. Билинейная форма $B_c(\cdot,\cdot)$ определяется по формуле

$$B_c(w,\bar{w}) = \int\limits_{\Omega_c} b(w,\bar{w})\, d\Omega_c,$$

где

$$b(w,\bar{w}) = w,_{11}\bar{w},_{11} + w,_{22}\bar{w},_{22} + kw,_{11}\bar{w},_{22} + kw,_{22}\bar{w},_{11} + 2(1-k)w,_{12}\bar{w},_{12}.$$

Задачу о равновесии пластины, решение которой удовлетворяет условиям непроникания (2) и защемления (3), можно сформулировать как задачу минимизации функционала энергии на множестве допустимых перемещений:

$$\min_{\bar{\chi}\in K_1} \Pi(\bar{\chi}). \tag{5}$$

2. Существование решения и справедливость уравнений равновесия

Благодаря первому неравенству Корна [11]

$$\langle\sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W)\rangle_c \geq c\|W\|^2_{H^{1,0}(\Omega_c)\times H^{1,0}(\Omega_c)} \quad \forall\, W \in H^{1,0}(\Omega_c)\times H^{1,0}(\Omega_c),$$

и неравенству

$$B_c(w,w) \geq c\|w\|^2_{H^{2,0}(\Omega_c)} \quad \forall\, w \in H^{2,0}(\Omega_c)$$

легко показать, что функционал энергии $\Pi(\chi)$ является коэрцитивным и слабо полунепрерывным снизу функционалом [1]. Дополнительно к указанному свойству $\Pi(\chi)$ вспомним слабую замкнутость множества K_1. Указанные два условия гарантируют существование решения [1].

Заметим, что единственность решения в данном случае не установлена. Зафиксируем одно из решений задачи и обозначим его через $\hat{\chi}$. Предположим, что данное решение $\hat{\chi}$ является достаточно гладким.

Покажем, что найденное решение удовлетворяет уравнениям равновесия в области Ω_c. Рассмотрим для этого другую вариационную задачу с прежним функционалом энергии, но с другим множеством допустимых перемещений:

$$K^\infty = \{\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w}) \in H(\Omega_c) |\ \bar{\chi} = \hat{\chi} + \chi_0,\ \chi_0 \in C_0^\infty(\Omega_c)\}.$$

Очевидно, что данная вариационная задача имеет решением функцию $\hat{\chi}$, причем в силу выпуклости K^∞ будет справедливо следующее вариационное неравенство:

$$B_c(\hat{w}, \bar{w} - \hat{w}) + \langle \sigma_{ij}(\hat{W}), \varepsilon_{ij}(\bar{W} - \hat{W}) \rangle_c \geq \langle f, \bar{\chi} - \hat{\chi} \rangle_c \quad \forall \bar{\chi} \in K^\infty. \tag{6}$$

Далее, из обобщенных формул Грина [7–8] для любых достаточно гладких функций в $\Omega_c : w, \bar{w}, W = (w^1, w^2)$, $\bar{W} = (\bar{w}^1, \bar{w}^2)$ имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \rangle_c = -\int\limits_{\Omega_c} \sigma_{ij,j}(W)\bar{w}^i \, d\Omega_c - \int\limits_{\Gamma_c} \Big[\sigma_\nu(W)\bar{W}\nu + \sigma_\tau(W)\bar{W}\tau \Big] \, d\Gamma_c, \\
&B_c(w, \bar{w}) = \int\limits_{\Omega_c} \Delta^2 w \, \bar{w} \, d\Omega_c + \int\limits_{\Gamma_c} \left[t(w)\bar{w} - m(w)\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \right] d\Gamma_c, \\
&t(w) = \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\Delta w + (1-k)\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} \right), \quad m(w) = k\Delta w + (1-k)\frac{\partial^2 w}{\partial \nu^2},
\end{aligned} \tag{7}$$

где $\sigma_\nu(W)\nu$ и $\sigma_\tau(W)$ — нормальная и касательная составляющие вектора $\{\sigma_{ij}(W)\nu_j\}$ соответственно:

$$\begin{aligned}
&\sigma_{ij}(W)\nu_j = \sigma_\nu(W)\nu_i + \sigma_{\tau i}(W), \quad i = 1, 2, \\
&\sigma_\nu(W) = \sigma_{ij}(W)\nu_j\nu_i, \quad \tau = (-\nu_2, \nu_1), \\
&\bar{w}^i = \bar{W}_\nu \nu_i + \bar{W}_{\tau i}, \quad i = 1, 2 \quad \bar{W}_\nu = \bar{w}^i \nu_i, \\
&\sigma_\tau(W) = (\sigma_{\tau 1}(W), \sigma_{\tau 2}(W)), \quad \bar{W}_\tau = (\bar{W}_{\tau 1}, \bar{W}_{\tau 2}).
\end{aligned}$$

Подставляя в неравенство (6) функции, принадлежащие множеству K^∞, с помощью формул (7), получим следующие уравнения равновесия, справедливые в смысле распределений в области с разрезом Ω_c:

$$\begin{aligned}
-\sigma_{ij,j}(\hat{W}) &= f_i, \quad i = 1, 2, \\
\Delta^2 \hat{w} &= f_3.
\end{aligned}$$

3. Граничные условия

Теперь получим некоторые краевые условия, выполненные на кривой Γ_c, соответствующей трещине. Рассмотрим другую вариационную задачу с тем же функционалом энергии, но с другим выпуклым и замкнутым множеством допустимых перемещений $\bar{K} = \{\bar{\chi} = \hat{\chi} + \check{\chi} \mid \check{\chi} \in H(\Omega)\}$. Для вариационной задачи

$$\min_{\bar{\chi} \in \bar{K}} \Pi(\bar{\chi}),$$

очевидно, решением будет также функция $\hat{\chi}$, при этом на данном выпуклом и замкнутом множестве $\bar{K}$ будет справедливо вариационное неравенство

$$B_c(\hat{w}, \bar{w} - \hat{w}) + \langle \sigma_{ij}(\hat{W}), \varepsilon_{ij}(\bar{W} - \hat{W}) \rangle_c \geq \langle f, \bar{\chi} - \hat{\chi} \rangle_c \quad \forall \bar{\chi} \in \bar{K}. \tag{8}$$

Возьмем $\bar{\chi} = \hat{\chi} \pm \check{\chi}$, $\check{\chi} \in H(\Omega)$ в качестве пробных функций в (8), и применим ранее выписанные формулы (7). Используя далее независимость между $\check{W}$, $\check{w}$, $\partial\check{w}/\partial\nu$ на кривой Γ_c, несложными выкладками получаем соотношения

$$[\sigma_\nu(\hat{W})] = [\sigma_\tau(\hat{W})] = [t(\hat{w})] = [m(\hat{w})] = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{9}$$

Для того, чтобы получить следующее краевое условие, выполненное на кривой Γ_c, рассмотрим вариационную задачу о минимизации прежнего функционала $\Pi(\chi)$ на выпуклом и замкнутом множестве K_τ, состоящего из пробных функций $\bar{\chi} \in H(\Omega_c)$, для которых справедливы соотношения

$$[\bar{W}\nu] = [\hat{W}\nu], \quad [\bar{w}] = [\hat{w}], \quad \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\Big] = \Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big] \quad \text{на} \quad \Gamma_c.$$

Следующей задаче о минимизации функционала энергии

$$\min_{\bar{\chi} \in K_\tau} \Pi(\bar{\chi})$$

эквивалентно вариационное неравенство

$$B_c(\hat{w}, \bar{w} - \hat{w}) + \big\langle \sigma_{ij}(\hat{W}), \varepsilon_{ij}(\bar{W} - \hat{W}) \big\rangle_c \geq \langle f, \bar{\chi} - \hat{\chi} \rangle_c \quad \forall \bar{\chi} \in K_\tau.$$

Поскольку значение W_τ не влияет на справедливость выполнения неравенства (2) для χ, то с помощью равенств (7), получаем

$$\sigma_\tau(\hat{W}) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_c. \tag{10}$$

Граничные условия (9), (10) выполняются в каждой точке в том случае, если решение χ достаточно гладкое. Для того, чтобы выписать соотношения на кривой, описывающей трещину, в общем случае, введем следующие пространства функций:

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) = \Big\{ \varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \;\Big|\; \frac{\varphi}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\Gamma_c) \Big\},$$
$$H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c) = \Big\{ \varphi \in H_0^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c) \;\Big|\; \frac{\nabla\varphi}{\sqrt{\rho}} \in L_2(\Gamma_c) \Big\},$$

снабженные следующими нормами:

$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2_{\frac{1}{2}} + \int_{\Gamma_c} \rho^{-1}\varphi^2,$$
$$\|\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2_{\frac{3}{2}} + \int_{\Gamma_c} \rho^{-1}(\nabla\varphi)^2,$$

где $\rho(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Gamma_c)$ соответственно. Обозначим через $H_{00}^{\frac{-i}{2}}(\Gamma_c)$ пространства, сопряженные к $H_{00}^{\frac{i}{2}}(\Gamma_c)$ соответственно $i = 1, 3$. Как известно (см., например, [7]), для решения $\hat{\chi}$ вариационной задачи (5) можно определить следующие операторы следа:

$$\sigma_\nu(\hat{W})^\pm \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \quad \sigma_{\tau i}(\hat{W})^\pm \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \quad m(\hat{w})^\pm \in H_{00}^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_c), \quad t(\hat{w})^\pm \in H_{00}^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_c).$$

С помощью введенных выше операторов определим соотношение (9) в общем случае (в точном смысле):

$$\langle \sigma_\nu(\hat{W})^+ - \sigma_\nu(\hat{W})^-, \psi \rangle_{1/2,\Gamma_c} = \langle \sigma_{\tau i}(\hat{W})^+ - \sigma_{\tau i}(\hat{W})^-, \psi \rangle_{1/2,\Gamma_c} = 0,$$
$$\langle m(\hat{w})^+ - m(\hat{w})^-, \psi \rangle_{1/2,\Gamma_c} = 0, \quad \langle t(\hat{w})^+ - t(\hat{w})^-, \phi \rangle_{3/2,\Gamma_c} = 0,$$

для

$$i = 1, 2, \quad \forall \psi \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_c), \quad \forall \phi \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_c).$$

Здесь $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{1/2,\Gamma_c}$, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{3/2,\Gamma_c}$ обозначают двойственность между парами пространств $H_{00}^{-1/2}(\Gamma_c)$, $H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)$ и $H_{00}^{-3/2}(\Gamma_c)$, $H_{00}^{3/2}(\Gamma_c)$ соответственно. Также имеет место соотношение, обобщающее (10):

$$\langle \sigma_{\tau i}(u), \psi_i\rangle_{1/2,\Gamma_c} = 0 \quad \forall \psi \in [H_{00}^{1/2}(\Gamma_c)]^2,\ \psi_i \nu_i = 0.$$

Найдем теперь другие краевые условия, выполненные на кривой Γ_c. Приемы получения краевых условий аналогичны предыдущим действиям с вариационными неравенствами и формулой Грина (7). Для функции производной по нормали $\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}$ вертикальных перемещений $\hat{w}^+$ решения $\hat{\chi}$ задачи (5) введем обозначения $\gamma = \gamma(x,y) = \dfrac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}$ для (x,y), лежащих на Γ_c.

Рассмотрим следующую вариационную задачу:

$$\min_{\bar{\chi}\in K_\gamma} \Pi(\bar{\chi}), \tag{11}$$

где K_γ состоит из функций, принадлежащих пространству $H(\Omega_c)$ и удовлетворяющих двум следующим соотношениям:

$$\frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu} = \gamma, \quad [\bar{W}\nu] + [\bar{w}]\gamma \ge h\left|\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\right]\right| \ \text{ на } \ \Gamma_c.$$

Очевидно, что множество K_γ выпукло и замкнуто, следовательно, задача минимизации функционала энергии (11) имеет решение, причем оно будет равно $\hat{\chi}$. В силу выпуклости множества K_γ справедливо вариационное неравенство

$$B_c(\hat{w}, \bar{w}-\hat{w}) + \langle \sigma_{ij}(\hat{W}), \varepsilon_{ij}(\bar{W}-\hat{W})\rangle_c \ge \langle f, \bar{\chi}-\hat{\chi}\rangle_c \quad \forall \bar{\chi}\in K_\gamma. \tag{12}$$

Из последнего вариационного неравенства вытекает следующее интегральное тождество:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W})[\hat{W}]\nu + t(\hat{w})[\hat{w}] - m(\hat{w})\left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\right]\Big)\, d\Gamma_c = 0. \tag{13}$$

В самом деле, применяя формулу (7) в неравенстве (12), получим

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W})[\bar{W}-\hat{W}]\nu + t(\hat{w})[\bar{w}-\hat{w}] - m(\hat{w})\left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\right]\Big)\, d\Gamma_c \ge 0 \quad \forall\, \bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w}) \in K_\gamma. \tag{14}$$

Далее подставим в (14) специальную пробную функцию $\bar{\chi}\in K_\gamma$, такую что

$$[\bar{W}]\nu = 2[\hat{W}]\nu, \quad [\bar{w}] = 2[\hat{w}], \quad \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}^+ = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}^+, \quad \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\right] = 2\left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\right].$$

Такая функция $\bar{\chi}$ существует, поскольку [7] для достаточно гладких функций $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, η, θ, заданных на Γ_c, определены функции $\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w})$ из $H(\Omega_c)$ так, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\xi = [\bar{W}], \quad \eta = [\bar{w}], \quad \theta = \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\right], \quad \frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu} = \frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} \ \text{ на } \ \Gamma_c.$$

Подробнее, достаточно гладкую кривую Γ_c можно продолжить до кривой $\Sigma \subset \Omega_c$, $\Sigma \cap \Gamma = \varnothing$, без самопересечений, принадлежащей классу $C^{2,1}$. Обозначим через v^+ — след на Σ, соответствующий v^+ на Γ_c, соответствующую нормаль к Σ также обозначим через ν. Тогда для произвольных $\eta \in H_{00}^{\frac{3}{2}}(\Gamma_c)$, $\theta \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ существует функция $\bar{w} \in H^{2,0}(\Omega_c)$ такая, что

$$[\bar{w}] = \eta, \quad \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\Big] = \theta, \quad \frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu} = \frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \bar{w}^-}{\partial \nu} = \frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} - \theta, \quad \Big(\frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu}, \frac{\partial \bar{w}^-}{\partial \nu} \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma)\Big).$$

Для произвольных функций $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ из пространства $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c) \times H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_c)$ существуют функции $\bar{w}^1$, $\bar{w}^2$, принадлежащие пространству $H^{1,0}(\Omega_c)$, такие, что $[\bar{w}^1] = \xi_1$, $[\bar{w}^2] = \xi_2$. Таким образом, (14) влечет

$$\int\limits_{\Gamma_c} \left(-\sigma_\nu(\hat{W})[\hat{W}]\nu + t(\hat{w})[\hat{w}] - m(\hat{w}) \left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\right] \right) d\Gamma_c \geq 0.$$

Подставив теперь в (14) пробную функцию $\bar{\chi}$, удовлетворяющую равенствам

$$[\bar{W}]\nu = 0, \quad [\bar{w}] = 0, \quad \frac{\partial \bar{w}^+}{\partial \nu} = \frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}, \quad \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\right] = 0,$$

получим интегральное тождество (13). Таким образом, (14) можно переписать в следующем виде:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \left(-\sigma_\nu(\hat{W})[\bar{W}]\nu + t(\hat{w})[\bar{w}] - m(\hat{w}) \left[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu}\right] \right) d\Gamma_c \geq 0 \quad \forall \bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w}) \in K_\gamma.$$

Используя далее принятые ранее обозначения для ξ, θ, η, перепишем последнее соотношение:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W})\xi\nu + t(\hat{w})\eta - m(\hat{w})\theta \Big) d\Gamma_c \geq 0, \qquad (15)$$
$$\forall\, \xi = (\xi_1, \xi_2), \eta, \theta, \quad \xi\nu + \eta\gamma \geq h|\theta|.$$

Рассмотрим далее представление

$$-\sigma_\nu(\hat{W})\xi\nu + t(\hat{w})\eta - m(\hat{w})\theta = \frac{1}{2}\Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)(\xi\nu + \eta\gamma + h\theta) + \\ + \frac{1}{2}\big(-\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w})\big)(\xi\nu + \eta\gamma - h\theta) + \big(\sigma_\nu(\hat{W})\gamma + t(\hat{w})\big)\eta.$$

Тогда для произвольных η, $\theta = 0$, ξ, удовлетворяющих равенству $\xi\nu = -\eta\gamma$, имеем $\xi\nu + \eta\gamma \pm h\theta = 0$ и из (15) выведем следующее равенство:

$$\sigma_\nu(\hat{W})\gamma + t(\hat{w}) = 0. \qquad (16)$$

Благодаря равенству (16) оставшаяся часть формулы (15) преобразовывается к виду

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big(\xi\nu + \eta\gamma + h\theta\Big) + \\ + \Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big(\xi\nu + \eta\gamma - h\theta\Big)\Big) d\Gamma_c \geq 0,$$
$$\forall\, \xi, \eta, \theta, \quad \xi\nu + \eta\gamma + h\theta \geq 0, \quad \xi\nu + \eta\gamma - h\theta \geq 0.$$

Это означает, что

$$-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w}) \geq 0, \quad -\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w}) \geq 0,$$

т. е.

$$-\sigma_\nu(\hat{W}) \geq \frac{1}{h}|m(\hat{w})|. \tag{17}$$

Легко видеть, что интегральное тождество (13) с помощью (16) может быть представлено в следующем виде:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\gamma + h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big)d\Gamma_c + \\ + \int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\gamma - h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big)\, d\Gamma_c = 0.$$

Далее, с помощью (2), (17) мы заключаем, что

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\gamma + h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big)\, d\Gamma_c = 0,$$

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\gamma - h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big)\, d\Gamma_c = 0.$$

Заменив обратно γ через $\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}$, на основе предыдущих рассуждений получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Для гладкого решения* $\hat{\chi} = (\hat{W}, \hat{w}) \in K_1$ *задачи* (5), *выполнены следующие соотношения на кривой* Γ_c*:*

$$[\sigma_\nu(\hat{W})] = [\sigma_\tau(\hat{W})] = [t(\hat{w})] = [m(\hat{w})] = 0, \quad \sigma_\nu(\hat{W})\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} + t(\hat{w}) = 0,$$

$$\sigma_\tau(\hat{W}) = 0, \quad [\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} \geq h\Big|\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big|, \quad -\sigma_\nu(\hat{W}) \geq \frac{1}{h}|m(\hat{w})|,$$

$$\Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) - \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} + h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big) = 0,$$

$$\Big(-\sigma_\nu(\hat{W}) + \frac{1}{h}m(\hat{w})\Big)\Big([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu} - h\Big[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\Big]\Big) = 0.$$

Заметим, что из (2), (16) последние два соотношения эквивалентны следующему:

$$\sigma_\nu(\hat{W})\bigg([\hat{W}]\nu + [\hat{w}]\frac{\partial \hat{w}^+}{\partial \nu}\bigg) + m(\hat{w})\left[\frac{\partial \hat{w}}{\partial \nu}\right] = 0.$$

4. Задача для заданного угла изгиба берега трещины

Рассмотрим задачу о равновесии пластины с вертикальной трещиной при заданном угле изгиба пластины вблизи трещины. Задача с известным углом прогиба в частности может быть использована при моделировании воздействий нагрузок, воспроизводимых с помощью штампа, который и задает определенный наклон берегов трещины. С математической точки зрения задача с известным углом позволяет выписать соответствующую вариационной дифференциальную постановку.

В этом случае будем считать, что

$$\frac{\partial w^+}{\partial \nu} = \tan \alpha(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma_c, \tag{18}$$

т. е. положительный берег трещины под воздействием внешних сил изгибается под известным углом $\alpha = \alpha(x,y)$. При этом условие непроникания (2) примет вид

$$[W\nu] + [w] \tan \alpha(x,y) \geq h \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right| \text{ на } \Gamma_c. \tag{19}$$

Пусть $K_\alpha = \{\chi = (W,w) \in H(\Omega_c) \mid \chi \text{ удовлетворяет } (18),(19)\}$. Тогда соответствующую вариационную задачу о равновесии пластины можно сформулировать в виде

$$\min_{\bar{\chi} \in K_\alpha} \Pi(\bar{\chi}) \,. \tag{20}$$

Формулировка задачи (20) имеет некоторое сходство с вариационной задачей о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину [7–8], их отличает дополнительное условие на производную по нормали: $\frac{\partial w^+}{\partial \nu} = \tan \alpha(x,y)$, $(x,y) \in \Gamma_c$. В силу выпуклости и замкнутости множества K_α решение χ задачи (20) существует и единственно. Предположим, что решение χ достаточно гладкое. В соответствии с ранее полученными результатами, справедливы соотношения в области Ω_c:

$$-\sigma_{ij,j}(W) = f_i, \;\; i = 1,2, \tag{21}$$

$$\Delta^2 w = f_3, \tag{22}$$

и на границе Γ_c

$$\begin{gathered}
[\sigma_\nu(W)] = [\sigma_\tau(W)] = [t(w)] = [m(w)] = 0, \quad \sigma_\tau(W) = 0, \\
\frac{\partial w^+}{\partial \nu} = \tan \alpha(x,y), \quad [W]\nu + [w] \tan \alpha \geq h \left| \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right|, \\
-\sigma_\nu(W) \geq \frac{1}{h} |m(w)|, \quad \sigma_\nu(W) \tan \alpha + t(w) = 0, \\
\left(-\sigma_\nu(W) - \frac{1}{h} m(w) \right) \left([W]\nu + [w] \tan \alpha + h \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right) = 0, \\
\left(-\sigma_\nu(W) + \frac{1}{h} m(w) \right) \left([W]\nu + [w] \tan \alpha - h \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] \right) = 0.
\end{gathered} \tag{23}$$

Последние два соотношения эквивалентны следующему:

$$\sigma_\nu(W) \Big([W]\nu + [w] \tan \alpha \Big) + m(w) \left[\frac{\partial w}{\partial \nu} \right] = 0. \tag{24}$$

Таким образом, из вариационной постановки задачи (20), на основе дополнительного предположения о гладкости решения χ, получены дифференциальные уравнения (21), (22) и соотношения на внутренней границе (23).

Пусть теперь для χ справедливы соотношения (21)–(23) и равенства (3) на внешней границе Γ. Снова предположим, что χ имеет соответствующие производные. Покажем, что χ является решением и вариационной задачи (20). Возьмем произвольную функцию

$\bar{\chi} = (\bar{W}, \bar{w}) \in K_\alpha$, умножим уравнения (21) на $\bar{w}^i$, $i = 1, 2$, (22) на $\bar{w}$ и проинтегрируем по области Ω_c. В результате на основе (7) получим

$$\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \rangle_c = \int\limits_{\Omega_c} f_i \bar{w}^i \, d\Omega_c - \int\limits_{\Gamma_c} \Big[\sigma_\nu(W) \bar{W}\nu + \sigma_\tau(W) \bar{W}\tau \Big] \, d\Gamma_c,$$

$$B_c(w, \bar{w}) = \int\limits_{\Omega_c} f_3 \bar{w} \, d\Omega_c + \int\limits_{\Gamma_c} \Big[t(w)\bar{w} - m(w) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \, d\Gamma_c.$$

Просуммировав последние два равенства, с учетом равенства $f_1\bar{w}^1 + f_2\bar{w}^2 + f_3\bar{w} = f\bar{\chi}$, получим

$$\Big\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \Big\rangle_c + B_c(w, \bar{w}) = \int\limits_{\Omega_c} f \bar{\chi} \, d\Omega_c -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_c} \Big[\sigma_\nu(W) \bar{W}\nu + \sigma_\tau(W) \bar{W}\tau - t(w)\bar{w} + m(w) \frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \, d\Gamma_c. \tag{25}$$

С учетом соотношений $[\sigma_\nu(W)] = [\sigma_\tau(W)] = [t(w)] = [m(w)] = 0$, $\sigma_\nu(W) \tan\alpha + t(w) = 0$, $\sigma_\tau(W) = 0$, справедливых на Γ_c, из (25) заключаем, что

$$\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \rangle_c + B_c(w, \bar{w}) = \int\limits_{\Omega_c} f \bar{\chi} \, d\Omega_c -$$
$$- \int\limits_{\Gamma_c} \Big(\sigma_\nu(W)[\bar{W}\nu] + \sigma_\nu(W)[\bar{w}] \tan\alpha + m(w) \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big) \, d\Gamma_c. \tag{26}$$

Выпишем теперь очевидные соотношения на Γ_c:

$$-\sigma_\nu(W) \geq 0, \quad -h\sigma_\nu(W) \Big| \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big| \geq m(w) \Big| \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big|$$

Преобразуем далее интеграл в правой части по границе Γ_c следующим образом:

$$\int\limits_{\Gamma_c} \Big(\sigma_\nu(W) \Big([\bar{W}\nu] + [\bar{w}] \tan\alpha - h \Big| \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big| \Big) + \Big(h\sigma_\nu(W) \Big| \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big| + m(w) \Big[\frac{\partial \bar{w}}{\partial \nu} \Big] \Big) \Big) \, d\Gamma_c.$$

Поскольку последний интеграл неположителен, (26) влечет соотношение

$$\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W}) \rangle_c + B_c(w, \bar{w}) \geq \int\limits_{\Omega_c} f \bar{\chi} \, d\Omega_c \quad \forall \bar{\chi} \in K_\alpha \tag{27}$$

Возьмем в равенстве (26) $\bar{\chi} = \chi$, применяя равенство (24), получим соотношение

$$\langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(W) \rangle_c + B_c(w, w) = \int\limits_{\Omega_c} f \chi \, d\Omega_c. \tag{28}$$

Вычтем из соотношения (27) равенство (28). В результате получим вариационное неравенство

$$B_c(w, \bar{w} - w) + \langle \sigma_{ij}(W), \varepsilon_{ij}(\bar{W} - W) \rangle_c \geq \langle f, \bar{\chi} - \chi \rangle_c \quad \forall \bar{\chi} \in K_\alpha.$$

В силу выпуклости и дифференцируемости функционала энергии $\Pi(\chi)$, выпуклости множества K_α последнее, вариационное неравенство эквивалентно задаче минимизации (20).

Итак, дифференциальная постановка, состоящая из уравнений (21), (22), краевых условий на внутренней (23) и внешней (3) границах, формально эквивалентна вариационной постановке (20) задачи о равновесии пластины.

Список литературы

1. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and Control in Solid Mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhauser Verlag, 1997.

2. *Рудой Е. М.* Равновесие вязко-упругой пластины, имеющей вертикальную трещину // Математические проблемы механики сплошных сред: Тез. докл. Новосибирск, 1997.

3. *Попова Т. С.* О регулярности решения задачи равновесия для пластины с трещиной // Математические заметки ЯГУ. 1996. Т. 3, вып. 2. С. 124–132.

4. *Bach M., Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Derivatives of the Energy Functional for 2D-Problem with a Crack under Signorini and Friction Condition // Math. Mech. in Appl. Sciences. 2000. Vol. 23. P. 515–524.

5. *Хлуднев А. М.* Задача о трещине на границе жесткого включения в упругой пластине. Новосибирск, 2009. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики; № 1–09).

6. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972.

7. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. Southampton; Boston: WIT Press, 2000.

8. *Ковтуненко В. А., Леонтьев А. Н., Хлуднев А. М.* Задача о равновесии пластины с наклонным разрезом // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 2. С. 164–174.

9. *Лазарев Н. П.* Дифференцирование функционала энергии в задаче о равновесии пластины, содержащей наклонную трещину // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2003. Т. 3, вып. 2. С. 62–73.

10. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. мат. 2002. Т. 5. С. 155–161.

11. *Фикера Г.* Теоремы существования в теории упругости. М.: Наука, 1974.

Материал поступил в редколлегию 18.10.2010

Адреса авторов

ЛАЗАРЕВ Нюргун Петрович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
НИИ математики при ЯГУ им. М. К. Аммосова
ул. Кулаковского, 48, Якутск, 677000, Россия
e-mail: nyurgun@ngs.ru
ПОПОВА Татьяна Семеновна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова
ул. Белинского 58, Якутск, 677000, Россия