УДК 330.115

А. Е. Трубачева

ОБ ОСОБОМ ОПТИМАЛЬНОМ РЕЖИМЕ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ВОЗМУЩЕНИИ ФУНКЦИИ ПРОИЗВОДСТВА*

В большинстве работ, использующих методы оптимального управления, рассматриваются только вогнутые производственные функции. В реальной экономике производственная функция подвергается различным возмущениям, которые обусловлены объективными причинами, спрогнозировать которые заранее невозможно. В данной работе исследуется проблема распределения доходов от производства между потреблением и инвестициями, когда доходы моделируются возмущенными производственными функциями. Априори нельзя было предположить, что при возмущенном случае существует математическое обоснование оптимального уровня управления производством. В работе доказана теорема о магистрали, определяющая оптимальное значение доли инвестиций. Тем самым в случае квазинеоклассических производственных функций показано существование особого оптимального режима управления.

Ключевые слова: возмущенная производственная функция, динамическая модель, допустимые траектории, особый оптимальный режим управления, магистральная теорема, квазинеоклассическая функция, правило накопления, инвестиции, потребление.

Введение

Изучение системы *инвестор-производство* с целью решения проблемы распределения доходов от производства между потреблением и инвестициями в настоящее время является актуальным. Данная тема на протяжении последних лет активно исследуется (см., например, работы [1–4]). Заметим, что в большинстве работ по данной тематике изучались модели, основанные на вогнутых производственных функциях. В реальной экономике производственная функция подвергается различным возмущениям, которые обусловлены объективными причинами, спрогнозировать которые заранее невозможно. Большое значение имеет изучение зависимости экономической динамики производства от типов возмущений производственной функции, часто встречаемых на практике. В работе [5] исследовались новые классы слабо возмущенных производственных функций, и были получены новые правила накопления для стационарных значений фондовооруженности. В настоящей работе продолжается изучение аддитивной модели возмущения производственной функции, т. е. функции вида $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$, где $f(k)$ — неоклассическая функция, $\tau(k) \in C^2$, и находится оптимальная доля инвестиций в этом случае (см. также [6]).

Априори нельзя было предположить, что при возмущенном случае существует математическое обоснование оптимального уровня управления производством. Основным результатом данной работы является нахождение этого оптимального управления.

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 10-06-00168-а), РГНФ (проект № 09-06-00337-а).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 2. С. 105–118

1. Математическая модель возмущения производственной функции

Прежде чем привести формулировку оптимизационной задачи, введем следующие определения.

Определение 1. *Стратегия инвестора* $s(t), t \in [0, T]$ — это доля его дохода от производства, направленная на развитие данного производства.

Определение 2. Производственная функция $f(k)$ называется *неоклассической*, если выполняются следующие условия:

$$f' > 0, \quad f'' < 0,$$
$$f(0) = 0, \quad \lim_{k\to\infty} f(k) = \infty, \quad \lim_{k\to 0} f'(k) = \infty, \quad \lim_{k\to\infty} f'(k) = 0.$$

Функцию вида

$$\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k),$$

где $f(k)$ — неоклассическая производственная функция, $\tau(k) \in C^2$, будем называть *аддитивной моделью возмущения производственной функции.*

В дальнейшем будет использоваться следующая норма функции $g \in C^2$ (см. [7; 8]):

$$\|g\|_{C^2} = \sum_{i=0}^{2} \max_k |g^{(i)}| = \max_k |g| + \max_k |g'| + \max_k |g''|.$$

Определение 3. Функция $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$ называется *аддитивно слабо возмущенной*, если $f(k)$ — неоклассическая функция, $\tau(k) \in C^2$, и возмущение $\tau(k)$ мало, т. е. $\|\tau\|_{C^2} \le \zeta$ для $0 < \zeta \ll 1$ и $\tau(0) = 0$. Иногда такие функции будем называть *квазинеоклассическими.*

Основной оптимизационной задачей, определяющей стратегию поведения инвестора при возмущении функции производства, является следующая (см. [5. С. 158]): максимизировать функционал потребления инвестора

$$\int_0^T (1 - s(t))\tilde{f}(k(t))\, e^{-\delta t}\, dt \tag{1}$$

при ограничениях

$$\dot{k}(t) = s(t)\tilde{f}(k(t)) - \mu k(t), \tag{2}$$

$$0 \le s(t) \le 1, \quad k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \ge k_T > 0, \tag{3}$$

где $\tilde{f}(k)$ — аддитивно слабо возмущенная функция; $k(t)$ — фондовооруженность; $\delta > 0$ — константа дисконтирования; $\mu > 0$ — темп амортизации фондов; k_T — нижняя граница фондовооруженности в момент времени T; $s(t)$ — доля инвестиций в доходе.

Замечание 1. Заметим, что последнее условие в (3) в литературе носит название *условия «экономического горизонта»*. Учитывая это условие, для прогнозирования поведения инвестора в случае неединственности решения задачи целесообразно рассматривать максимальное значение фондовооруженности, так как инвестор заинтересован в увеличении объемов производства, которое не происходит при уменьшении фондовооруженности.

2. Исследование оптимальной стратегии инвестора

В данном параграфе используется принцип максимума Понтрягина [9]. Пусть $\psi_0(t)$ — сопряженная функция, соответствующая подынтегральной функции в (1), $\psi(t)$ — сопряженная функция, соответствующая уравнению (2). Тогда гамильтониан рассматриваемой задачи имеет вид

$$\mathcal{H}(\psi, k, s, t) = (1 - s(t))e^{-\delta t}\tilde{f}(k)\psi_0 + \psi[s(t)\tilde{f}(k) - \mu k].$$

Введем следующее определение (см. [10]).

Определение 4. Оптимальная траектория $(k(t), s(t))$ называется *особой,* если вдоль нее выполняется соотношение

$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s} \equiv 0,$$

где $\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}e^{\delta t}$.

Известно, что оптимальное управление в рассматриваемой задаче удовлетворяет необходимому условию принципа максимума Понтрягина. Кроме того, имеют место условия: $\psi(T) \leq 0, (\psi(T), k(T) - k_T) = 0$ (см. [11; 12]). При этом сопряженная переменная ψ_0 не зависит от t, и можно считать, что ψ_0 равна либо 0, либо 1. Если $\psi_0 = 0$, то $\psi(t) \neq 0$ при всех t (см. также [13. С. 209]).

Если сопряженная переменная $\psi_0 = 0$, то тогда оптимальным будет либо управление $s(t) \equiv 1$, либо управление $s(t) \equiv 0$ в зависимости от знака $\psi(t)$. Покажем это.

Если $\psi_0 = 0$, то имеем

$$\begin{aligned} &\mathcal{H}(\psi, k, s, t) = \psi(t)s\tilde{f}(k) - \psi(t)\mu k, \\ &\dot{\psi}(t) = \psi(t)\mu - \psi(t)s\tilde{f}'(k). \end{aligned} \tag{4}$$

Заметим, что $\max\limits_s \mathcal{H}(\psi, k, s, t)$ достигается при $\max\limits_s \psi(t)s$. Поэтому при $\psi(t) > 0$ имеем $s(t) = 1$, а при $\psi(t) < 0$ имеем $s(t) = 0$.

Далее определим знак $\psi(t)$. Для этого из (4) получаем следующее уравнение:

$$\frac{d\psi}{\psi} = \left[\mu - s\tilde{f}'(k)\right] dt,$$

решением которого является

$$\psi(t) = \psi(0)e^{\int_0^t [\mu - s\tilde{f}'(k)]\, dt}$$

для любого t.

Таким образом, если $\psi(0) \geq 0$, то $\psi(t) \geq 0$ для любого t и $s(t) \equiv 1$. Если $\psi(0) < 0$, то $\psi(t) < 0$ и $s(t) \equiv 0$. Случай, когда $s(t) \equiv 1$, означает, что все ресурсы уходят на выполнение планового задания k_T, которое слишком большое. Поскольку этот случай нереалистичен, мы его отбрасываем.

Во втором случае, когда $s(t) \equiv 0$, интересующая нас в дальнейшем особая оптимальная траектория существует при $\psi(t) = 0$, чего при $\psi_0 = 0$ быть не может [11; 12]. Поэтому этот случай мы также рассматривать не будем.

Пусть теперь $\psi_0 = 1$. Тогда гамильтониан рассматриваемой задачи принимает следующий вид:

$$\mathcal{H}(\psi, k, s, t) = (1 - s)e^{-\delta t}\tilde{f}(k) + \psi[s\tilde{f}(k) - \mu k].$$

Если план $s(t)$ оптимален, то в силу принципа максимума Понтрягина существует непрерывная функция $\psi(t)$ такая, что выполнены условия (2), (3) и сопряженная система выглядит следующим образом:

$$\dot{\psi}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial k} = -(1 - s)e^{-\delta t}\tilde{f}'(k) - \psi[s\tilde{f}'(k) - \mu]. \tag{5}$$

Заметим, что, отбрасывая члены из $\mathcal{H}$, которые не зависят от s, получаем, что в силу принципа максимума функция $s(t)$ максимизирует выражение

$$(1 - s)e^{-\delta t} + \psi s. \tag{6}$$

Из предыдущих условий мы также имеем следующие ограничения:

$$0 \le s \le 1, \quad \psi(T)[k(T) - k_T] = 0, \quad \psi(T) \le 0.$$

Обозначим $q(t) = \psi(t)e^{\delta t}$, где $q(t)$ — «объективно обусловленная оценка» производственных фондов. Тогда (6) можно представить в виде $(1+s(q-1))e^{-\delta t}$. Таким образом, условие максимизации по s выражения (6) сводится к условию максимизации по s выражения $s(q-1)$, из которого получаем следующую систему условий:

$$\begin{cases} s(t) = 1, & \text{если } q > 1, \\ s(t) = 0, & \text{если } q < 1, \\ s(t) \in [0,\, 1], & \text{если } q = 1. \end{cases} \tag{7}$$

Уравнение (5) при переходе к новой переменной q принимает вид

$$\dot{q}(t) = (\delta + \mu)q - [(1 - s) + sq]\tilde{f}'(k),$$

так как $\dot{q}(t) = \dot{\psi}(t)e^{\delta t} + \delta\psi(t)e^{\delta t}$.

Таким образом, из принципа максимума вытекает, что если $s(t)$ — оптимальное управление, то оно удовлетворяет (7) и система

$$\begin{aligned} &\dot{k}(t) = sf(k) + s\tau(k) - \mu k, \\ &\dot{q}(t) = (\delta + \mu)q - [1 - s + sq](f'(k) + \tau'(k)), \\ &k(0) = k_0 > 0, \quad k(T) \ge k_T > 0, \\ &q(T)[k(T) - k_T] = 0, \quad q(T) \le 0, \\ &\|\tau(k)\|_{C^2} \le \zeta, \quad 0 < \zeta \ll 1, \quad \tau(0) = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

имеет решение. Здесь учтено, что $\tilde{f}(k) = f(k) + \tau(k)$.

Отметим, что первое уравнение системы (8) связано со вторым через функцию $s(t)$, удовлетворяющую условию (7). Система дифференциальных уравнений, входящих в (8), автономна, т. е. в правые части уравнений не входит в явном виде время t.

Перейдем к исследованию поведения решений системы (8). Найдем участки знакопостоянства производных $\dot{k}(t)$ и $\dot{q}(t)$. Рассмотрим два случая: $q > 1$ и $q < 1$.

Случай I. Пусть $q > 1$. Тогда $s = 1$ и

1) $\dot q(t) = (\delta + \mu)q - q(f'(k) + \tau'(k))$.

Условие $\dot q(t) = 0$ приводит к уравнению

$$f'(k) = \delta + \mu - \tau'(k). \tag{9}$$

Учитывая условия неоклассичности и то, что $|\tau'(k)| \le \zeta \ll 1$, можно заключить, что уравнение (9) имеет решение $k^* > 0$, т. е.

$$f'(k^*) = \delta + \mu - \tau'(k^*),$$

но оно может быть неединственно (см. рис. 1). Более того, таких решений $k_i^* > 0$ ($i \in I$, где I — некоторое индексное множество) может быть бесконечно много, т. е. мы не можем гарантировать конечное число пересечений графиков функций $f'(k)$ и $\delta + \mu - \tau'(k)$. В дальнейшем будем считать $\zeta \ll 1$ настолько малой величиной по сравнению с $(\delta + \mu)$, что $\delta + \mu - \tau'(k) \ge \varepsilon_0 > 0$. Пусть X — множество решений уравнения (9). Так как $\lim\limits_{k\to 0} f'(k) = \infty$, а функция $\tau'(k)$ ограничена, то найдется такой $k_0 > 0$, что для всех $k \in (0, k_0)$ выполнено неравенство $f'(k) > \delta + \mu - \tau'(k)$, т. е. $X \subseteq [k_0, \infty)$. Из непрерывности функций $f'(k)$ и $\tau'(k)$ в интервале $(0, \infty)$ получаем, что множество $X \cap [k_1, k_2]$ замкнуто для любых $k_2 \ge k_1 > 0$. Отсюда, ввиду включения $X \subseteq [k_0, \infty)$, получаем, что X имеет наименьший элемент $k^*_{\min}$.

Так как $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$, и выполнено условие $\delta + \mu - \tau'(k) \ge \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$, то найдется такое $\tilde k$, что для всех $k > \tilde k$ выполнено неравенство $\delta + \mu - \tau'(k) > f'(k)$. Таким образом, мы имеем включение $X \subseteq [k^*_{\min}, \tilde k]$, а значит, получаем, что X замкнуто и ограничено. Следовательно, X имеет максимальный элемент $k^*_{\max}$.

Таким образом, мы показали, что всегда существуют самое левое и самое правое по оси абсцисс решения уравнения (9): $k^*_{\min} \le k^*_i \le k^*_{\max}$, $i \in I$ (рис. 1).

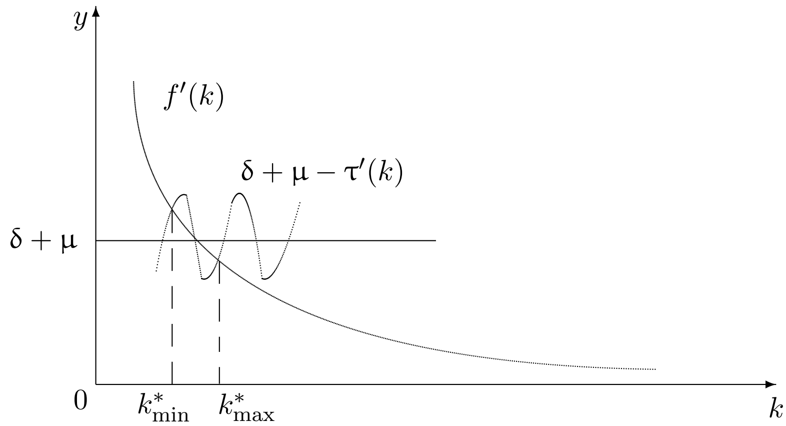

Рис. 1

2) Аналогично рассматривается условие $\dot k(t) = 0$: $\dot k(t) = f(k) + \tau(k) - \mu k = 0$, или

$$f(k) = \mu k - \tau(k). \tag{10}$$

Из условия $\|\tau(k)\|_{C^2} \le \zeta$ имеем $|\tau(k)| \le \zeta \ll 1$, поэтому ввиду условия $\tau(0) = 0$ существует решение $\tilde k > 0$ уравнения (10), т. е.

$$f(\tilde k) = \mu\tilde k - \tau(\tilde k),$$

но оно может быть неединственным (рис. 2). Покажем существование самого левого и самого правого решений уравнения (10): $\tilde{k}_{\min} \le \tilde{k}_j \le \tilde{k}_{\max}$ ($j \in J$, где J — некоторое, возможно бесконечное, индексное множество номеров решений уравнения (10)).

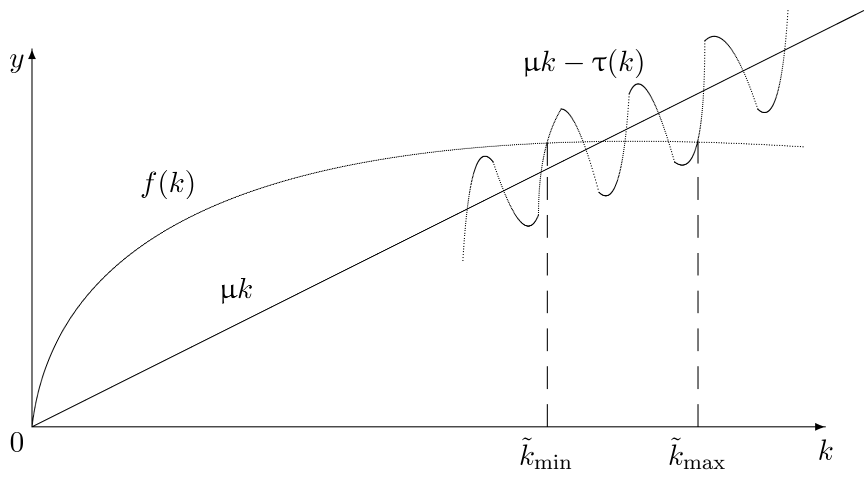

Рис. 2

Пусть Y — множество решений уравнения (10). Из непрерывности функций $f(k)$ и $\tau(k)$ на $[0, \infty)$ следует, что множество $Y \cap [0, k]$ замкнуто для любого $k \ge 0$. Отсюда получаем, что Y имеет наименьший элемент $\tilde{k}_{\min}$. Для того чтобы показать существование в Y наибольшего элемента, достаточно получить ограниченность множества Y. Рассмотрим функции $g(k) = \mu k - \zeta$ и $h(k) = g(k) - f(k)$. Из условий $\lim\limits_{k \to \infty} f'(k) = 0$ и $\lim\limits_{k \to \infty} g'(k) = \infty$ получаем $\lim\limits_{k \to \infty} h'(k) = \infty$. В частности, найдется такое r_0, что для любого $k > r_0$ выполнено $h'(k) > 0$. Таким образом, функция $h(k)$ монотонно возрастает на интервале $[r_0, \infty)$. Из условия $\lim\limits_{k \to \infty} h'(k) = \infty$ получаем, что функция $h(k)$ неограничена. Следовательно, найдется такое число r_1, что для любого $k > r_1$ выполнено $h(k) > 0$, т. е. $g(k) > f(k)$. Из условия $|\tau(k)| \le \zeta$ получаем, что для любого $k > r_1$ выполнено $\mu k - \tau(k) > f(k)$. Итак, мы получаем $Y \subseteq [0, r_1]$. Следовательно, Y ограничено.

Далее исследуем взаиморасположение значений $k^*_{\min}, k^*_{\max}$ и $\tilde{k}_{\min}, \tilde{k}_{\max}$.

Предложение 1. *Для крайнего слева решения $k^*_{\min}$ уравнения (9) и крайнего справа решения $\tilde{k}_{\max}$ уравнения (10), где $\tau(k) \in C^2$, выполнено следующее условие:*

$$k^*_{\min} < \tilde{k}_{\max}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства введем обозначение $k^*_{\min} = k^*_1$. Тогда получаем $f(k^*_1) = \int_0^{k^*_1} f'(k)dk > \int_0^{k^*_1} (\delta + \mu - \tau'(k))dk = (\delta + \mu)k^*_1 - \tau(k)\ \Big|_0^{k^*_1} = (\delta + \mu)k^*_1 - \tau(k^*_1) >$ $> \mu k^*_1 - \tau(k^*_1)$ (по определению аддитивно слабо возмущенной функции имеем $\tau(0) = 0$). Следовательно, точка k^*_1 удовлетворяет неравенству

$$f(k^*_1) > \mu k^*_1 - \tau(k^*_1). \tag{11}$$

Так как для всех $k \ge \tilde{k}_{\max}$ выполняется условие $f(k) \le \mu k - \tau(k)$, то из условия (11) получаем $k^*_1 < \tilde{k}_{\max}$. Предложение 1 доказано. □

Для уточнения расположения $k^*_{\max}$ и $\tilde{k}_{\max}$ введем следующее условие на значение амплитуды возмущения.

Определение 5. Амплитуду ζ возмущения $\tau(k)$ назовем *согласованной* с производственной функцией $f(k)$ и темпом амортизации μ, если выполняется следующее условие: для $\bar{k}$, определенного уравнением $f'(\bar{k}) = \mu - \zeta$, выполняется неравенство $f(\bar{k}) > (\mu + \zeta)\bar{k}$.

Заметим, что для любых $f(k)$ и μ согласованная с ними амплитуда ζ существует. В самом деле, при $\zeta \to 0$ выполняется $\bar{k} \to \hat{k}$, где $\hat{k}$ — решение уравнения $f'(k) = \mu$. Так как $f(\hat{k}) > \mu\hat{k}$, то найдется такое ζ, что выполняется неравенство $f(\bar{k}) > (\mu + \zeta)\bar{k}$.

Предложение 2. *Пусть амплитуда ζ возмущения $\tau(k)$ является согласованной с $f(k)$ и μ. Тогда выполняется следующее условие:*

$$k^*_{\max} < \tilde{k}_{\max}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для удобства вместо $k^*_{\max}$ будем писать k^*. Так как при уменьшении δ значение k^* возрастает, то достаточно рассмотреть случай $\delta = 0$. Так как k^* лежит левее решения $\bar{k}$ уравнения $f'(k) = \mu - \zeta$, то достаточно показать, что $\bar{k} < \tilde{k}_{\max}$. Ввиду доказательства предложения 1 достаточно показать неравенство

$$\int_0^{\bar{k}} f'(k)\, dk > \int_0^{\bar{k}} (\mu - \tau'(k))\, dk.$$

Площадь фигуры, ограниченной прямой $l \equiv \mu + \zeta$, функцией $f'(k)$ и осью ординат, обозначим через P (рис. 3). Пусть k_0 — точка пересечения прямой l с функцией $f'(k)$. Площадь фигуры, ограниченной прямой l, функцией $f'(k)$ и вертикальной прямой с абсциссой $\bar{k}$, обозначим через R (см. рис. 3). Покажем, что при условии согласованности ζ с $f(k)$ и μ мы имеем $R < P$. Это следует из равенств $P = f(k_0) - (\mu + \zeta)k_0$, $R = (\mu + \zeta)(\bar{k} - k_0) - f(\bar{k}) + f(k_0)$ и условия согласованности $f(\bar{k}) > (\mu + \zeta)\bar{k}$.

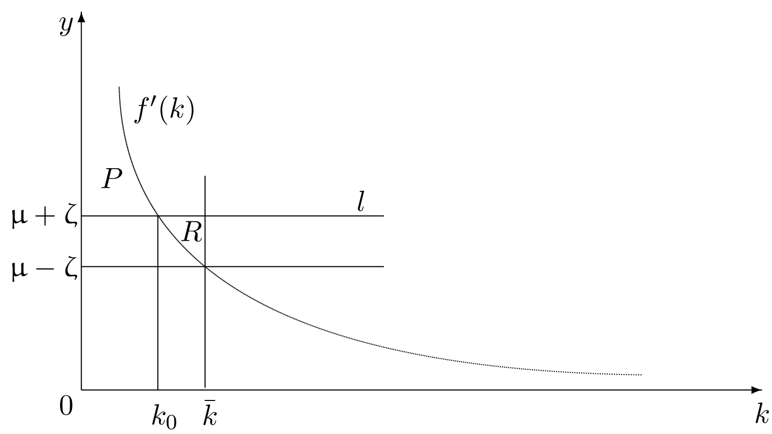

Рис. 3

Следующие условия очевидны (из геометрического смысла определенного интеграла):

$$(\mu + \zeta)\bar{k} > \int_0^{\bar{k}} (\mu - \tau'(k))\, dk,$$

$$(\mu+\zeta)\bar{k} = (\mu+\zeta)k_0 + f(\bar{k}) - f(k_0) + R,$$
$$\int\limits_0^{\bar{k}} f'(k)\,dk = (\mu+\zeta)k_0 + f(\bar{k}) - f(k_0) + P.$$

Так как $P > R$, то получаем требуемое неравенство

$$\int\limits_0^{\bar{k}} f'(k)\,dk > \int\limits_0^{\bar{k}} (\mu - \tau'(k))\,dk.$$

Предложение 2 доказано. □

Замечание 2. Ввиду доказанного, при согласованной амплитуде возмущения, множество решений $X = \{k_i^*,\ i \in I\}$ уравнения (9) содержится в интервале $(0, \tilde{k}_{\max})$. В силу замкнутости множества X возможны 3 случая:

1) существует максимальный элемент $k_{\max}^{**}$ в множестве $X \cap (0, \tilde{k}_{\min})$;
2) $X \cap (0, \tilde{k}_{\min}) = \varnothing$;
3) $\tilde{k}_{\min} = \sup\{X \cap (0, \tilde{k}_{\min}]\}$.

В случае I мы имеем следующие области знакопостоянства производных $\dot{q}(t)$ и $\dot{k}(t)$ на плоскости (k, q):

$$\begin{cases} \dot{q}(t) < 0 & \text{при } k < k_{\min}^*, \\ \dot{q}(t) = 0 & \text{при } k = k_i^*, i \in I, \\ \dot{q}(t) > 0 & \text{при } k > k_{\max}^*; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{k}(t) > 0 & \text{при } k < \tilde{k}_{\min}, \\ \dot{k}(t) = 0 & \text{при } k = \tilde{k}_j, j \in J, \\ \dot{k}(t) < 0 & \text{при } k > \tilde{k}_{\max}. \end{cases}$$

Заметим, что в случае I для ситуации 1 замечания 2 значение $\dot{q}(t)$ при $k > k_{\max}^{**}$ может быть как положительным, так и отрицательным. Особое оптимальное решение (как будет видно из фазовых диаграмм) существует лишь тогда, когда $\dot{q}(t) > 0$ при $k > k_{\max}^{**}$. Поэтому в дальнейшем, говоря об элементе $k_{\max}^{**}$, будем иметь ввиду только такую ситуацию. (Остальные случаи замечания 2 обсудим позже.)

Случай II. Пусть $q < 1$. Тогда $s = 0$ и

1) $\dot{q}(t) = (\delta+\mu)q - f'(k) - \tau'(k)$.

Условие $\dot{q}(t) = 0$ дает уравнение

$$(\delta+\mu)q - f'(k) - \tau'(k) = 0.$$

Откуда следует, что
$$q = \frac{f'(k) + \tau'(k)}{\delta+\mu}.$$

Заметим, что ввиду условия $\lim\limits_{k\to\infty} f'(k) = 0$ при $k \to \infty$ функция $q(k(t))$ может принимать отрицательные значения. Напомним также, что для всех рассматриваемых траекторий нужно проверять условие $q(T) \le 0$ (см. условия системы (8)).

Кроме того, в рассматриваемом случае II из первого уравнения системы (8) имеем

2) $\dot{k}(t) = -\mu k < 0$.

Изобразим на плоскости (k, q) фазовую диаграмму для системы (8) (рис. 4), т. е. проекцию траекторий $(k(t),\ q(t))$, являющихся решениями этой системы, соответствующую ситуации 1 замечания 2. Заметим, что в случае I ($q > 1$) внутри отрезков $[k^*_{\min}, k^{**}_{\max}]$ и $[\tilde{k}_{\min}, \tilde{k}_{\max}]$, т. е. в областях 1 и 2 (см. рис. 4), а также во II случае ($q < 1$) в области 3 (см. рис. 4), находятся участки неопределенности (заранее неизвестные колебания, зависящие от конкретного вида неоклассической функции $f(k)$ и возмущения $\tau(k)$).

Рассмотрим подробнее область 4: $k < k^*_{\min}, \quad q > 1$. Если начальная точка (k_0, q_0) принадлежит этой области, то система уравнений (8) эквивалентна системе

$$\begin{cases} \dot{k}(t) = f(k) + \tau(k) - \mu k = \tilde{f}(k) - \mu k, \\ \dot{q}(t) = (\delta + \mu)q - q(f'(k) + \tau'(k)) = (\delta + \mu)q - q\tilde{f}'(k). \end{cases}$$

По теореме существования и единственности решения систем дифференциальных уравнений (см., например: [14]) через заданную точку (k_0, q_0) области 4 проходит единственная кривая $(k(t), q(t))$, являющаяся решением системы. Фазовая траектория в этой области будет иметь один из видов, изображенных на рис. 4.

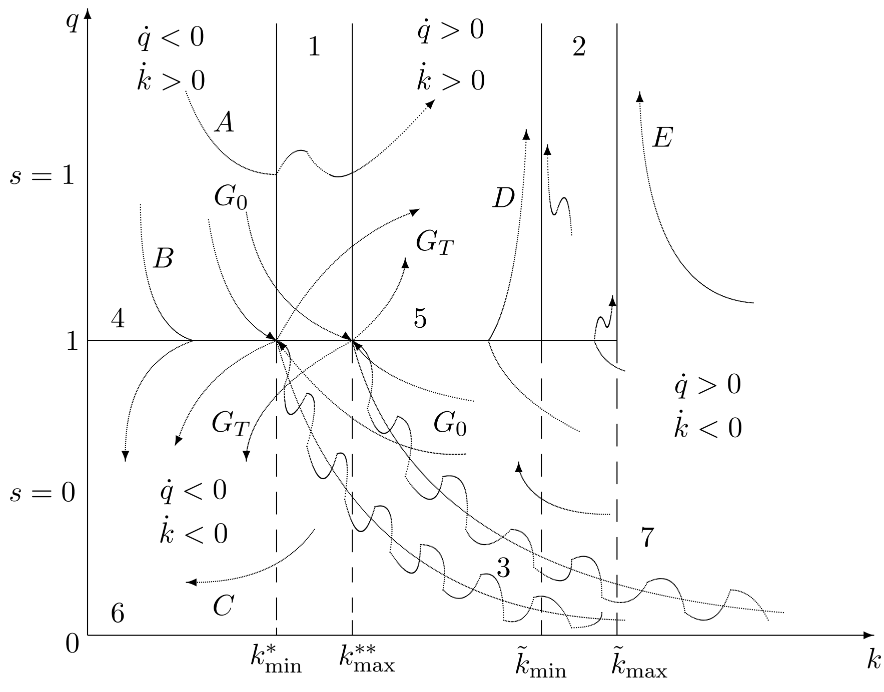

Рис. 4

Подобные рассуждения можно провести для областей 5–7 (см. рис. 4). Заметим, что когда траектория попадает в участки неопределенности 1–3, в зависимости от конкретного вида функций $f(k)$ и $\tau(k)$ там происходит либо возрастание, либо убывание функции $q(k)$.

Особыми точками для данной аддитивной модели возмущения производственной функции являются точки $(k^*_{\min}, 1), \ldots, (k^{**}_{\max}, 1)$. В них одновременно $\dot{q}(t) = 0,\ \dot{k}(t) = 0$.

Траектории G_0 и G_T, изображенные на рис. 4, представляют собой разделение траектории на 2 части: G_0 — часть, выходящая из точки (k_0, q_0) и входящая в особую точку

$(k^*, 1)$, где $k^* \in [k^*_{\min}, k^{**}_{\max}]$; G_T — часть, выходящая из $(k^*, 1)$ и попадающая в конечную точку $(k(T), q(T))$.

Заметим, что в особых точках можно оставаться сколь угодно долго, чтобы затем по траектории G_T попасть в точку с первой координатой не меньшей k_T в момент T. Для этого достаточно применять особое оптимальное управление s^*, которое будет найдено чуть позже.

Замечание 3. Заметим, что в случае $k_0 < \tilde{k}_{\min}$ и $k_T > \tilde{k}_{\max}$ вообще не существует допустимых траекторий (см. рис. 4). Поэтому ситуацию 2 замечания 2 мы рассматривать не будем. Ситуацию 3 замечания 2 мы также рассматривать не будем, поскольку нас интересует максимальная фондовооруженность, значение которой не попадает в «отрезок неопределенности» $[\tilde{k}_{\min}, \tilde{k}_{\max}]$.

Пусть выполняется ситуация 1 замечания 2. Так как в качестве меры устойчивости принимается уровень гарантирования условия «экономического горизонта» (см. замечание 1), то нас будет интересовать прежде всего максимальный элемент $k^{**}_{\max}$ множества $\{k^*_i,\ i \in I\}$, существующий в ситуации 1 замечания 2.

Покажем, что оптимальное значение функционала (1) достигается в стационарной точке $k^{**}_{\max}$. Из условия $\dot{k}(t) = 0$ имеем $sf(k) = \mu k$, т. е. $s = \frac{\mu k}{f(k)}$. Подставляя это значение в максимизируемое подынтегральное выражение $(1-s)\tilde{f}(k)$ функционала (1), получаем: $(1 - \frac{\mu k}{\tilde{f}(k)})\tilde{f}(k) = \tilde{f}(k) - \mu k$. Таким образом, максимизация подынтегрального выражения функционала (1) свелась к максимизации выражения $\tilde{f}(k) - \mu k$.

Из условия $\dot{q}(t) = 0$ получаем уравнение $\tilde{f}'(k) = \delta + \mu$, решениями которого являются точки k^*_i, где $i \in I$. Максимальное значение выражения $\tilde{f}(k^*_i) - \mu k^*_i$, $i \in I$ достигается в точке $k^{**}_{\max}$ (рис. 5), поскольку отрезок, соединяющий точки $\tilde{f}(k^*_i)$ и μk^*_i, имеет максимальную длину в точке $k^{**}_{\max}$. Это получается потому, что угол наклона касательной $y = (\delta + \mu)k + b$ ($\delta, \mu > 0, b > 0$ — некоторая константа) к функции $\tilde{f}(k)$ в точках k^*_i, $i \in I$ больше угла наклона прямой $y = \mu k$.

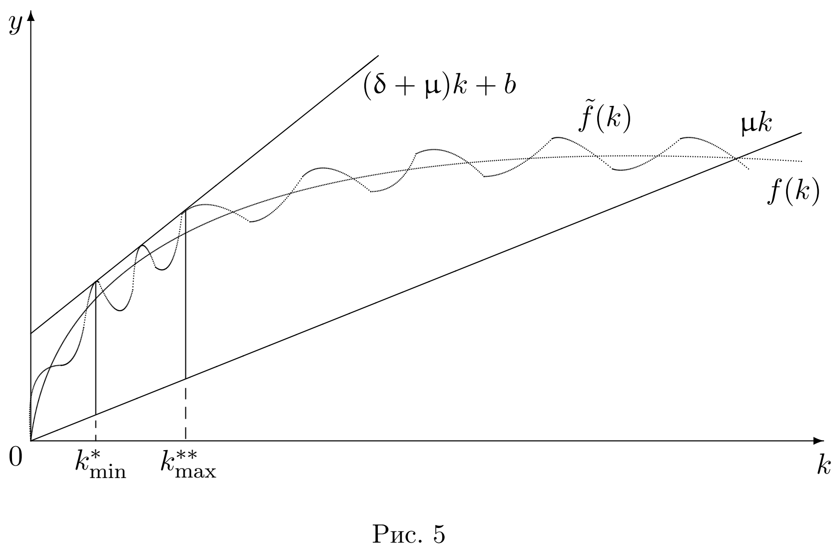

Рис. 5

Определим теперь явно особое оптимальное управление s^*. Из первого уравнения системы (8) при $\dot{k}(t) = 0$ имеем

$$s(f(k) + \tau(k)) - \mu k = 0,$$

откуда

$$s = \frac{\mu k}{f(k) + \tau(k)}. \tag{12}$$

Из второго уравнения системы (8) при $q = 1$ имеем

$$f'(k) = \delta + \mu - \tau'(k), \tag{13}$$

решением которого является, в частности, $k^{**}_{\max}$.

В итоге из (12), (13) получаем:

$$s^* = \frac{\mu k^{**}_{\max}}{f(k^{**}_{\max}) + \tau(k^{**}_{\max})}.$$

Ввиду того, что $0 \le s^* \le 1$, должно выполняться неравенство $f(k^{**}_{\max}) - \mu k^{**}_{\max} \ge \zeta$, где $0 < \zeta \ll 1$. Будем считать, что это неравенство вблизи оптимального стационарного значения фондовооруженности $k^{**}_{\max}$ выполнено всегда в силу малости возмущения ζ.

Найдем теперь T_i — время движения по i-й траектории (см. рис. 4). Если начальное условие q_0 выбрано таким образом, что фазовая траектория является траекторией типа A на этом рисунке, то время движения по этой траектории определяется начальным условием k_0 и уравнением $\dot{k}(t) = \tilde{f}(k(t)) - \mu k(t)$ и равно

$$T_A = \int\limits_{k_0}^{k_T} \frac{dk}{\tilde{f}(k) - \mu k}.$$

Аналогично, используя $\dot{k} = -\mu k < 0$, получаем

$$T_C = \int\limits_{k_T}^{k_0} \frac{dk}{\mu k}.$$

Время движения по траектории типа B не превосходит величины

$$T_B = \int\limits_{k_0}^{k^{**}_{\max}} \frac{dk}{\tilde{f}(k) - \mu k} + \int\limits_{k^{**}_{\max}}^{k_T} \frac{dk}{\mu k}.$$

Аналогично находим время движения по оставшимся типам траекторий T_D, T_E, изображенных на рис. 4.

Далее, укажем явно оптимальную траекторию и проверим необходимое условие Келли. Для этого выберем начальное условие q_0 таким образом, чтобы точка (k_0, q_0) оказалась на траектории G_0, идущей в узловую точку $(k^{**}_{\max}, 1)$. При этом s равно 0 или 1. Время T^* движения по траектории G_0 зависит только от k_0 и $k^{**}_{\max}$. В точке $(k^{**}_{\max}, 1)$ следует оставаться ровно столько, чтобы затем по траектории G_T попасть в точку с первой координатой не меньшей k_T в момент времени T. Время движения по G_T зависит только от k_T и $k^{**}_{\max}$.

И, наконец, проверим следующее условие. Известно [10], что каждое особое оптимальное управление удовлетворяет условию Келли, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}\geq 0,$$

где $\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}e^{\delta t}$. Поэтому для найденного оптимального значения управления s^* необходимо проверить условие Келли оптимальности особого режима управления. Для этого выпишем снова функцию Гамильтона

$$\mathcal{H}(\psi,k,s,t)=(1-s)e^{-\delta t}\tilde f(k)+\psi[s\tilde f(k)-\mu k],$$

где $\tilde f(k)=f(k)+\tau(k),\ \|\tau(k)\|_{C^2}\leq\zeta,\ \tau(k)\in C^2,\ \tau(0)=0,\ 0<\zeta\ll 1$. Тогда мы имеем

$$\tilde{\mathcal{H}}=\mathcal{H}e^{\delta t}=(q-1)s\tilde f(k)+\tilde f(k)-q\mu k,$$
$$\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}=(q-1)\tilde f(k).$$

Отметим, что когда идет речь о магистральных траекториях, то нас интересуют только особые оптимальные траектории, т. е. такие, на которых выполняется соотношение $\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}\equiv 0$ (см. определение 4). Заметим, что для рассматриваемого случая (вблизи точки $k^{**}_{\max}$) ввиду малости амплитуды возмущения ζ имеем $f(k)>\tau(k)$, поэтому выражение $\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}=0$ справедливо только при $q=1$.

Для дальнейших вычислений нам также понадобятся следующие уравнения (см. (8)):

$$\dot k(t)=s\tilde f(k)-\mu k,$$
$$\dot q(t)=(\delta+\mu)q-\tilde f'(k)+(1-q)s\tilde f'(k).$$

Для проверки условия Келли нам нужны следующие выражения:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}=\dot q\tilde f(k)+(q-1)\tilde f'(k)\dot k=(\delta+\mu)q\tilde f(k)-\tilde f'(k)\tilde f(k)+(1-q)s\tilde f'(k)\tilde f(k)+$$
$$+(q-1)s\tilde f'(k)\tilde f(k)-(q-1)\mu k\tilde f'(k),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}=(\delta+\mu)\tilde f(k)[(\delta+\mu)q-\tilde f'(k)+(1-q)s\tilde f'(k)]+$$
$$+(\delta+\mu)q\tilde f'(k)(s\tilde f(k)-\mu k)-[\tilde f''(k)\tilde f(k)+(\tilde f'(k))^2](s\tilde f(k)-\mu k)-$$
$$-(q-1)\mu\tilde f'(k)(s\tilde f(k)-\mu k)-(q-1)\mu k\tilde f''(k)(s\tilde f(k)-\mu k)-$$
$$-\mu k\tilde f'(k)[(\delta+\mu)q-\tilde f'(k)+(1-q)s\tilde f'(k)],$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}=(\delta+\mu)(1-q)\tilde f'(k)\tilde f(k)+(\delta+\mu)q\tilde f'(k)\tilde f(k)-\tilde f''(k)\tilde f^2(k)-(\tilde f'(k))^2\tilde f(k)-$$
$$-(q-1)\mu\tilde f'(k)\tilde f(k)-(q-1)\mu k\tilde f''(k)\tilde f(k)-\mu k(1-q)(\tilde f'(k))^2=(\delta+\mu)\tilde f'(k)\tilde f(k)-$$
$$-\tilde f''(k)\tilde f^2(k)-(\tilde f'(k))^2\tilde f(k)-(q-1)\mu[\tilde f'(k)\tilde f(k)+k\tilde f''(k)\tilde f(k)-k(\tilde f'(k))^2].$$

На особой траектории мы имеем $q(t)\equiv 1,\ k(t)\equiv k^{**}_{\max}$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}\Big|_{q=1,k=k^{**}_{\max}}=(\delta+\mu)\tilde f'(k^{**}_{\max})\tilde f(k^{**}_{\max})-\tilde f''(k^{**}_{\max})\tilde f^2(k^{**}_{\max})-(\tilde f'(k^{**}_{\max}))^2\tilde f(k^{**}_{\max}).$$

Напомним, что из условия $\dot{q}(t) = 0$ следует, что $\tilde{f}'(k^{**}_{\max}) = \delta + \mu$. Следовательно,

$$(\delta + \mu)\tilde{f}'(k^{**}_{\max})\tilde{f}(k^{**}_{\max}) - (\tilde{f}'(k^{**}_{\max}))^2\tilde{f}(k^{**}_{\max}) = 0.$$

Окончательно вдоль особой траектории имеем

$$\frac{\partial}{\partial s}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s}\,|_{q=1,k=k^{**}_{\max}} = -\tilde{f}''(k^{**}_{\max})\tilde{f}^2(k^{**}_{\max}).$$

Следовательно, особая оптимальная траектория $(k^{**}_{\max}, s^*)$ удовлетворяет необходимому условию Келли, если $\tilde{f}''(k^{**}_{\max}) = f''(k^{**}_{\max}) + \tau''(k^{**}_{\max}) < 0$. (Заметим, что это условие в силу малости амплитуды возмущения ζ может быть нарушено лишь при $k \to \infty$, т. е. вдали от оптимального значения фондовооруженности $k^{**}_{\max}$.) Тем самым доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Для модели с аддитивно слабо возмущенной производственной функцией $\tilde{f}(k)$, т. е. для задачи* (1)–(3), *необходимое условие Келли* ($\frac{\partial}{\partial s}\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial s} > 0$) *вдоль особой траектории* ($k(t) \equiv k^{**}_{\max},\ s(t) = s^*,\ q(t) \equiv 1$) *выполнено, если* $\tilde{f}''(k^{**}_{\max}) < 0$.

В итоге получаем, что найденная особая траектория удовлетворяет необходимому условию Келли и вдоль нее достигается максимум потребления.

Пусть $T_0 = \max\{T_A, \dots, T_E\}$. Из предыдущих рассуждений вытекает следующее утверждение.

Теорема. *Пусть в задаче планирования* (1)–(3) *функция $\tilde{f}(k)$ является аддитивно слабо возмущенной с согласованной с производственной функцией $f(k)$ и темпом амортизации μ амплитудой возмущения. Пусть существуют допустимые траектории, промежуток планирования T достаточно велик ($T > T_0$), и существует максимальный элемент $k^{**}_{\max}$ в множестве $\{k^*_i,\ i \in I\} \cap (0, \tilde{k}_{\min})$, где k^*_i — решения уравнения* (9), *$\tilde{k}_{\min}$ — минимальное из решений уравнения* (10), *I — некоторое индексное множество. Пусть также $\tilde{f}''(k^{**}_{\max}) < 0$. Тогда при достаточно малом ζ справедливы следующие утверждения:*

1) *существует по крайней мере одна оптимальная стратегия распределения дохода на потребление и инвестиции;*

2) *существуют такие числа T^* и T^{**}, где $0 \le T^* < T^{**} \le T$, что оптимальное управление $s(t)$ имеет следующий вид: в начале периода ($0 \le t \le T^*$) и в конце ($T^{**} \le \le t \le T$) выполнено $s(t) \in \{0, 1\}$, а все остальное время ($T^* \le t \le T^{**}$) имеет место*

$$s(t) = s^* = \frac{\mu k^{**}_{\max}}{f(k^{**}_{\max}) + \tau(k^{**}_{\max})}\,.$$

Заключение

Таким образом, для аддитивной модели возмущения производственной функции доказана магистральная теорема, показывающая, что для квазинеоклассических производственных функций существует особый оптимальный режим управления.

Список литературы

1. *Голуб А.* Факторы роста российской экономики и перспективы технического обновления // Вопросы экономики. 2004. № 5. С. 44–58.

2. *Дементьев Н. П.* Модели экономического роста с классовой дифференциацией сбережений // Системное исследование экономических процессов в России: Сб. науч. тр. Новосибирск, 2004. С. 51–74.

3. *Егорова Н. Е., Хачатрян С. Р.* Применение дифференциальных уравнений для анализа динамики развития малых предприятий, использующих кредитно-инвестиционные ресурсы // Экономика и мат. методы. 2006. Т. 42, № 1. С. 50–67.

4. *Петров А. А., Шананин А. А.* Математическая модель для оценки эффективности одного сценария экономического роста // Математическое моделирование. 2002. Т. 14, № 7. С. 27–52.

5. *Трубачева А. Е.* Влияние возмущения производственной функции на поведение инвестора // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 3 (19). С. 156–169.

6. *Трубачева А. Е.* Исследование поведения инвестора при различных схемах налогообложения и разных видах производственной функции // Препринт ИМ СО РАН. 2005. № 153.

7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.

8. *Ляпидевский В. Ю., Люлько Н. А., Максимова О. Д.* Функциональный анализ: Учеб. пособие. Новосибирск, 1998.

9. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г. Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

10. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Особые оптимальные управления. М.: Наука, 1973.

11. *Васильев Ф. П.* Численные методы решения экстремальных задач. М.: Наука, 1980.

12. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления. Минск: Наука и техника, 1974.

13. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. М.: Наука, 1984.

14. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений. М.: КомКнига, 2006.

Материал поступил в редколлегию 29.06.2007

Адрес автора

ТРУБАЧЕВА Анна Евгеньевна

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: aetrub@math.nsc.ru