УДК 510.5

*Н. А. Бакланова*

# НЕРАЗРЕШИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ТЕОРИЙ ПОЛУРЕШЕТОК РОДЖЕРСА НА ПРЕДЕЛЬНЫХ УРОВНЯХ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ИЕРАРХИИ

Доказано, что элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса в гиперарифметической иерархии является неразрешимой.

*Ключевые слова*: нумерация, полурешетка Роджерса, гиперарифметическая иерархия, минимальные элементы, минимальные накрытия.

## Введение

В 1990-е гг. С. С. Гончаровым и А. Сорби было начато исследование вычислимых нумераций для произвольных уровней арифметической иерархии. С. С. Гончаровым и С. А. Бадаевым был решен вопрос о существовании минимальных нумераций и минимальных накрытий на уровнях арифметической иерархии выше $\Sigma^0_2$. Таким образом, вопрос о существовании пустых интервалов в полурешетке Роджерса был изучен достаточно полно. В дальнейшем С. Ю. Подзоров в статье [1] исследовал структуру начальных сегментов полурешетки Роджерса. Все результаты были объединены в статье вышеупомянутых авторов [2], в которой исчерпывающе описана структура начальных сегментов полурешетки Роджерса арифметических нумераций конечного уровня.

## 1. Основные понятия теории нумераций и некоторые результаты

**Определение 1.** Произвольное сюръективное отображение $\alpha$ множества натуральных чисел на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией $\mathcal{A}$. Пусть $\alpha$ и $\beta$ — нумерации $\mathcal{A}$. Нумерация $\alpha$ сводится к $\beta$ ($\alpha \leqslant \beta$), если существует вычислимая функция $f$, такая что $\alpha(n) = \beta(f(n))$ для любого $n \in \omega$. Нумерации $\alpha$ и $\beta$ называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$), если $\alpha \leqslant \beta$ и $\beta \leqslant \alpha$.

**Определение 2.** Нумерация $\alpha$ семейства $\mathcal{A}$ $\Sigma^0_{n+1}$-множеств, где $n \geq 0$, называется $\Sigma^0_{n+1}$-вычислимой, если существует вычислимая функция $f$, такая что для любого $m$ $\varphi_{f(m)}$ является $\Sigma^0_{n+1}$-формулой арифметики Пеано и $\alpha(m) = \{x \in \omega | \mathbb{N} \vDash \varphi_{f(m)}(\overline{x})\}$. Множество $\Sigma^0_{n+1}$-вычислимых нумераций $\mathcal{A}$ обозначается $Com^0_{n+1}(\mathcal{A})$ [3].

Семейство $\mathcal{A}$, у которого $Com^0_{n+1}(\mathcal{A}) \neq \emptyset$, будем называть $\Sigma^0_{n+1}$-вычислимым. При $n = 0$ определение $\Sigma^0_1$-вычислимой нумерации совпадает с классическим определением вычислимой нумерации семейства в. п. множеств.

Отношение $\equiv$ является отношением эквивалентности на $Com^0_{n+1}(\mathcal{A})$, а отношение $\leqslant$ вводит частичный порядок на множестве классов эквивалентности. Класс эквивалентно-

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 3–7

сти нумерации $\alpha$ называется степенью $\alpha$, обозначается $\deg(\alpha)$. Частично упорядоченное множество $\langle Com^0_{n+1}(\mathcal{A})/\equiv, \leqslant\rangle$ степеней $\Sigma^0_{n+1}$-вычислимых нумераций $\mathcal{A}$ будем обозначать $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{A})$. Если $\alpha, \beta \in Com^0_{n+1}(\mathcal{A})$, то нумерация $\alpha \oplus \beta$ семейства $\mathcal{A}$ определяется так: $\alpha \oplus \beta(2n) = \alpha(n)$ и $\alpha \oplus \beta(2n+1) = \beta(n)$, и $\deg(\alpha \oplus \beta)$ является наименьшей верхней гранью пары $\deg(\alpha), \deg(\beta)$ в $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{A})$. Таким образом, $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{A})$ является верхней полурешеткой.

**Определение 3.** Верхняя полурешетка $\mathcal{R}^0_{n+1}(\mathcal{A})$ называется полурешеткой Роджерса класса арифметических нумераций $\mathcal{A}$.

**Теорема 1.** *Для любого $n$, если $\mathcal{A}$ — бесконечное $\Sigma^0_{n+2}$-вычислимое семейство, то $\mathcal{R}^0_{n+2}(\mathcal{A})$ содержит бесконечно много минимальных элементов* [4].

**Определение 4.** Если существует $\Sigma^0_{n+2}$-вычислимая нумерация $\beta$ семейства $\mathcal{A} \subseteq \Sigma^0_{n+2}$, для которой $\deg(\beta) > \deg(\alpha)$, где $\alpha \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$, и для любой степени $\deg(\gamma)$ из $\deg(\alpha) \leqslant \deg(\gamma) \leqslant \deg(\beta)$, следует, что либо $\deg(\gamma) = \deg(\alpha)$, либо $\deg(\gamma) = \deg(\beta)$, то $\deg(\beta)$ называется минимальным накрытием $\deg(\alpha)$.

**Теорема 2.** *Если $\mathcal{A}$ — бесконечное $\Sigma^0_{n+2}$-вычислимое семейство, и $\alpha \in Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$ не является $\mathbf{0}'$-универсальной в $Com^0_{n+2}(\mathcal{A})$, то существует бесконечно много минимальных накрытий $\alpha$ (с точностью до эквивалентности)* [2].

**Определение 5.** Позитивная эквивалентность — это в. п. отношение эквивалентности на множестве натуральных чисел. Обозначим $\epsilon_0, \epsilon_1, \ldots$ универсальную вычислимую последовательность всех позитивных эквивалентностей.

**Определение 6.** Через $\varepsilon$ обозначается семейство всех в. п. подмножеств натурального ряда. Частично упорядоченное множество $\langle \varepsilon, \subseteq\rangle$ является решеткой, конечные подмножества $\mathbb{N}$ образуют идеал этой решетки. Фактор-решетка по этому идеалу обозначается $\langle \varepsilon^*, \subseteq^*\rangle$. Элемент $\varepsilon^*$, состоящий из конечных множеств, обозначим за 0.

**Теорема 3.** *Для любой нумерации $\alpha \in Com^0_n(S)$ существует нумерация $\beta \in Com^0_n(S)$, такая что $\beta \equiv_{0'} \alpha$ и*

1) *если $S$ конечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^*, \subseteq^*\rangle$;*
2) *если $S$ бесконечно, то $\langle \hat{\beta}, \leqslant\rangle \cong \langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^*\rangle$* [1].

## 2. Ситуация в гиперарифметической иерархии

Аналогичный результат для начальных сегментов можно получить и в гиперарифметической иерархии. С. С. Гончаровым было предложено задавать предельный уровень $\Sigma_\omega$ несколькими способами.

**Определение 7.** $\Sigma_\alpha$ для произвольного предельного ординала $\alpha$ можно определять по-разному:

- $\Sigma_\alpha = \bigcup\limits_{\delta<\alpha} \Sigma_\delta$;
- $\Sigma^R_\alpha = \{X \mid X$ вычислимо перечислимо относительно $0^{(\alpha)}\}$ [5];

- $\Sigma^K_\alpha = \{X \mid$ существует вычислимая последовательность формул $\varphi_{g(\delta)}(x) \in \Sigma_\beta$, $\beta < \alpha,\ \delta < \alpha : x \in X \Longleftrightarrow \mathbb{N} \vDash \bigvee\limits_{\delta<\alpha} \varphi_{g(\delta)}(x)\}$ [6].

**Определение 8.** Таким образом, из определений 2 и 7 получаем три варианта определения вычислимой нумерации.

- Нумерация $\nu$ $\Sigma_\alpha$-вычислима, если существует вычислимая функция $f$, такая что для любого $n \in \omega$ $\varphi_{f(n)} \in \Sigma_\beta,\ \beta < \alpha$ и $\nu(n) = \{x \in \omega : \mathbb{N} \vDash \varphi_{f(n)}(\overline{x})\}$ ($\varphi_{f(n)}$ — формула с геделевым номером $f(n)$).

- Нумерация $\nu$ $\Sigma^R_\alpha$-вычислима, если существует вычислимая функция $f$, такая что для любого $n \in \omega$ $\varphi_{f(n)}$ $0^\alpha$-вычислима и $\nu(n) = \{x \in \omega : \mathbb{N} \vDash \varphi_{f(n)}(\overline{x})\}$.

- Нумерация $\nu$ $\Sigma^K_\alpha$-вычислима, если существует вычислимая функция $G(n, \delta)$, такая что для любого $n \in \omega$ $\varphi_{G(n,\delta)} \in \Sigma_\beta,\ \beta < \alpha$ и $\nu(n) = \{x \in \omega : \mathbb{N} \vDash \bigvee\limits_{\delta<\alpha} \varphi_{G(n,\delta)}(x)\}$.

Покажем, что для любого варианта определения $\Sigma_\omega$ начальный сегмент полурешетки Роджерса изоморфен полурешетке в. п. множеств.

**Теорема 4.** *Для любой нумерации* $\alpha \in Com_\omega(S)$ ($Com^R_\omega(S), Com^K_\omega(S)$) *существует нумерация* $\beta \in Com_\omega(S)$ ($Com^R_\omega(S), Com^K_\omega(S)$), *такая что* $\beta \equiv_{0'} \alpha$ *и*

1) *если $S$ конечно, то* $\langle \hat{\beta}, \leqslant \rangle \cong \langle \varepsilon^*, \subseteq^* \rangle$;

2) *если $S$ бесконечно, то* $\langle \hat{\beta}, \leqslant \rangle \cong \langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^* \rangle$,

*где $\hat{\beta}$ обозначает главный идеал $\mathcal{R}_\omega$, порожденный* $\deg(\beta)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \{m : W_m$ — конечно$\}$. Так как $E$ — $0'$-перечислимое подмножество в $\mathbb{N}$, то можно считать, что $E = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{N}} E^t$, где $E^0 \subseteq E^1 \subseteq \ldots$ — сильно $0'$-вычислимая последовательность конечных множеств.

Будем строить нумерацию $\beta$ по шагам. На шаге $t$ определим натуральное число $k_t$ и значения $\beta(x)$ для всех $x \leqslant k_t$. Конструкция эффективна с оракулом $0'$.

Без ограничения общности можно считать, что $\alpha(0) \neq \alpha(1)$.

Шаг 0. Полагаем $k_0 = 0$, $\beta(0) = \alpha(0)$.

Шаг $t{+}1$. *Этап 1.* Проверим условие $(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)[x \neq y \& \langle x, y\rangle \in \epsilon_t]$. Если таких $x, y$ нет, то полагаем $k'_t = k_t$ и переходим к следующему этапу. Если такие $x, y$ найдутся, то полагаем $\beta(x) = \alpha(0),\ \beta(y) = \alpha(1),\ k'_t = \max\{x, y\}$ и переходим к следующему этапу.

*Этап 2.* Найдем минимальное $k > k'_t$, для которого

$$(\forall i \leqslant t)\left[\,|W_i \cap \{x : k'_t < x \leqslant k\}| \geqslant (t+1)^2 \vee i \in E^k\,\right].$$

Пусть $\{i_1 < \ldots < i_m\} = \{0, \ldots, t\} \setminus E^k$. Выберем $m(t+1)$ различных элементов $x^1_0, x^1_1, \ldots, x^1_t,\ x^2_0, x^2_1 \ldots, x^m_t$ множества $\{x : k'_t < x \leqslant k\}$ так, чтобы $x^l_i \in W_l$. Полагаем $k_{t+1} = k,\ \beta(x^l_j) = \alpha(j)$ для $j \leqslant t, 1 \leqslant l \leqslant m$, и $\beta(x) = \alpha(0)$ для всех $x \leqslant k$, для которых $\beta(x)$ еще не определено. Переходим к следующему шагу.

Корректность конструкции.

1) $\beta \equiv_{0'} \alpha$.

Конструкция эффективна с оракулом $0'$. С его помощью можно по любому $\alpha$-индексу найти $\beta$-индекс и наоборот.

2) $\beta$ $\Sigma_\omega$-вычислима ($\Sigma^R_\omega$-вычислима, $\Sigma^K_\omega$-вычислима).

Из пункта 1 следует, что $\beta = \alpha \circ h$, где $h$ $0'$ вычислима. Так как $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_\omega$ $(\Sigma^R_\omega, \Sigma^K_\omega)$, то $\beta$ имеет тот же уровень сложности, что и $\alpha$.

3) Если $W_m$ бесконечно, то $\beta_{W_m}$ — нумерация всего семейства $S$.

Из описания этапа 2.

4) Для любых $k, m \in \mathbb{N}$ если $\beta_{W_m}$ и $\beta_{W_k}$ — нумерации одного и того же семейства, то $\beta_{W_m} \leqslant \beta_{W_k} \Leftrightarrow W_m \setminus W_k$ конечно.

Покажем достаточность. Пусть $f, g$ — вычислимые всюду определенные функции, для которых $\rho f = W_m$, $\rho g = W_k$, и для каждого $x \in W_m \setminus W_k$ через $b_x$ обозначается некоторый элемент множества $W_k$, такой что $\beta(x) = \beta(b_x)$. Пусть

$$h(x) = \begin{cases} g^{-1}(b_{f(x)}), & \text{если } \ f(x) \notin W_k, \\ g^{-1}(f(x)), & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда $h(x)$ — вычислимая всюду определенная функция, и $\beta f = \beta g h$.

Покажем необходимость. Согласно предложению 1, существует $t \in \mathbb{N}$, такое что $\epsilon_t \subseteq$ $\subseteq \eta_\beta$, и каждый класс эквивалентности $\epsilon_t$, содержащий элемент из $W_m$, содержит также элементы из $W_k$.

Пусть множество $W_m \setminus W_k$ бесконечно. Покажем существование элементов $x \neq y$, таких что $x > k_t, y > k_t$ и $\langle x, y\rangle \in \epsilon_t$. Если

$$(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)\left[\, x \in W_m \backslash W_k \;\&\; y \in W_k \;\&\; \langle x, y\rangle \in \epsilon_t \,\right],$$

то утверждение очевидно. В противном случае

$$(\forall x > k_t)\left[\, x \in W_m \backslash W_k \to (\exists y \leqslant k_t)\,(y \in W_k \;\&\; \langle x, y\rangle \in \epsilon_t)\,\right].$$

Тогда в силу симметричности и транзитивности отношения $\epsilon_t$

$$(\exists x > k_t)(\exists y > k_t)\left[\, x \in W_m \backslash W_k \;\&\; y \in W_m \backslash W_k \;\&\; x \neq y \;\&\; \langle x, y\rangle \in \epsilon_t \,\right].$$

Из описания этапа 1 шага $t+1$ следует, что существуют $x, y \in \mathbb{N}$, такие что $\beta(x) \neq \beta(y)$, и $\langle x, y\rangle \in \epsilon_t$.

Пусть $\gamma$ — нумерация семейства $S$, и $\gamma \leqslant \beta$. Тогда $\gamma = \beta f$ для некоторой вычислимой функции $f$. Из свойств 2 и 3 следует, что отображение $\gamma \mapsto \rho f$ определяет требуемый изоморфизм. □

**Определение 9.** Теория $T$ называется наследственно неразрешимой, если любая подтеория теории $T$ той же сигнатуры неразрешима.

Используя тот факт, что элементарная теория $\varepsilon^*$ является наследственно неразрешимой, из теоремы 4 получаем следующее.

**Следствие 1.** *Элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса* $R_\omega(A)$ $(R^R_\omega(A), R^K_\omega(A))$ *является наследственно неразрешимой.*

Очевидным изменением конструкции можно распространить результат теоремы 4 на все конструктивные предельные ординалы. Объединяя этот результат с результатом С. Ю. Подзорова для конечных уровней, получаем следующее.

**Теорема 5.** *Пусть* $\delta \geqslant 2$ *— произвольный конструктивный ординал. Тогда для любой нумерации* $\alpha \in Com_\delta(S)$ $(Com_\delta^R(S), Com_\delta(S)^K)$ *существует нумерация* $\beta \in Com_\delta(S)$ $(Com_\delta^R(S), Com_\delta(S)^K)$*, такая что* $\beta \equiv_{0'} \alpha$ *и*

1) *если* $S$ *конечно, то* $\langle \hat{\beta}, \leqslant \rangle \cong \langle \varepsilon^*, \subseteq^* \rangle$*;*

2) *если* $S$ *бесконечно, то* $\langle \hat{\beta}, \leqslant \rangle \cong \langle \varepsilon^* \setminus \{0\}, \subseteq^* \rangle$.

**Следствие 2.** *Элементарная теория любой нетривиальной полурешетки Роджерса* $R_\delta(A)$ $(R_\delta^R(A), R_\delta^K(A))$*, где* $\delta \geqslant 2$ *— конструктивный ординал, является наследственно неразрешимой.*

## Список литературы

1. *Подзоров С. Ю.* Начальные сегменты в полурешетках Роджерса $\Sigma_n^0$-вычислимых нумераций // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 2. С. 211–226.

2. *Badaev S., Goncharov S., Podzorov S., Sorbi A.* Algebraic Properties of Rogers Semilattices of Arithmetical Numberings // Computability and Models / Eds. S. B. Cooper, S. S. Goncharov. N. Y.: Kluwer / Plenum Publishers, 2003. P. 45–77.

3. *Гончаров С. С., Сорби А.* Обобщенно вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 6. С. 621–641.

4. *Бадаев С. А., Гончаров С. С.* О полурешетках Роджерса семейств арифметических множеств // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 507–522.

5. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

6. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Amsterdam: Elsevier, 2000.

*Материал поступил в редколлегию 25.02.2011*

**Адрес автора**

БАКЛАНОВА Надежда Александровна

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: nbaklanova@gmail.com