УДК 517.958

К.В. Голосов, Н.И. Макаренко

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВНУТРЕННИХ ВОЛН*

Рассматривается эллиптическая краевая задача в двойной полосе, возникающая при описании стационарных волн на границе раздела однородной и экспоненциально стратифицированной жидкостей. С помощью Фурье-представления получена оценка решения в классе функций с экспоненциальной асимптотикой затухания на бесконечности.

Ключевые слова: двухслойная жидкость, экспоненциальная стратификация, внутренние волны, эллиптическая краевая задача, оценки решения, преобразование Фурье, функция Грина.

1. Постановка задачи

Для вещественного $r > 0$ обозначим $\Pi_1 = \mathbb{R} \times (-r, 0)$ и $\Pi_2 = \mathbb{R} \times (0, 1)$. Рассматривается следующая линейная краевая задача для функции $u(x, \psi)$ в двойной полосе $(x, \psi) \in \Pi = \Pi_1 \cup \Pi_2$:

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{\psi\psi} = f_1 \qquad (-r < \psi < 0), \\ &u(x, -r) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{\psi\psi} - \sigma u_\psi + \lambda^2 u = f_2 \qquad (0 < \psi < 1), \\ &u(x, 1) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

$$u(x, 0+) = u(x, 0-), \qquad u(x, 0+) + F_2^2 u_\psi(x, 0+) - r F_1^2 u_\psi(x, 0-) = \varphi(x). \tag{3}$$

Здесь функции $f_1(x, \psi)$, $f_2(x, \psi)$, $\varphi(x)$ и параметры $r, \sigma, \lambda, F_1, F_2$ предполагаются заданными. Указанная постановка возникает в результате линеаризации задачи о стационарных внутренних волнах в двухслойной жидкости с плотностью, постоянной в нижнем слое и экспоненциально зависящей от глубины в верхнем слое. Первое из граничных условий (3) — кинематическое условие, второе — динамическое условие на границе раздела слоев. В качестве независимых переменных здесь используются переменные Мизеса (x, ψ), так что прямым $\psi = \mathrm{const}$ соответствуют линии тока $y = Y(x, \psi)$ в плоскости течения (x, y). В частности, значение $\psi = 0$ определяет положение линии тока, разделяющей слои однородной и экспоненциально стратифицированной жидкостей. Формулировка задачи в переменных Мизеса позволяет «распрямить» границу раздела слоев, неизвестную в исходной нелинейной постановке. Безразмерные параметры, присутствующие в рассматриваемых уравнениях, имеют следующий смысл. Величина r — отношение размерных глубин слоев жидкости в положении равновесия; числа Фруда F_1 и F_2 характеризуют скорости течения жидкости в слоях, а параметр $\sigma > 0$ задает стратификацию в верхнем слое: предполагается, что в отсутствие волнового движения плотность

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 10-01–00447), программы Президиума РАН «Фундаментальные проблемы океанологии» (проект № 20.4) и проекта «Развитие научного потенциала высшей школы» 2009–2010 (№ 2.1.1/4918)

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2011. Т. 11, вып. 4. С. 21–31

жидкости в нем имеет вид $\rho(y) = \rho_2 e^{-\sigma y}$. Параметр λ дается формулой $\lambda^2 = \sigma/(\mu F_2^2)$, где $\mu = (\rho_1 - \rho_2)/\rho_2$ — относительный скачок плотности на границе раздела.

Задача (1)–(3) с $\sigma = \lambda = 0$ рассматривалась в [1] при анализе разрешимости нелинейной задачи о внутренних волнах в виде плавного бора в двухслойной жидкости с постоянными плотностями ρ_1 и ρ_2 в слоях. В упомянутой работе установлено существование решения в специальных классах аналитических функций с экспоненциальной асимптотикой убывания при $|x| \to \infty$. Указанное поведение при больших $|x|$ характерно для решений типа уединенных волн. Вопрос об асимптотике таких решений при $\sigma \to 0$ (предельный переход от кусочно-экспоненциальной стратификации к кусочно-постоянной) является нетривиальным и представляет существенный интерес для динамики атмосферы и океана. В статье [2] в этом контексте исследованы при $\sigma \neq 0$ спектральные свойства линеаризованной однородной задачи (1)–(3) с $f_1 = f_2 = \varphi = 0$. Основной целью настоящей работы является получение представления решения неоднородной задачи (1)–(3) для заданных правых частей f_1, f_2, φ и оценка нормы соответствующего оператора в пространствах функций с экспоненциальным затуханием по x.

2. Фурье-представление решения

Применяя к уравнениям (1)–(3) частичное преобразование Фурье по переменной x

$$\mathbf{F}[u](\xi,\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} u(x,\psi)\,dx,$$

получаем следующую задачу для Фурье-образа $\widehat{u} = \mathbf{F}[u]$ искомой функции u:

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_{\psi\psi} - \xi^2\widehat{u} = \widehat{f}_1(\xi,\psi) \qquad (-r < \psi < 0),\\ &\widehat{u}(\xi,-r) = 0, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{u}_{\psi\psi} - \sigma\widehat{u}_\psi + (\lambda^2 - \xi^2)\,\widehat{u} = \widehat{f}_2(\xi,\psi) \qquad (0 < \psi < 1),\\ &\widehat{u}_2(\xi,1) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\widehat{u}(\xi,0+) = \widehat{u}(\xi,0-), \qquad \widehat{u}(\xi,0+) + F_2^2\widehat{u}_\psi(\xi,0+) - rF_1^2\widehat{u}_\psi(\xi,0-) = \widehat{\varphi}(\xi). \tag{6}$$

Введем функцию $\widehat{f}(\xi,\psi)$, определенную в двойной полосе $(\xi,\psi) \in \mathbb{R}\times\{(-r,0)\bigcup(0,1)\}$, полагая $\widehat{f}(\xi,\psi) = \widehat{f}_1(\xi,\psi)$ при $-r < \psi < 0$ и $\widehat{f}(\xi,\psi) = \widehat{f}_2(\xi,\psi)$ при $0 < \psi < 1$. Пользуясь линейностью задачи (4)–(6), будем искать ее решение в виде

$$\widehat{u} = G\langle\widehat{f}\rangle + K\langle\widehat{\varphi},\widehat{f}\rangle, \tag{7}$$

где слагаемое $\widehat{u}^{(1)} = G\langle\widehat{f}\rangle$ является решением уравнений (4)–(5) с заданными правыми частями $\widehat{f}_1$, $\widehat{f}_2$ и однородным краевым условием $\widehat{u}^{(1)}(\xi,0+) = \widehat{u}^{(1)}(\xi,0-) = 0$ вместо условий (6) на границе раздела слоев $\psi = 0$. Оператор K дает решение $\widehat{u}^{(2)} = K\langle\widehat{\varphi},\widehat{f}\rangle$ однородных уравнений (4) и (5) с $\widehat{f}_1 = \widehat{f}_2 = 0$, обеспечивая при этом выполнение граничных условий (6) для полного решения $\widehat{u} = \widehat{u}^{(1)} + \widehat{u}^{(2)}$. В таком случае решение $u(x,\psi)$ исходной задачи (1)–(3) выражается формулой

$$u = \mathbf{F}^{-1}[G\langle\widehat{f}\rangle + K\langle\widehat{\varphi},\widehat{f}\rangle], \tag{8}$$

где символом $\mathbf{F}^{-1}$ обозначен оператор обратного преобразования Фурье по x.

Фурье-образ $\widehat{u}^{(1)}(\xi,\psi)$ имеет вид

$$\widehat{u}^{(1)}(\xi,\psi) = \int\limits_{-r}^{1} \mathcal{G}(\psi,\chi;\,\xi)\,\widehat{f}(\xi,\chi)\,d\chi, \tag{9}$$

где функция Грина $\mathcal{G}(\cdot,\cdot;\,\xi)$ задается в промежутке $-r \leqslant \psi \leqslant 0$, соответствующем нижнему слою, следующими выражениями:

$$\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\xi) = \frac{1}{\xi\, sh\, r\xi}\begin{cases} \operatorname{sh}\xi\psi\ \operatorname{sh}\xi(\chi+r), & -r\leqslant\chi\leqslant\psi,\\ \operatorname{sh}\xi\chi\ \operatorname{sh}\xi(\psi+r), & \psi\leqslant\chi\leqslant 0,\\ 0 & 0\leqslant\chi\leqslant 1.\end{cases}$$

Представление функции $\mathcal{G}(\cdot,\cdot;\,\xi)$ в верхнем слое $0\leqslant\psi\leqslant 1$ использует вспомогательный параметр ν,

$$\nu^2 \stackrel{def}{=} \lambda^2 - \frac{1}{4}\,\sigma^2 = \frac{\sigma}{\mu F_2^2} - \frac{1}{4}\,\sigma^2, \tag{10}$$

с которым при $\xi^2 > \nu^2$ имеем

$$\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\xi) = \frac{e^{\frac{\sigma}{2}(\psi-\chi)}}{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\ \operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\nu^2}}\times$$

$$\times\begin{cases} \operatorname{sh}\left\{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,(\psi-1)\right\}\ \operatorname{sh}\left\{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,\chi\right\}, & 0\leqslant\chi\leqslant\psi,\\ \operatorname{sh}\left\{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,\psi\right\}\ \operatorname{sh}\left\{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,(\chi-1)\right\}, & \psi\leqslant\chi\leqslant 1,\\ 0 & -r\leqslant\chi\leqslant 0,\end{cases}$$

а при $\xi^2 < \nu^2$ справедливо выражение

$$\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\xi) = \frac{e^{\frac{\sigma}{2}(\psi-\chi)}}{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\ \sin\sqrt{\nu^2-\xi^2}}\times$$

$$\times\begin{cases} \sin\left\{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,(\psi-1)\right\}\ \sin\left\{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,\chi\right\}, & 0\leqslant\chi\leqslant\psi,\\ \sin\left\{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,\psi\right\}\ \sin\left\{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,(\chi-1)\right\}, & \psi\leqslant\chi\leqslant 1,\\ 0 & -r\leqslant\chi\leqslant 0.\end{cases}$$

Функция $\widehat{u}^{(2)} = K\langle\widehat{\varphi},\widehat{f}\rangle$ дается формулой

$$\widehat{u}^{(2)}(\xi,\psi) = s(\psi)\frac{\mathcal{K}(\psi;\xi)}{\Delta(\xi)}\Big(\widehat{\varphi}(\xi) + \int\limits_{-r}^{1} F^2(\chi)\mathcal{K}(\chi;\,\xi)\,\widehat{f}(\xi,\chi)\,d\chi\Big), \tag{11}$$

где ядро $\mathcal{K}$ имеет вид

$$\mathcal{K}(\psi;\xi) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}\xi(\psi+r)}{\operatorname{sh} r\xi}, & (-r\leqslant\psi<0),\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sh}\left\{\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,(1-\psi)\right\}}{\operatorname{sh}\sqrt{\xi^2-\nu^2}}, & (0<\psi\leqslant 1,\ \xi^2>\nu^2),\\[2ex] \dfrac{\sin\left\{\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,(1-\psi)\right\}}{\sin\sqrt{\nu^2-\xi^2}}, & (0<\psi\leqslant 1,\ \xi^2<\nu^2).\end{cases}$$

Кусочно-экспоненциальные функции $s(\psi)$ и $F^2(\chi)$ в (11) имеют вид

$$s(\psi)=\begin{cases}1 & (-r\leqslant\psi<0),\\ e^{\frac{\sigma}{2}\psi} & (0<\psi\leqslant 1),\end{cases}\qquad F^2(\chi)=\begin{cases}F_1^2 & (-r\leqslant\chi<0),\\ F_2^2\,e^{-\frac{\sigma}{2}\chi} & (0<\chi\leqslant 1),\end{cases}$$

а $\Delta(\xi)$ — дисперсионная функция, которая при $\xi^2<\nu^2$ определяется формулой

$$\Delta(\xi)=F_1^2\,r\xi\,\operatorname{cth} r\xi+F_2^2\left(\sqrt{\nu^2-\xi^2}\,\operatorname{ctg}\sqrt{\nu^2-\xi^2}-\frac{\sigma}{2}\right)-1, \tag{12}$$

а при $\xi^2>\nu^2$ — формулой

$$\Delta(\xi)=F_1^2\,r\xi\,\operatorname{cth}\,r\xi+F_2^2\left(\sqrt{\xi^2-\nu^2}\,\operatorname{cth}\sqrt{\xi^2-\nu^2}-\frac{\sigma}{2}\right)-1. \tag{13}$$

При $\xi^2=\nu^2$ функции $\mathcal{G}$, $\mathcal{K}$ и Δ доопределяются по непрерывности.

Равенства (7)–(11) дают формальное решение, свойства которого нуждаются в дополнительной характеристике. Принципиально важной является возможность аналитического продолжения Фурье-образа решения $\widehat{u}(\xi,\psi)$ по переменной ξ в плоскость комплексной переменной $\zeta=\xi+i\eta$. Ширину полосы аналитичности $|\operatorname{Im}\zeta|<\alpha$ функции $\widehat{u}=\widehat{u}^{(1)}+\widehat{u}^{(2)}$, заданной формулами (9) и (11), ограничивают нули функций $\operatorname{sh} r\zeta$, $\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}$ и $\Delta(\zeta)$, являющиеся полюсами для $\widehat{u}$. Точки ветвления квадратного корня не приводят к многозначности функции $\widehat{u}$, поскольку в ее представлении участвуют четные аналитические функции переменной $\omega=\sqrt{\zeta^2-\nu^2}$. Функция $\operatorname{sh} r\zeta$ обращается в нуль в точках мнимой оси $\zeta=kr^{-1}\pi i$, где $k\in\mathbb{Z}$. Следует отметить, что из физических соображений нас интересует решение задачи при $0<\nu^2<\pi^2$. В дальнейшем это условие будет предполагаться выполненным, и в этой ситуации нули функции $\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}$ также лежат на мнимой оси и образуют множество $\{\pm\sqrt{|k^2\pi^2-\nu^2|}\,i\,:\,k\in\mathbb{Z}\}$. Расположение нулей дисперсионной функции $\Delta(\zeta)$ в комплексной плоскости ζ существенно зависит от чисел Фруда F_1,F_2. В [2] показано, что Δ имеет счетное множество корней, которые могут быть либо вещественными (их всегда конечное число), либо чисто мнимыми, причем последовательность этих корней не имеет предельных точек, отличных от $\zeta=\infty$. Вещественным нулям отвечают осциллирующие волны с периодом по x, который однозначно задается параметрами F_1,F_2. Мы будем рассматривать те значения F_1,F_2, при которых функция $\Delta(\zeta)$ не имеет действительных корней. Именно для таких чисел Фруда исходная нелинейная задача имеет асимптотические решения типа уединенных волн с экспоненциальным убыванием при $|x|\to\infty$. Граница указанного множества в плоскости пар чисел Фруда (F_1,F_2) дается компонентой кривой

$$F_1^2+F_2^2\left(\sqrt{\frac{\sigma}{\mu F_2^2}-\frac{\sigma^2}{4}}\,\operatorname{ctg}\sqrt{\frac{\sigma}{\mu F_2^2}-\frac{\sigma^2}{4}}-\frac{\sigma}{2}\right)=1,$$

отвечающей главной ветви котангенса в этой формуле. Пусть ζ_0 — ближайший к вещественной оси мнимый корень функции $\Delta(\zeta)$. Тогда величина

$$\alpha_*=\min\bigl\{r^{-1}\pi,\ \sqrt{\pi^2-\nu^2},\ |\operatorname{Im}\zeta_0|\bigr\} \tag{14}$$

является естественной границей для показателя затухания $\alpha<\alpha_*$ искомого решения $u(x,\psi)$ при $|x|\to\infty$.

3. Функциональные пространства

Определим пространства, в которых ищется решение краевой задачи (1)–(3). Выбор функциональных классов при исследовании бифуркаций решений типа уединенных волн для уравнений гидродинамики, как правило, предопределяется свойствами соответствующих асимптотических решений [1; 3; 4]. Ниже описывается специальная шкала банаховых пространств, учитывающая специфику задачи о волнах в двухслойной жидкости. Пусть заданы параметры $\rho > 0,\ \alpha > 0$ и вещественный промежуток $[a, b]$. Символом $\Pi_{[a,b]}$ обозначим полосу $\mathbb{R} \times [a, b]$ в плоскости переменных x, ψ. Класс $E^{\alpha}_{\rho}(\Pi_{[a,b]})$ состоит из определенных в $\Pi_{[a,b]}$ функций $u(x, \psi)$, имеющих аналитическое по $\zeta = \xi + i\eta$ в комплексной области $|\operatorname{Im}\zeta| < \alpha$ преобразование Фурье $\widehat{u}(\zeta, \psi)$, непрерывное по совокупности переменных в замкнутом множестве $\{(\zeta, \psi) : \ |\eta| \leqslant \alpha_1,\ a \leqslant \psi \leqslant b\}$ с любым $\alpha_1 < \alpha$. Норма u определяется так:

$$\|u\|_{\rho,\alpha} = \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \sup_{\psi\in[a,b]} |\widehat{u}(\xi + i\eta, \psi)|\, d\xi. \tag{15}$$

Конечность этой нормы гарантирует аналитичность по $z = x + iy$ функции $u(z, \psi)$ в области $|y| < \rho$ и, кроме того, обеспечивает непрерывность u при $|y| \leqslant \rho$ по совокупности переменных. Далее, согласно определению нормы (15) обе функции $\widehat{u}_{\pm}(\zeta, \psi) = \exp(\pm\rho\zeta)\widehat{u}(\zeta, \psi)$ при каждом фиксированном значении $\psi \in [a, b]$ принадлежат классу Харди H^1 для полосы $|Im\,\zeta| < \alpha$. Поэтому в силу свойств элементов из класса Харди [5] функция $\widehat{u}(\xi + i\eta, \psi)$ при почти всех $\xi \in \mathbb{R}$ имеет предельные при $\eta \to \pm\alpha$ граничные значения $\widehat{u}(\xi \pm i\alpha, \psi)$, суммируемые по ξ с экспоненциальным весом. В силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости это позволяет сдвинуть контур интегрирования в интеграле Фурье для u вплоть до верхней или нижней границы полосы $\eta = \pm\alpha$:

$$u(x + iy, \psi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(x+iy)(\xi\pm i\alpha)}\, \widehat{u}(\xi \pm i\alpha, \psi)\, d\xi.$$

Отсюда, в частности, следует, что функция $u \in E^{\alpha}_{\rho}(\Pi_{[a,b]})$ имеет экспоненциальный порядок затухания при $|x| \to \infty$ с оценкой

$$|u(x + iy, \psi)| \ \leqslant\ \|u\|_{\rho,\alpha} \exp(-\alpha|x|)$$

для $x \in \mathbb{R},\ |y| \leqslant \rho$.

Описанное выше пространство Фурье-образов $\widehat{u}(\zeta, \psi)$ является специальным случаем введенных Э. Хилле [6. Гл. VI, § 2] обобщенных классов Харди $H^p(\alpha; X)$. Эти классы определяются как множества голоморфных в полуплоскости $\eta > \alpha$ функций $f(\xi + i\eta)$ со значениями в банаховом пространстве X, имеющих конечную норму

$$\|f\|_p = \sup_{\eta>\alpha} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|f(\xi + i\eta)\|^p_X\, d\xi \right)^{1/p} \qquad (1 \leqslant p < \infty).$$

В нашем случае рассматривается вариант нормы с экспоненциальным весом, показателем $p = 1$, банаховым пространством $X = C[a, b]$ и полосой $|\eta| < \alpha$ вместо полуплоскости. Примером аналогичных классов являются пространства Винера–Соболева (см. [7]) экспоненциально затухающих функций, имеющих аналитические Фурье-образы со значениями в пространствах Соболева $X = W_2^s[a, b]$. В гильбертовом случае $p = 2$ их конструкция привлекает L_2-свойства преобразования Фурье и базируется на теоремах Планшереля и Винера–Пэли. Родственные пространства использовались в работе [8] при исследовании разрешимости краевых задач с разрывными граничными условиями, моделирующими контакт свободных границ жидкости с твердыми стенками. Задача (1)–(3) принадлежит классу постановок для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. Применительно к этой ситуации определим наряду с классами $E^\alpha_\rho(\Pi_{[a,b]})$ еще следующие пространства:

а) подпространство $\overset{\circ}{E}{}^\alpha_\rho(\Pi_{[a,b]})$ функций $u \in E^\alpha_\rho(\Pi_{[a,b]})$, обращающихся в нуль на границах полосы $\Pi_{[a,b]}$ — прямых $\psi = a$ и $\psi = b$;

б) класс $E^\alpha_\rho(\mathbb{R})$ функций $u(x)$ одной вещественной переменной с нормой (15); ясно, что для любой функции $u \in E^\alpha_\rho(\Pi_{[a,b]})$ при каждом $\psi \in [a, b]$ ее след $u(\cdot, \psi)$ принадлежит $E^\alpha_\rho(\mathbb{R})$;

в) класс $E^\alpha_{\rho,n}(\Pi_{[a,b]})$ (или класс $E^\alpha_{\rho,n}(\mathbb{R})$) функций, принадлежащих $E^\alpha_\rho(\Pi_{[a,b]})$ (или $E^\alpha_\rho(\mathbb{R})$) вместе со своими производными до порядка n включительно,

$$\|u\|_{E^\alpha_{\rho,n}} = \sum_{0 \leqslant m+k \leqslant n} \|D^m_x D^k_\psi u\|_{\rho,\alpha}.$$

Согласно введенным выше обозначениям в формулировке задачи (1)–(3) имеем множества $\bar\Pi = \Pi_{[-r,1]}$, $\bar\Pi_1 = \Pi_{[-r,0]}$ и $\bar\Pi_2 = \Pi_{[0,1]}$, где черта означает замыкание. Учитывая это, будем рассматривать решения, принадлежащие классу

$$H^\alpha_\rho(\Pi) = \left\{ u \in \overset{\circ}{E}{}^\alpha_\rho(\bar\Pi) \,|\, u \in E^\alpha_{\rho,2}(\bar\Pi_j) \ (j = 1, 2) \right\}$$

с показателем $\alpha < \alpha_*$, где величина α_* определена в (14). Норма в $H^\alpha_\rho(\Pi)$ задается следующим образом:

$$\|u\|_{H^\alpha_\rho(\Pi)} \;=\; \|u\|_{E^\alpha_\rho(\bar\Pi)} \;+\; \max_{j=1,2} \sum_{0<m+n\leqslant 2} \|D^m_x D^n_\psi u\|_{E^\alpha_\rho(\bar\Pi_j)}.$$

Требование принадлежности производных искомого решения пространствам $E^\alpha_\rho(\bar\Pi_j)$ $(j = 1, 2)$ объясняется тем, что в нелинейной краевой задаче, линеаризация которой дает уравнения (1)–(3), правые части f_1 и f_2 зависят от всех вторых производных $D^m_x D^n_\psi u$ $(m + n \leqslant 2)$, а правая часть φ содержит следы первых производных u_x и u_ψ на границе раздела слоев $\psi = 0$. Функции из класса $H^\alpha_\rho(\Pi)$ аналитичны по x и экспоненциально стремятся к нулю вместе со своими производными при $|x| \to \infty$, непрерывны по (x, ψ) во всей двойной полосе $\bar\Pi$, дважды непрерывно дифференцируемы в каждой из полос Π_j и обращаются в нуль на прямых $\psi = -r$ и $\psi = 1$.

4. Свойства функций Грина

Определим срезающие функции $M_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $(j = 0, 1, 2)$, полагая

$$M_j(t) = 1 \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \quad M_j(t) = t^{-j} \quad (t \geqslant 1).$$

Нижний индекс в обозначениях M_j будет указывать в оценках на порядок затухания Фурье-символов рассматриваемых операторов при $|\operatorname{Re}\zeta| \to \infty$. При оценке функций Грина полезны следующие элементарные неравенства для гиперболических функций комплексного и вещественного аргументов:

$$|sh\,\xi| \leqslant |sh\,\zeta| \leqslant ch\,\xi \quad (\zeta = \xi + i\eta), \tag{16}$$

$$\left|\frac{sh\,\zeta}{\zeta}\right| \leqslant \frac{sh\,\xi}{\xi} \leqslant C(\beta)\left|\frac{sh\,\zeta}{\zeta}\right| \quad (|Im\,\zeta| \leqslant \beta < \pi). \tag{17}$$

Лемма 1. *В полосе* $|Im\,\zeta| \leqslant \beta < \alpha_*$ *справедливы оценки*

$$\int\limits_{-r}^{1} |D^j_\psi \mathcal{G}(\psi, \chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant C(\beta, \nu) M_{2-j}(|\operatorname{Re}\zeta|) \qquad (j = 0, 1),$$

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{K}(\chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant C(\beta, \nu) M_1(|\operatorname{Re}\zeta|), \qquad \frac{1}{|\Delta(\zeta)|} \leqslant C(\beta, \nu)\, M_1(|\operatorname{Re}\zeta|).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем пока произвольным образом вещественное число $L > 0$ и рассмотрим отдельно случаи $|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant L$ и $|\operatorname{Re}\zeta| \geqslant L$. Для функций $\mathcal{G}$ и $\mathcal{K}$ ввиду их равномерной ограниченности на компактном множестве $|\operatorname{Re}\zeta| \leqslant L$ сразу имеем оценки

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{G}(\psi, \chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant C(L), \qquad \int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{K}(\chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant C(L).$$

При $|\operatorname{Re}\zeta| \geqslant L$ в полосе $-r \leqslant \psi \leqslant 0$ с помощью (16) и (17) получаем

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{G}(\psi, \chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{sh\,\zeta\psi}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \int\limits_{-r}^{\psi} |sh\,\zeta(\chi + r)|\, d\chi + \left|\frac{sh\,\zeta(\psi + r)}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \int\limits_{\psi}^{0} |sh\,\zeta\chi|\, d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{sh\,\zeta\psi}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \int\limits_{-r}^{\psi} ch\,\xi(\chi + r)\, d\chi + \left|\frac{sh\,\zeta(\psi + r)}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \int\limits_{\psi}^{0} ch\,\xi\chi\, d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{sh\,\zeta\psi}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \left|\frac{sh\,\xi(\psi + r)}{\xi}\right| + \left|\frac{sh\,\zeta(\psi + r)}{\zeta\, sh\, r\zeta}\right| \left|\frac{sh\,\xi\psi}{\xi}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\left|\frac{sh\,\xi\psi\, sh\,\xi(\psi + r)}{\xi^2\, sh\, r\xi}\right|.$$

Отсюда, поскольку

$$\max_{\psi \in [-r,\, 0]} |sh\,\xi\psi\, sh\,\xi(\psi + r)| = \frac{1}{2}\,(ch\, r\xi - 1),$$

при $|\xi| \geqslant L$ получаем оценку

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{G}(\psi, \chi;\ \zeta)|\, d\chi \leqslant \frac{C(L)}{|\xi|^2}.$$

А в полосе $0 \leqslant \psi \leqslant 1$, обозначив $\omega = \sqrt{\zeta^2 - \nu^2}$ и $\gamma = \omega$, аналогично имеем

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\zeta)|\,d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \left|\frac{sh\,\omega(\psi-1)}{\omega\, sh\,\omega}\right| \int\limits_0^{\psi} e^{\frac{\sigma}{2}(\psi-\chi)} |sh\,\omega\chi|\,d\chi + \left|\frac{sh\,\omega\psi}{\omega\, sh\,\omega}\right| \int\limits_{\psi}^{1} e^{\frac{\sigma}{2}(\psi-\chi)} |sh\,\omega(\chi-1)|\,d\chi \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\sigma}{2}} \left|\frac{sh\,\omega(\psi-1)}{\omega\, sh\,\omega}\right| \int\limits_0^{\psi} ch\,\gamma\chi\,d\chi + e^{\frac{\sigma}{2}} \left|\frac{sh\,\omega\psi}{\omega\, sh\,\omega}\right| \int\limits_{\psi}^{1} ch\,\gamma(\chi-1)\,d\chi \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{\sigma}{2}} \left|\frac{sh\,\omega(\psi-1)}{\omega\, sh\,\omega}\right| \left|\frac{sh\,\gamma\psi}{\gamma}\right| + e^{\frac{\sigma}{2}} \left|\frac{sh\,\omega\psi}{\omega\, sh\,\omega}\right| \left|\frac{sh\,\gamma(\psi-1)}{\gamma}\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2e^{\frac{\sigma}{2}} \left|\frac{sh\,\gamma\psi\; sh\,\gamma(\psi-1)}{\gamma^2\, sh\,\gamma}\right| \leqslant \frac{C}{|\gamma|^2}.$$

Оценим в последней формуле величину $|\gamma| = |\operatorname{Re}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}\,|$ снизу, используя для этого тригонометрическое представление $\zeta^2 - \nu^2 = \tau\, e^{i\theta}$, согласно которому $|\gamma| = \sqrt{\tau}\,|\cos\frac{\theta}{2}|$ и

$$\theta = \operatorname{Arg}(\zeta^2-\nu^2) = \operatorname{Arg}(\zeta-\nu) + \operatorname{Arg}(\zeta+\nu).$$

Если выбрать $L > \nu$, то при $\operatorname{Re}\zeta \geqslant L$ точки $\zeta-\nu$ и $\zeta+\nu$ будут лежать в одной и той же полуплоскости относительно оси ординат. Отсюда, поскольку в полосе $|\operatorname{Im}\zeta| < \beta$ выполнено

$$\max_{\operatorname{Re}\zeta\geqslant L}\left|\frac{\theta}{2}\right| \leqslant \max_{\operatorname{Re}\zeta\geqslant L} |\operatorname{Arg}(\zeta-\nu)| = |\operatorname{Arg}((L-\nu)+i\beta)|,$$

а величина $|\cos\frac{\theta}{2}|$ монотонно убывает при $\operatorname{Re}\zeta \geqslant L$ с ростом $|\theta|$, получаем неравенство

$$|\cos\frac{\theta}{2}| \geqslant \cos\operatorname{Arg}\big((L-\nu)+i\beta\big) = \frac{L-\nu}{\sqrt{(L-\nu)^2+\beta^2}}.$$

Поэтому, если число L с самого начала выбрано так, что $L > 2\nu$, величина $|\cos\frac{\theta}{2}|$ будет строго отделена от нуля при $|\operatorname{Re}\zeta| \geqslant L$. Аналогичное неравенство для указанной величины имеет место и при $\operatorname{Re}\zeta \leqslant -L$. Учитывая это ее свойство вместе с неравенством для модуля $\tau = \left|\zeta^2-\nu^2\right| \geqslant |\xi|^2 - \nu^2$, получаем неравенство

$$\frac{1}{|\gamma|} = \frac{1}{\sqrt{\tau}\,|\cos\frac{\theta}{2}|} \leqslant \frac{C(\beta,\nu)}{|\xi|},$$

которое обосновывает итоговую оценку

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\zeta)|\,d\chi \leqslant \frac{C(\beta,\nu)}{|\xi|^2}$$

при $0 \leqslant \psi \leqslant 1$. Оценка интеграла $\int\limits_{-r}^{1} |D_{\psi}^{j}\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\zeta)|\,d\chi$ при $j=1$ получается аналогичным образом.

Проведем теперь оценку интеграла $\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{K}(\chi;\,\zeta)|\,d\chi$ при $|\mathrm{Re}\,\zeta| \geqslant L$. Имеем следующую цепочку неравенств:

$$\int\limits_{-r}^{1} |\mathcal{K}(\chi;\,\zeta)|\,d\chi = \int\limits_{-r}^{0} \left|\frac{\operatorname{sh}\zeta(\chi+r)}{\operatorname{sh} r\zeta}\right| d\chi + \int\limits_{0}^{1} \left|\frac{\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}\,(1-\chi)}{\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}}\right| d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\operatorname{sh} r\zeta|}\int\limits_{-r}^{0} \operatorname{ch}\xi(\chi+r)\,d\chi + \frac{1}{\left|\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}\,\right|}\int\limits_{0}^{1}\operatorname{ch}\gamma(1-\chi)\,d\chi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\operatorname{sh} r\zeta|}\left|\frac{\operatorname{sh} r\xi}{\xi}\right| + \frac{1}{\left|\operatorname{sh}\sqrt{\zeta^2-\nu^2}\,\right|}\left|\frac{\operatorname{sh}\gamma}{\gamma}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{|\xi|} + \frac{1}{|\gamma|} \leqslant \frac{C(\beta,\nu)}{|\xi|}.$$

Оценка для функции $\Delta(\xi)$, имеющей первый порядок роста по ξ при $|\xi| \to \infty$, достаточно элементарна. Лемма доказана. $\square$

5. Оценка решения

Пусть пара чисел Фруда (F_1, F_2) такова, что дисперсионная функция $\Delta(\xi)$, определенная формулами (12) и (13), не имеет вещественных корней. Следующая теорема дает в этой ситуации достаточное условие существования решения в классе $H^{\alpha}_{\rho}(\Pi)$ с оценками его производных через нормы правых частей в уравнениях и граничном условии.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in E^{\alpha}_{\rho,1}(\mathbb{R})$, $f_j \in E^{\alpha}_{\rho}(\bar{\Pi}_j)$ $(j = 1,2)$ с показателем $\alpha < \alpha_*$, где α_* задано в* (14). *Тогда формула* (8) *представляет решение u задачи* (1)–(3), *принадлежащее пространству $H^{\alpha}_{\rho}(\Pi)$. Кроме того, при $0 \leqslant m+n \leqslant 2$ справедлива оценка*

$$\|D^m_x D^n_\psi u\|_{E^{\alpha}_{\rho}(\bar{\Pi}_j)} \leqslant C\left(\|\varphi\|_{E^{\alpha}_{\rho,1}(\mathbb{R})} + \max_{k=1,2}\,\|f_k\|_{E^{\alpha}_{\rho}(\bar{\Pi}_k)}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $I_1 = [-r,0]$, $I_2 = [0,1]$ и представим оцениваемую величину следующим образом:

$$\|D^m_x D^n_\psi u\|_{E^{\alpha}_{\rho}(\bar{\Pi}_j)} = \sup_{|\eta|<\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\sup_{\psi\in I_j}|\zeta^m D^n_\psi \widehat{u}(\xi+i\eta,\psi)|\,d\xi \leqslant J_1+J_2+J_3,$$

где

$$J_1 = \sup_{|\eta|<\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\sup_{\psi\in I_j}\left|\zeta^m\int\limits_{-r}^{1} D^n_\psi\mathcal{G}(\psi,\chi;\,\zeta)\,\widehat{f}(\zeta,\chi)\,d\chi\right| d\xi,$$

$$J_2 = \sup_{|\eta|<\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\sup_{\psi\in I_j}\left|\zeta^m D^n_\psi\frac{s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)}{\Delta(\zeta)}\widehat{\varphi}(\zeta)\right| d\xi,$$

$$J_3 = \sup_{|\eta|<\alpha}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\sup_{\psi\in I_j}\left|\zeta^m D^n_\psi\frac{s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)}{\Delta(\zeta)}\int\limits_{-r}^{1}F^2(\chi)\mathcal{K}(\chi;\,\zeta)\,\widehat{f}(\zeta,\chi)\,d\chi\right| d\xi.$$

Случай 1: $n \neq 2$. Оценим все три слагаемых. Для J_1, применяя лемму 1, имеем

$$J_1 \leqslant \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \sup_{\psi\in I_j} \left(|\zeta^m| \int\limits_{-r}^{1} \left| D_\psi^n \mathcal{G}(\psi,\chi;\, \zeta)\, \widehat{f}(\zeta,\chi) \right| d\chi \right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\, |\zeta^m| \sup_{\chi\in I_j} |\widehat{f}_j(\zeta,\chi)| \sup_{\psi\in I_j} \left(\int\limits_{-r}^{1} \left| D_\psi^n \mathcal{G}(\psi,\chi;\, \zeta) \right| d\chi \right) d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|}\, |\zeta^m| \sup_{\chi\in I_j} |\widehat{f}_j(\zeta,\chi)|\, M_{2-n}(|\xi|)\, d\xi \leqslant C_2 \|f_j\|_{E_\rho^\alpha(\bar{\Pi}_j)}.$$

Для J_2 при $m \neq 0$ в силу принадлежности производной $\varphi'(x)$ классу $E_\rho^\alpha(\mathbb{R})$ верны следующие соотношения:

$$J_2 = \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \sup_{\psi\in I_j} \left| \zeta^{m-1} D_\psi^n \frac{s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)}{\Delta(\zeta)} \widehat{\varphi'}(\zeta) \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \frac{|\zeta|^{m-1}}{|\Delta(\zeta)|} |\widehat{\varphi'}(\zeta)| \sup_{\psi\in I_j} \left| D_\psi^n \left(s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)\right) \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_3 \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} |\zeta|^{m-1} M_1(|\xi|) |\widehat{\varphi'}(\zeta)| \sup_{\psi\in I_j} \left| D_\psi^n \left(s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)\right) \right| d\xi.$$

Несложно показать, что выполнено неравенство

$$\left| D_\psi^n \left(s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)\right) \right| \leqslant C|\zeta|^n.$$

Таким образом, получаем, что

$$J_2 \leqslant C_4 \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} C e^{\rho|\xi|} |\zeta|^{m+n-1} M_1(|\xi|) |\widehat{\varphi'}(\zeta)|\, d\xi \leqslant C_5 \|\varphi\|_{E_{\rho,1}^\alpha(\mathbb{R})}.$$

При $m = 0$ для J_2 имеем

$$J_2 = \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \sup_{\psi\in I_j} \left| D_\psi^n \frac{s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)}{\Delta(\zeta)} \widehat{\varphi}(\zeta) \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} \frac{|\widehat{\varphi}(\zeta)|}{|\Delta(\zeta)|} \sup_{\psi\in I_j} \left| D_\psi^n \left(s(\psi)\mathcal{K}(\psi;\zeta)\right) \right| d\xi \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sup_{|\eta|<\alpha} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{\rho|\xi|} |\zeta|^n M_1(|\xi|) |\widehat{\varphi}(\zeta)|\, d\xi \leqslant C_7 \|\varphi\|_{E_{\rho,1}^\alpha(\mathbb{R})}.$$

Используя те же приемы, несложно доказать, что

$$J_3 \leqslant C_8 \max_{k=1,2} \|f_k\|_{E_\rho^\alpha(\bar{\Pi}_k)}.$$

Искомое неравенство обосновано.

Случай 2: $n = 2$. Оценка выполнена в силу уравнений (1)–(2) и уже полученных выше оценок решения.

Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Makarenko N. I.* Smooth Bore in a Two-Layer Fluid // Intern. Ser. of Numerical Math. Basel: Birkhäuser Verlag, 1992. Vol. 106. P. 195–204.

2. *Макаренко Н. И., Мальцева Ж. Л.* О спектре фазовых скоростей внутренних волн в слабостратифицированной двухслойной жидкости // Изв. РАН, МЖГ. 2009. № 2. С. 125–145.

3. *Белолипецкий А. А., Тер-Крикоров А. М.* Асимптотические решения типа длинных волн для одного класса граничных задач математической физики // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения / Под ред. В. А. Треногина, А. Ф. Филиппова. М.: Физматлит, 2003. С. 145–196.

4. *Ter-Krikorov A. M.* Theorie Exacte des Ondes Longues Stationnaires Dans un Liquide Heterogene // J. Mecanique. 1963. Vol. 2. No. 3. P. 351–376.

5. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. М.: Мир, 1984.

6. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. М.: ИЛ, 1962.

7. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Научная книга, 1998.

8. *Налимов В. И.* Псевдодифференциальные операторы с аналитическими символами // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 3. С. 195–204.

Материал поступил в редколлегию 01.10.2010

Адреса авторов

ГОЛОСОВ Кирилл Владимирович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: kirill.golosov@gmail.com

МАКАРЕНКО Николай Иванович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Новосибирск, 630090, Россия
Новосибирский государственный университет
ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: makarenko@hydro.nsc.ru