УДК 510.5+510.6+512.563

М. Н. Леонтьева

ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ДЛЯ БУЛЕВЫХ АЛГЕБР*

Завершая исследование разрешимости булевых алгебр в терминах вычислимости некоторой последовательности канонических идеалов, мы приводим в данной работе доказательство достаточности полученных условий такой разрешимости для булевых алгебр всех элементарных характеристик.

Ключевые слова: булева алгебра, вычислимое множество, вычислимая модель, сильно вычислимая модель, n-вычислимость, разрешимая модель, элементарная характеристика булевой алгебры, идеал Ершова–Тарского.

1. История вопроса и основные результаты

Модель называется *вычислимой*, если ее носитель — вычислимое множество, операции — вычислимые функции, и отношения вычислимы. Вычислимая модель называется *n-вычислимой*, если существует алгоритм, определяющий по конечной Σ_n-формуле и набору элементов, истинна ли эта формула на этом наборе. *Сильно вычислимая* модель — та, для которой подобный алгоритм существует для всех формул исчисления предикатов. Мы будем называть модель *разрешимой*, если у нее существует сильно вычислимая изоморфная копия. В данной работе рассматриваются счетные булевы алгебры, которые кратко будем называть алгебрами; в качестве источника предварительных сведений по теории булевых алгебр будем использовать работу [1].

Множество атомов некоторой алгебры $\mathfrak{B}$ обозначим $\mathrm{At}_0(\mathfrak{B})$, идеал безатомных элементов — $\mathrm{Als}_0(\mathfrak{B})$, идеал атомных элементов — $\mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$. Через $\mathrm{F}_0(\mathfrak{B})$ обозначим *идеал Фреше* (идеал, порожденный атомами), $\mathrm{E}(\mathfrak{B}) = \mathrm{Als}_0(\mathfrak{B}) + \mathrm{Atm}_0(\mathfrak{B})$ — идеал Ершова–Тарского. Пусть $\{\mathrm{E}_n\}_{n\in\omega}$ — последовательность итерированных идеалов Ершова–Тарского, т. е. $\mathrm{E}_0(\mathfrak{B}) = \{0\}$, $\mathrm{E}_{n+1}(\mathfrak{B}) = (\mathrm{E}_n \circ \mathrm{E})(\mathfrak{B}) = \{x \in \mathfrak{B} | \ x/\mathrm{E}_n \in \mathrm{E}(\mathfrak{B}/\mathrm{E}_n)\}$. Для каждого $k \in \omega$ обозначим через At_k предикат, выделяющий в каждой алгебре множество таких элементов x, что x/E_k — атом. Аналогично определяются предикаты F_k, Als_k и Atm_k.

Определим некоторые наборы одноместных предикатных символов. Пусть $\Sigma_0 = \{\mathrm{E}_0\}$, $\Sigma_n = \Sigma_0 \cup \{\mathrm{At}_0, \mathrm{Als}_0, \mathrm{Atm}_0, \mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{Atm}_{n-1}, \mathrm{E}_n\}$ для $n \geq 1$.

Пусть T — элементарная теория некоторой алгебры $\mathfrak{B}$. Для каждой такой теории, кроме теории, соответствующей элементарной характеристике $(\infty, 0, 0)$, Ю. Л. Ершов в [4] нашел конечный набор одноместных предикатов $P_0, \ldots, P_m$, определяемых формулами первого порядка, такой, что $\mathfrak{B}$ сильно вычислима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{B}$

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект N 11-01-00236) и АВЦП Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1.10726).

вычислима и вычислимы все предикаты $P_0, \dots, P_m$. Набор $P_0, \dots, P_m$ имеет вид Σ_{n+1}, где n — первая элементарная характеристика алгебры. Позже С. С. Гончаровым было показано, что при $k \leq m$ вычислимость $\mathfrak{B}$ вместе с вычислимостью предикатов $P_1, \dots, P_k$ равносильна вычислимости Σ_k-диаграммы в $\mathfrak{B}$, т. е. k-вычислимости.

Мы рассматриваем следующую задачу: если $S \subseteq \Sigma_{n+1}$ — некоторое подмножество и известно, что $\mathfrak{B}$ вычислима и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S, то можно ли утверждать, что $\mathfrak{B}$ разрешима, т. е. обладает сильно вычислимым представлением?

Некоторые частные случаи рассматриваемой задачи были ранее рассмотрены в работах С. С. Гончарова, С. П. Одинцова, В. Н. Власова и П. Е. Алаева. Приведем краткий обзор этих результатов. В [2] построен пример неразрешимой алгебры с характеристикой $(\infty, 0, 0)$, которая n-вычислима для всех $n \in \omega$ (без равномерности по n). В [3] приводится пример неразрешимой и 0-вычислимой (т. е. просто вычислимой) алгебры характеристики $(0, \infty, 0)$. При этом из [4] следует, что в этом случае 1-вычислимость влечет не только разрешимость, но и сильную вычислимость. Для $(0, k, 0)$ и $(0, k, 1)$, $k \in \omega$, ответ сразу следует из [4]: вычислимость означает и сильную вычислимость.

В [4] указаны достаточные условия сильной вычислимости (а значит, и разрешимости) и для всех остальных характеристик вида $(m, *, *)$, где $m \in \omega$. Например, для характеристик $(m, \infty, 0)$ и $(m, \infty, 1)$ сильная вычислимость следует из $(4m+1)$-вычислимости. Небольшая модификация примера из [3], выполненная в [1], показывает, что $4m$-вычислимости недостаточно и для разрешимости.

В [5] было показано, что для характеристики $(1, 1, 0)$ 2-вычислимость влечет разрешимость, а для $(1, 0, 1)$ 3-вычислимость влечет разрешимость. В [1] было завершено доказательство того, что для $(1, 1, 0)$ уже 1-вычислимость влечет разрешимость. В [6] для характеристики $(1, 0, 1)$ был построен пример 1-вычислимой и неразрешимой алгебры. В [7] было доказано, что для характеристики $(1, 0, 1)$ уже 2-вычислимость влечет разрешимость. В [8] получено, что для характеристики $(m, 1, 0)$, $m \geq 2$, разрешимость следует из $(4m-3)$-вычислимости, а для $(m, 0, 1)$, $m \geq 2$, — из $(4m-2)$-вычислимости. В [9] доказано, что в случае алгебры характеристики $(m, 0, 1)$, $m > 0$ из $(4m-3)$-вычислимости и вычислимости предиката Atm_{m-1} также следует разрешимость.

Автором было завершено исследование рассматриваемой задачи и получен ответ для всех возможных подмножеств S, который сформулирован в теореме 1.

Теорема 1. *Пусть $n, p \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая булева алгебра с первой элементарной характеристикой, равной n, $S \subseteq \Sigma_{n+1}$, и в $\mathfrak{B}$ вычислимы все предикаты из S.*

1. *Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p, 1)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ разрешима; в противном случае она может быть неразрешимой.*

2. *Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, p+1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n-1$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — разрешима; в противном случае она может быть неразрешимой.*

3. *Пусть элементарная характеристика $\mathfrak{B}$ равна $(n, \infty, 0)$ или $(n, \infty, 1)$. Если для каждого $k \leq n$ в S содержится At_k и для каждого $m < n$ хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ разрешима; в противном случае она может быть неразрешимой.*

В данной работе приводится доказательство достаточности условий разрешимости булевых алгебр, сформулированных в теореме 1. Необходимость данных условий (в том смысле, в котором она указана в теореме 1) рассматривается в [10][1].

2. Достаточные условия разрешимости для булевых алгебр

Булевы алгебры будем рассматривать как модели языка $\Sigma_{BA} = \{+, \cdot, -, 0, 1\}$, где «$+$» соответствует объединению элементов, «$\cdot$» — пересечению, и «$-$» означает дополнение. Если $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathfrak{A}$, то $a_1, .., a_n | b$ означает, что $a_1 + \ldots + a_n = b$ и $a_i \cdot a_j = 0$ при $i \neq j$. Выражение $a - b$ равно $a \cdot (-b)$. Определим еще один набор одноместных предикатных символов $\Sigma_n^* = \Sigma_n \cup \{\mathrm{F}_0, \ldots, F_{n-1}\}$ для $n > 0$. В этом разделе мы будем работать с моделями, являющимися обогащением некоторой алгебры до языка $\Sigma_{BA} \cup \Sigma_n$ или $\Sigma_{BA} \cup \Sigma_n^*$. Если $\mathfrak{B}$ — алгебра, то через $\mathfrak{B}^{\Sigma_n}$ будем обозначать такое обогащение алгебры $\mathfrak{B}$ до языка $\Sigma_{BA} \cup \Sigma_n$, в котором все символы из Σ_n интерпретируются в соответствии со своими определениями. То же самое касается обозначения $\mathfrak{B}^{\Sigma_n^*}$. Когда речь будет идти о конкретной алгебре $\mathfrak{B}$, мы не будет различать набор предикатных символов Σ_n и набор предикатов на алгебре $\mathfrak{B}$, который является интерпретацией символов из Σ_n; для обоих наборов будет использоваться обозначение Σ_n.

Для доказательства следующего результата приведем сначала некоторые факты.

Теорема 2 [8]. *Пусть $n \geqslant 1$. Пусть $\mathfrak{C}$ — булева алгебра, причем $\mathfrak{C}/E_n$ — либо двухэлементная, либо ненулевая безатомная алгебра. Модель $\mathfrak{C}^{\Sigma_n}$ обладает вычислимым представлением тогда и только тогда, когда $\mathfrak{C}^{\Sigma_n^*}$ обладает Δ_2^0-вычислимым представлением.*

Утверждение следующей леммы получено релятивизацией предложения 1 из [8] относительно оракула $\varnothing'$.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — Δ_2^0-вычислимая алгебра, $H_0, H, H_1 \lhd \mathfrak{A}$, $H_0 \subseteq H \subseteq H_1$, при этом H_0 Δ_2^0-вычислим, а H лежит в классе Σ_2^0. Предположим, что $(\mathfrak{C}, M)$ — Δ_2^0-вычислимая алгебра с Δ_2^0-вычислимым идеалом, и существует Δ_3^0-вычислимый изоморфизм h из $(\mathfrak{C}, M)$ на $(\mathfrak{A}/H, H_1/H)$. Тогда*

1) *$(\mathfrak{A}, H_0, H, H_1) \cong (\mathfrak{B}, L_0, L, L_1)$, где последняя модель — Δ_2^0-вычислимая алгебра с Δ_2^0-вычислимыми идеалами;*
2) *при этом можно считать, что между моделями (H, H_0) и (L, L_0), рассматриваемыми как алгебры Ершова с выделенным идеалом, существует Δ_2^0-вычислимый изоморфизм.*

Теорема 3. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 0, 1)$. Если для каждого $k < n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и хотя бы один из предикатов Als_k и Atm_k, то $\mathfrak{B}$ — разрешимая алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислимая безатомная алгебра является сильно вычислимой [4], поэтому для $n = 0$ утверждение теоремы верно. Далее будем предполагать, что $n \geq 1$.

[1] См. также: *Леонтьева М. Н.* Минимальность некоторых условий разрешимости для булевых алгебр // Сиб. мат. журн. (в печати).

Предикат E_k выражается бескванторной формулой через At_k (при условии, что At_k не пусто) следующим образом. Пусть $c \in \mathrm{At}_k(\mathfrak{B})$ — произвольный элемент. Тогда $x \in \mathrm{E}_k(\mathfrak{B}) \Leftrightarrow (c + x \in \mathrm{At}_k(\mathfrak{B}))\&(c \cdot x \notin \mathrm{At}_k(\mathfrak{B}))$. Поэтому в условиях нашей теоремы для всех $k < n$ предикат E_k вычислим.

Заметим, что $x \in \mathrm{Als}_k \Leftrightarrow \forall y \leq x(y \notin \mathrm{At}_k)$, поэтому идеал Als_k принадлежит классу Π^0_1. Аналогично имеем, что $x \in \mathrm{Atm}_k \Leftrightarrow \forall y \leq x\ (y \in \mathrm{Als}_k \to y \in \mathrm{E}_k)$. Поэтому если Als_k — вычислимый предикат, то Atm_k — Π^0_1-идеал. Также F_k можно записать $\exists$-формулой, используя At_k, поэтому F_k — Σ^0_1-идеал.

Получаем, что $(\mathfrak{B}^{\Sigma^*_{n-1}}, \mathrm{At}_{n-1}(\mathfrak{B}), \mathrm{F}_{n-1}(\mathfrak{B}), \mathrm{Als}_{n-1}(\mathfrak{B}), \mathrm{Atm}_{n-1}(\mathfrak{B}))$ можно рассматривать как Δ^0_2-вычислимую алгебру. Тем самым мы оказываемся ровно в той же ситуации, что и в теореме 4 из [9]. Точно так же, как и там, применяя лемму 1, теорему 2 и пользуясь автоустойчивостью безатомных булевых алгебр, получаем существование сильно вычислимого представления для $\mathfrak{B}$. Теорема доказана. □

Утверждение следующей леммы является частным случаем утверждения, полученного в доказательстве теоремы 3 из [8].

Лемма 2 [8]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — вычислимая булева алгебра, $\mathfrak{A}/E_n$ двухэлементна, и все множества $E_{n-1}, At_{n-1}, F_{n-1}, Als_{n-1}$ вычислимы. Тогда $(\mathfrak{A}, E_{n-1}(\mathfrak{A})) \cong (\mathfrak{A}', E_{n-1}(\mathfrak{A}'))$, где $\mathfrak{A}'$ — вычислимая алгебра, и все множества $E_{n-1}(\mathfrak{A}'), At_{n-1}(\mathfrak{A}'), F_{n-1}(\mathfrak{A}')$, $Als_{n-1}(\mathfrak{A}')$, $Atm_{n-1}(\mathfrak{A}')$, $E_n(\mathfrak{A}')$ вычислимы. При этом между моделями $(F_{n-1}(\mathfrak{A})$, $E_{n-1}(\mathfrak{A}))$ и $(F_{n-1}(\mathfrak{A}')$, $E_{n-1}(\mathfrak{A}'))$, рассматриваемыми как алгебры Ершова с выделенным идеалом, существует частично-вычислимый изоморфизм.*

Теорема 4. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, 1, 0)$. Если для каждого $k < n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и для каждого $m < n - 1$ вычислим хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — разрешимая алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассуждая так же, как в теореме 3, получим, что все предикаты из $\Sigma^*_{n-1} \cup \{\mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{F}_{n-1}\}$ лежат в классе Δ^0_2. Поэтому $(\mathfrak{B}, \mathrm{E}_{n-1}, \mathrm{At}_{n-1}, \mathrm{Als}_{n-1}, \mathrm{F}_{n-1})$ можно рассматривать как Δ^0_2-вычислимую модель. Релятивизуя лемму 2 относительно оракула $\varnothing'$ и полагая $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, получим, что $(\mathfrak{B}, \mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B})) \cong (\mathfrak{B}', \mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B}'))$, где $\mathfrak{B}'$ и множества $\mathrm{E}_{n-1}(\mathfrak{B}')$, $\mathrm{At}_{n-1}(\mathfrak{B}')$, $\mathrm{Als}_{n-1}(\mathfrak{B}')$, $\mathrm{F}_{n-1}(\mathfrak{B}')$, $\mathrm{Atm}_{n-1}(\mathfrak{B}')$, $\mathrm{E}_n(\mathfrak{B}')$ Δ^0_2-вычислимы.

Между алгебрами Ершова $\mathrm{F}_{n-1}(\mathfrak{B})$ и $\mathrm{F}_{n-1}(\mathfrak{B}')$ существует изоморфизм, являющийся частичной Δ^0_2-вычислимой функцией. Поскольку все предикаты из Σ^*_{n-1} являются подмножествами F_{n-1} и Δ^0_2-вычислимы в $\mathfrak{B}$, они будут Δ^0_2-вычислимы и в $\mathfrak{B}'$.

Получаем, что $(\mathfrak{B}')^{\Sigma^*_n}$ Δ^0_2-вычислима. В силу теоремы 2 алгебра $(\mathfrak{B}')^{\Sigma_n}$ обладает вычислимым представлением. Следовательно, $\mathfrak{B}$ обладает сильно вычислимым представлением. Теорема доказана. □

Теорема 5. *Пусть $n \in \omega$, $\mathfrak{B}$ — вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$. Если для каждого $k \leq n$ в $\mathfrak{B}$ вычислим предикат At_k и для каждого $m < n$ вычислим хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m, то $\mathfrak{B}$ — разрешимая алгебра.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что это не так. Тогда существует вычислимая, но не разрешимая алгебра $\mathfrak{A}$ элементарной характеристики $(n, \infty, 0)$ такая, что для каждого

$k \leq n$ вычислим предикат $\mathrm{At}_k(\mathfrak{A})$ и для каждого $m < n$ вычислим хотя бы один из предикатов $\mathrm{Als}_m(\mathfrak{A})$ и $\mathrm{Atm}_m(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{C}$ — сильно вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n+1,1,0)$. Это значит, что в алгебре $\mathfrak{C}$ вычислимы все предикаты из Σ_n.

Рассмотрим алгебру $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$. Это вычислимая алгебра элементарной характеристики $(n+1,1,0)$, и для каждого $k \leq n$ в $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ вычислим предикат At_k, и для каждого $m < n$ вычислим хотя бы один из предикатов Als_m и Atm_m. По теореме 4 получаем, что $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ разрешима. В алгебре $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ существует элемент a такой, что $\hat{a} \cong \mathfrak{A}$. Из разрешимости алгебры $\mathfrak{C} \times \mathfrak{A}$ следует разрешимость $\hat{a}$, а значит, и разрешимость $\mathfrak{A}$.

Получаем, что сделанное нами предположение неверно. Теорема доказана. □

3. Случаи $(n,k+1,0)$, $(n,k,1)$ и $(n,\infty,1)$ для $k>0$

Мы рассмотрели алгебры элементарных характеристик $(n,0,1)$, $(n,1,0)$ и $(n,\infty,0)$. Теперь покажем, как из этих результатов можно получить аналогичные утверждения для характеристик $(n,k+1,0)$, $(n,k,1)$, $(n,\infty,1)$, где $k > 0$.

Известно, что алгебра характеристики $(n,\alpha,1)$, $\alpha \in \omega \cup \{\infty\}$, $\alpha \neq 0$, изоморфна прямому произведению алгебр характеристик $(n,\alpha,0)$ и $(n,0,1)$, а алгебра характеристики $(n,k,0)$ для $k > 1, k \in \omega$, представляется с помощью произведения k штук алгебр характеристики $(n,1,0)$.

Если алгебра $\mathfrak{A}$ представляется в виде произведения алгебр как $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \times \mathfrak{C}$, то существуют элементы $a_1, a_2|1$ в $\mathfrak{A}$ такие, что $\hat{a}_1 \cong \mathfrak{B}$, а $\hat{a}_2 \cong \mathfrak{C}$. Если в алгебре $\mathfrak{A}$ вычислим некоторый предикат из Σ_n, то он вычислим также в $\hat{a}_1$ и $\hat{a}_2$. Отсюда заключаем, что если в $\mathfrak{A}$ вычислимы все предикаты из Σ_{n+1}, для n равного первой элементарной характеристике $\mathfrak{A}$, которые необходимы для разрешимости алгебр $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, то алгебры $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ будут обладать сильно вычислимым представлением, а значит, таким представлением будет обладать и $\mathfrak{A}$.

В силу приведенных рассуждений получаем, что для алгебр характеристики $(n,\infty,1)$ достаточные условия разрешимости совпадают с $(n,\infty,0)$, для характеристики $(n,k,0)$ для $k > 1$ совпадают с $(n,1,0)$ и, наконец, для $(n,k,1)$ при $k > 0$ совпадают с $(n,0,1)$.

Автор выражает благодарность научному руководителю д-ру физ.-мат. наук П. Е. Алаеву за постановку задачи и поддержку в ходе решения.

Список литературы

1. *Гончаров С. С.* Счетные булевы алгебры и разрешимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.

2. *Гончаров С. С.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1976. Т. 17, № 4. С. 797–812.

3. *Гончаров С. С.* Некоторые свойства конструктивизации булевых алгебр // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 264–278.

4. *Ершов Ю. Л.* Разрешимость элементарной теории дистрибутивных структур с относительными дополнениями и теории фильтров // Алгебра и логика. 1964. Т. 3, № 3. С. 17–38.

5. *Одинцов С. П.* Ограниченные теории конструктивных булевых алгебр нижнего слоя. Препринт N 21 / Ин-т математики СО АН СССР. Новосибирск, 1986.

6. *Власов В. Н.* Конструктивизируемость булевых алгебр элементарной характеристики $(1, 0, 1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 5. С. 499–521.

7. *Алаев П. Е.* Разрешимые булевы алгебры характеристики (1,0,1) // Математические труды. 2007. Т. 7, № 1. С.3–12.

8. *Алаев П. Е.* Сильно конструктивные булевы алгебры // Алгебра и логика. 2005. Т. 7, № 1. С. 3–23.

9. *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом атомных элементов // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика, информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 64–68.

10. *Леонтьева М. Н.* Булевы алгебры элементарной характеристики (1,0,1) с вычислимыми множеством атомов и идеалом Ершова–Тарского // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 2. С. 133–151.

Материал поступил в редколлегию 26.06.2009

Адрес автора

ЛЕОНТЬЕВА Маргарита Николаевна

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: Margarita.Leontyeva@gmail.com