УДК 514.765

О. П. Гладунова, Е. Д. Родионов, В. В. Славский

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ТЕНЗОРАХ НА ТРЕХМЕРНЫХ ГРУППАХ ЛИ С ЛЕВОИНВАРИАНТНОЙ ЛОРЕНЦЕВОЙ МЕТРИКОЙ*

В данной работе исследуются трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и почти гармоническим, т. е. с нулевым ротором и дивергенцией, тензором Схоутена – Вейля. Кроме того, с помощью операции свертки тензора Схоутена – Вейля по направлению произвольного вектора определен кососимметрический 2-тензор. Исследовано строение трехмерных групп и алгебр Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых данный тензор является гармоническим.

Ключевые слова: группы и алгебры Ли, левоинвариантные лоренцевы метрики, гармонический тензор, тензор Схоутена – Вейля.

Введение

В фундаментальной монографии [1] приведен обзор исследований римановых метрик с гармоническим тензором Вейля. В трехмерном случае тензор Вейля тривиален, роль его аналога играет тензор Схоутена – Вейля (тензор Коттона). В [2] изучался тензор Схоутена – Вейля для левоинвариантной лоренцевой метрики на группах Ли размерности 3, что является продолжением исследований [3] левоинвариантных римановых метрик на трехмерных группах Ли Дж. Милнора. В [4] дана классификация алгебр Ли групп Ли размерности 3 с левоинвариантной римановой метрикой и тривиальными дивергенцией и ротором тензора Схоутена – Вейля.

Настоящая работа продолжает исследования, начатые в [4] для случая лоренцевой метрики. В ней изучаются трехмерные группы Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой и почти гармоническим, т. е. с нулевым ротором и дивергенцией, тензором Схоутена – Вейля. Кроме того, с помощью операции свертки тензора Схоутена – Вейля по направлению произвольного вектора определен кососимметрический 2-тензор [5; 6]. Исследовано строение трехмерных групп и алгебр Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых данный тензор является гармоническим.

1. Основные обозначения и факты

Пусть G — группа Ли, $\{\mathfrak{g}, [\cdot,\cdot]\}$ — соответствующая алгебра Ли. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ левоинвариантную лоренцеву метрику на G, а через ∇ связность Леви-Чивита.

* Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки молодых ученых и ведущих научных школ Российской Федерации (код проекта НШ-921.2012.1), а также при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0457).

Фиксируем базис $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ левоинвариантных векторных полей в $\mathfrak{g}$. Положим

$$[E_i, E_j] = c_{ij}^k E_k, \quad \langle E_i, E_j \rangle = g_{ij}, \tag{1}$$

где $\{c_{ij}^k\}$ — структурные константы алгебры Ли, $\{g_{ij}\}$ — метрический тензор. Пусть $c_{ijs} = c_{ij}^k g_{ks}$, тогда символы Кристоффеля первого и второго родов вычисляются соответственно по формулам

$$\Gamma_{ij,k} = \frac{1}{2}(c_{ijk} - c_{jki} + c_{kij}),\, \Gamma_{ij}^s = \Gamma_{ij,k} g^{ks}, \tag{2}$$

где $\|g^{ks}\|$ есть матрица, обратная к $\|g_{ks}\|$.

Из (1) и (2), очевидно следует, что тензоры Римана R_{ijkt}, Риччи R_{ik} и скалярная кривизна R, а также тензоры одномерной кривизны A_{ij}, Схоутена – Вейля S_{ijk} и Вейля являются функциями структурных констант c_{ij}^k и компонент метрического тензора g_{ij} (см. [2]).

Рассмотрим тензор одномерной кривизны

$$A_{ik} = \frac{1}{n-2}\left(R_{ik} - \frac{Rg_{ik}}{2(n-1)}\right).$$

Тогда тензор Схоутена – Вейля определяется формулой

$$S_{ijk} = A_{ij;k} - A_{ik;j},$$

где $A_{ij;k}$ — ковариантные производные тензора A_{ij} .

Ковариантные производные тензора Схоутена – Вейля имеют вид

$$S_{ijk;t} = S_{ljk}\Gamma_{ti}^l + S_{ilk}\Gamma_{tj}^l + S_{ijl}\Gamma_{tk}^l. \tag{3}$$

Определение 1. Тензор $T_{i_1 \ldots i_p}$ строения $(p, 0)$ (см. [7. С. 43]) называется *гармоническим*, если выполняются следующие три условия:

1) $T_{i_1 \cdots i_p}$ — кососимметрический;

2) $\operatorname{rot}(T_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = 0$ или $T_{i_1 i_2 \cdots i_p;t} = T_{t i_2 \cdots i_p; i_1} + T_{i_1 t \cdots i_p; i_2} + \cdots + T_{i_1 i_2 \cdots t; i_p}$;

3) $\operatorname{div}(T_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = g^{i_1 t} T_{i_1 \ldots i_p; t} = 0$.

Заметим, что кососимметрическая часть $S_{[ijk]}$ и симметрическая часть $S_{(ijk)}$ тензора Схоутена – Вейля равны нулю. Таким образом, для тензора Схоутена – Вейля не выполняется первое условие данного определения.

Определение 2. Тензор $T_{i_1 \ldots i_p}$ строения $(p, 0)$ назовем *почти гармоническим*, если выполняются следующие два условия:

1) $\operatorname{rot}(T_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = 0$;

2) $\operatorname{div}(T_{i_1 i_2 \cdots i_p}) = 0$.

Определим дивергенцию типа I и II тензора Схоутена – Вейля S_{ijk} соответственно формулами

$$\operatorname{div}_1(S) = g^{it} S_{ijk;t} \quad \text{и} \quad \operatorname{div}_2(S) = g^{jt} S_{ijk;t}\,.$$

Пусть $V = V^i E_i$ — левоинвариантное векторное поле, которое мы будем отождествлять с вектором $\{V^k\}$. Определим тензор w_{ij} как свертку тензора Схоутена – Вейля S_{kij} с вектором $\{V^k\}$, т. е.

$$w_{ij} = V^k S_{kij}. \tag{4}$$

В силу косой симметрии тензора Схоутена – Вейля S_{kij} по индексам i и j тензор w_{ij} — кососимметрический. Ковариантные производные этого тензора имеют вид

$$w_{ij;k} = w_{lj}\Gamma^l_{ki} + w_{il}\Gamma^l_{kj}.$$

Ротор и дивергенция тензора w_{ij} вычисляются соответственно по формулам

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(w) &= w_{ij;t} - w_{tj;i} - w_{it;j},\\ \operatorname{div}(w) &= g^{it} w_{ij;t}.\end{aligned}$$

Квадрат длины вектора $\{V^k\}$ вычисляется по формуле

$$\|V\|^2 = g_{ij} V^i V^j, \tag{5}$$

где g_{ij} — метрический тензор лоренцевой сигнатуры.

Одновременно с лоренцевой метрикой введем евклидову метрику, в которой вектор $\{V^k\}$ единичный, т. е. имеет место равенство

$$(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = 1\,. \tag{6}$$

Наряду с произвольными векторами будем рассматривать и гармонические векторы.

Определение 3. Вектор $\{V^i\}$ называется *гармоническим*, если выполняются следующие условия:

1) $\operatorname{rot}(V) = V^i_{\ ;j} - V^j_{\ ;i} = 0$;

2) $\operatorname{div}(V) = V^i_{\ ;i} = 0$, где ковариантные производные вектора $\{V^i\}$ определяются формулой

$$V^i_{\ ;k} = -V^l \Gamma^i_{lk}\,.$$

Заметим, что структурные уравнения алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно записать в виде

$$[E_i, E_j] = \varepsilon_{ijk} C^{ks} E_s\,,$$

где ε_{ijk} — обобщенный символ Кронекера, $\varepsilon_{ijk} = \{\ (-1)^\sigma : \sigma$ — четность подстановки $(ijk)\}$, $C = \|C^{ks}\|$ — некоторая матрица.

Следуя [2], определим структурные константы и удобный для вычисления базис в случае трехмерных алгебр Ли.

Пусть G — унимодулярная трехмерная группа Ли, $\|T_{ij}\|$ – произвольный метрический тензор лоренцевой сигнатуры. Тогда характеристическое уравнение $\det(T_{ij}C^{kj} - \lambda\delta^j_i) = 0$ инвариантно относительно преобразований A алгебры Ли $\mathfrak{g}$ таких, что $\det A = 1$. Если все корни этого уравнения вещественны и различны, то существует базис, в котором коэффициенты $\|C^{kj}\|$ и $\|T_{ij}\|$ составляют диагональные матрицы:

$$C = \begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \imath\beta$ и вещественный корень λ_3, тогда существует базис, в котором матрицы C и T имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Кроме того (см. [2]), компоненты тензора Схоутена – Вейля в случае вещественных корней характеристического уравнения имеют вид

$$\begin{aligned} S_{132} &= 1/2\,({\lambda_1}^2\lambda_2 - {\lambda_2}^2\lambda_3 + {\lambda_3}^3 - {\lambda_3}^2\lambda_2 + \lambda_3{\lambda_1}^2 - 2\,{\lambda_1}^3 + {\lambda_2}^3), \\ S_{231} &= 1/2\,(2\,{\lambda_2}^3 - {\lambda_2}^2\lambda_1 - {\lambda_2}^2\lambda_3 - {\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2\lambda_1 + \lambda_3{\lambda_1}^2 - {\lambda_1}^3), \\ S_{321} &= 1/2\,({\lambda_1}^3 - {\lambda_1}^2\lambda_2 - {\lambda_2}^2\lambda_1 + {\lambda_2}^3 - 2\,{\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2\lambda_1 + {\lambda_3}^2\lambda_2), \end{aligned} \tag{7}$$

а в случае комплексно сопряженных корней имеют вид

$$\begin{aligned} S_{131} &= S_{232} = 2\,\beta^3 + 1/2\,\beta\,{\lambda_3}^2 + 2\,\beta\,\lambda_3\alpha - 4\,\beta\,\alpha^2, \\ S_{321} &= 2S_{231} = 2S_{123} = -{\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2\alpha - 4\,\beta^2\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Если G — трехмерная неунимодулярная группа Ли, $\|T_{ij}\|$ – произвольный метрический тензор лоренцевой сигнатуры, тогда имеет место лемма [2].

Лемма 1. *Существует базис $\{V_1, V_2, V_3\}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, в котором матрица $\|C^{kj}\|$ имеет вид*

$$C = \begin{pmatrix} C^{11} & C^{12} & 0 \\ C^{21} & C^{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $C^{12} \neq C^{21}$.

Замечание 1. Плоскость векторов $\pi = V_1 \wedge V_2$ либо пересекает изотропный конус по вершине, либо касается конуса по прямой, либо пересекает по паре прямых. В зависимости от этого сужение скалярного произведения на плоскость π: A) положительно определено, B) неотрицательно определено, C) знаконеопределено и невырождено.

Случай A. Существует ортонормированный базис $\{E_1, E_2, E_3\}$ относительно скалярного произведения $\langle\cdot,\cdot\rangle$, в котором матрицы C и T соответственно имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} \cos(\varphi)\lambda & \sin(\varphi)\mu & 0 \\ -\sin(\varphi)\lambda & \cos(\varphi)\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\lambda + \mu \neq 0$. Компоненты тензора Схоутена – Вейля в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
S_{131} = -S_{232} = -1/2\,\sin(\varphi)(-3\,\mu^3\cos^2(\varphi) - 3\,\mu^2\cos^2(\varphi)\lambda + 3\,\mu\,\cos^2(\varphi)\lambda^2 + \\
+\,3\,\lambda^3\cos^2(\varphi) + 2\,\lambda\,\mu^2 - 2\,\lambda^2\mu), \\
S_{132} = -1/2\,\cos(\varphi)(-3\,\mu^3\cos^2(\varphi) - 3\,\mu^2\cos^2(\varphi)\lambda + 3\,\mu\,\cos^2(\varphi)\lambda^2 + \\
+\,3\,\lambda^3\cos^2(\varphi) + 3\,\lambda\,\mu^2 + 2\,\mu^3 - \lambda^3 - 4\,\lambda^2\mu), \\
S_{231} = -1/2\,\cos(\varphi)(-3\,\mu^3\cos^2(\varphi) - 3\,\mu^2\cos^2(\varphi)\lambda + 3\,\mu\,\cos^2(\varphi)\lambda^2 + \\
+\,3\,\lambda^3\cos^2(\varphi) + 4\,\lambda\,\mu^2 + \mu^3 - 2\,\lambda^3 - 3\,\lambda^2\mu), \\
S_{321} = 1/2\,(\lambda - \mu)\cos(\varphi)(\lambda^2 - \mu^2).
\end{aligned} \tag{9}$$

Случай B. Существует базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором матрицы C и T соответственно имеют вид

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $q \neq t$. Компоненты тензора Схоутена – Вейля в этом базисе имеют вид

$$\begin{aligned}
&S_{231} = 2S_{132} = 2S_{321} = s^3, \\
&S_{232} = S_{131} = -3/2\,qs^2, \\
&S_{332} = 3/2\,sq^2 - 1/2\,s^2p - 1/2\,qst.
\end{aligned} \tag{10}$$

Случай C. Существует базис $\{E_1, E_2, E_3\}$, в котором матрицы C и T соответственно имеют вид либо (*подслучай C*.1)

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $q \neq s$,

либо (*подслучай C*.2)

$$C = \begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $q \neq 0$ и $p + r \neq 0$.

Компоненты тензора Схоутена – Вейля в этом базисе в подслучае C.1 имеют вид

$$\begin{aligned}
&S_{131} = -sq^2 - qs^2 + 2\,p^2q + 2\,p^2s, \\
&S_{132} = 2\,pq^2 + qsp - s^2p, \\
&S_{231} = -qsp - 2\,s^2p + pq^2, \\
&S_{232} = -sq^2 - qs^2 + 2\,p^2q + 2\,p^2s, \\
&S_{321} = -2\,qsp - s^2p - pq^2,
\end{aligned} \tag{11}$$

в подслучае С.2 имеют вид

$$\begin{aligned} S_{131} &= S_{232} = 3/2\, qr^2 - 3/2\, p^2 q, \\ S_{132} &= -pq^2 - q^2 r - 1/2\, p^2 r - p^3 - 1/2\, r^3, \\ S_{231} &= -pq^2 - q^2 r - 1/2\, r^2 p - r^3 - 1/2\, p^3, \\ S_{321} &= 1/2\, p^2 r - 1/2\, r^2 p - 1/2\, r^3 + 1/2\, p^3. \end{aligned} \tag{12}$$

2. Гармонические тензоры на трехмерных унимодулярных группах Ли

Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, и корни характеристического уравнения вещественны. Свертывая по индексам i, t в равенстве (3) и принимая во внимание вид метрического тензора, получим

$$\operatorname{div}_1(S) = g^{ii}\left(S_{ljk}\Gamma^l_{ii} + S_{ilk}\Gamma^l_{ij} + S_{ijl}\Gamma^l_{ik}\right). \tag{13}$$

Применяя (2), находим символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma^3_{12} &= -\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_3), \\ \Gamma^3_{21} &= \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3), \\ \Gamma^2_{31} &= \Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3). \end{aligned}$$

Согласно (7) нетривиальными компонентами тензора Схоутена – Вейля являются S_{132}, S_{231}, S_{321}. Поэтому для выражения (13) получим

$$\operatorname{div}_1(S) = g^{ii}\left(S_{ilk}\Gamma^l_{ik} + S_{ikl}\Gamma^l_{ik}\right) = 0.$$

Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в данном случае всегда имеет $\operatorname{div}_1(S) = 0$, и его компоненты задаются равенствами (7).

Замечание 2. Тензор Риччи имеет следующие нетривиальные компоненты:

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}(2\lambda_3\lambda_2 - \lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2), \\ R_{22} &= \frac{1}{2}(-2\lambda_3\lambda_1 + \lambda_3^2 - \lambda_2^2 + \lambda_1^2), \\ R_{33} &= \frac{1}{2}(-2\lambda_1\lambda_2 - \lambda_3^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1^2). \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что метрика является эйнштейновой только в одном из следующих случаев:

$$\begin{aligned} &\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}, \\ &\lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}, \\ &\lambda_3 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

и константа Эйнштейна равна нулю, или

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R},$$

и константа Эйнштейна равна $-\frac{1}{2}\lambda_3$.

Положим, что тензор Схоутена–Вейля является почти гармоническим, т. е. $\mathrm{div}_1(S)=0$ и $\mathrm{rot}(S)=0$, или

$$S_{ijk;t}-S_{tjk;i}-S_{itk;j}-S_{ijt;k}=0.$$

В данном случае получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\mathrm{rot}(S)_{1133}=\mathrm{rot}(S)_{1212}=-\mathrm{rot}(S)_{1122}=-\mathrm{rot}(S)_{1313}=\\
=3/4\,\lambda_3{}^4-3/4\,\lambda_2{}^4+1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_1{}^2+1/4\,\lambda_1{}^3\lambda_3-1/2\,\lambda_2{}^3\lambda_3+\\
+1/4\,\lambda_2{}^2\lambda_1\lambda_3-1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_2\lambda_1+5/4\,\lambda_2{}^3\lambda_1-1/4\,\lambda_2{}^2\lambda_1{}^2-1/4\,\lambda_1{}^3\lambda_2+\\
+1/2\,\lambda_3{}^3\lambda_2-5/4\,\lambda_3{}^3\lambda_1=0,\\
\mathrm{rot}(S)_{2121}=\mathrm{rot}(S)_{2323}=-\mathrm{rot}(S)_{2211}=-\mathrm{rot}(S)_{2233}=\\
=3/4\,\lambda_3{}^4-3/4\,\lambda_1{}^4+1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_2{}^2-1/2\,\lambda_1{}^3\lambda_3+1/4\,\lambda_2{}^3\lambda_3+\\
+1/4\,\lambda_1{}^2\lambda_2\lambda_3-1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_2\lambda_1-1/4\,\lambda_2{}^3\lambda_1-1/4\,\lambda_2{}^2\lambda_1{}^2+5/4\,\lambda_1{}^3\lambda_2-\\
-5/4\,\lambda_3{}^3\lambda_2+1/2\,\lambda_3{}^3\lambda_1=0,\\
\mathrm{rot}(S)_{3311}=\mathrm{rot}(S)_{3322}=-\mathrm{rot}(S)_{3131}=-\mathrm{rot}(S)_{3232}=\\
=3/4\,\lambda_1{}^4-3/4\,\lambda_2{}^4-1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_2{}^2+1/4\,\lambda_3{}^2\lambda_1{}^2-5/4\,\lambda_1{}^3\lambda_3+\\
+5/4\,\lambda_2{}^3\lambda_3+1/4\,\lambda_2{}^2\lambda_1\lambda_3-1/4\,\lambda_1{}^2\lambda_2\lambda_3-1/2\,\lambda_2{}^3\lambda_1+1/2\,\lambda_1{}^3\lambda_2-\\
-1/4\,\lambda_3{}^3\lambda_2+1/4\,\lambda_3{}^3\lambda_1=0\,.
\end{gathered}\tag{14}$$

Решая систему уравнений (14) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$, находим все трехмерные унимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых характеристическое уравнение имеет вещественные корни, и тензор Схоутена–Вейля удовлетворяет условиям: $\mathrm{div}_1(S)=0$ и $\mathrm{rot}(S)=0$.

Получаем следующие решения:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3, && \lambda_3\in\mathbb{R},\\
&\lambda_1=\lambda_2,\lambda_3=0, && \lambda_2\in\mathbb{R},\\
&\lambda_1=\lambda_3,\lambda_2=0, && \lambda_3\in\mathbb{R},\\
&\lambda_2=\lambda_3,\lambda_1=0, && \lambda_3\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Найденные решения для наглядности помещаем соответственно в строки 1–4 табл. 1.

Непосредственно проверяется, что тензор Схоутена–Вейля (7) тривиален для каждого решения системы (14).

Замечание 3. Тензор Риччи для первого решения имеет вид

$$\|R_{ij}\|=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\lambda_3^2 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{1}{2}\lambda_3^2 & 0\\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}\lambda_3^2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае метрика является эйнштейновой при любых значениях λ_3, и константа Эйнштейна равна $-\frac{1}{2}\lambda_3^2$.

Для остальных решений тензор Риччи тривиален.

Таблица 1

№	Матрица структурных констант	Тип алгебры	Метрический тензор
	Вещественный случай		
1	$\begin{pmatrix} -\lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \in \mathbb{R}$	$sl(2,\mathbb{R})$ или $\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
2	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$	$e(1,1)$ или $\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
3	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$	$e(1,1)$ или $\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$	$e(2)$ или $\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	Комплексный случай		
5	$\begin{pmatrix} -\alpha & \pm\sqrt{3}\alpha & 0 \\ \pm\sqrt{3}\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$, $\alpha \neq 0$	$sl(2,\mathbb{R})$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Определяем компоненты дивергенции второго типа тензора Схоутена – Вейля и решаем систему уравнений $\operatorname{div}_2(S) = 0$:

$$\operatorname{div}_2(S)_{11} = 1/4\,\Phi(\lambda_1;\lambda_2,\lambda_3) = 0,$$
$$\operatorname{div}_2(S)_{22} = -1/4\,\Phi(\lambda_2;\lambda_1,\lambda_3) = 0,$$
$$\operatorname{div}_2(S)_{33} = -1/4\,\Phi(\lambda_3;\lambda_1,\lambda_2) = 0,$$

где

$$\Phi(\lambda_k;\lambda_i,\lambda_j) = 3(\lambda_i^4 - 2\lambda_k^4 + \lambda_j^4) + \lambda_i^3(\lambda_k - 4\lambda_j) + \lambda_j^3(\lambda_k - 4\lambda_i) + 3\lambda_k^3(\lambda_i + \lambda_j) - \\ - \lambda_i^2\lambda_k(\lambda_k + \lambda_j) - \lambda_j^2\lambda_k(\lambda_k + \lambda_i) + 2\lambda_i\lambda_j(\lambda_k^2 + \lambda_i\lambda_j).$$

Получаем, что решения данной системы уравнений совпадают с решениями системы $\operatorname{rot}(S) = 0$. Тем самым решен вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в случае действительных корней характеристического уравнения.

Применяя (5), нетрудно заметить, что квадрат длины вектора V в данном случае определяется формулой

$$\|V\|^2 = -(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2, \tag{15}$$

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$w_{21} = -w_{12} = 1/2\,V^3(-{\lambda_1}^2\lambda_2 - {\lambda_2}^2\lambda_1 + {\lambda_2}^3 - 2\,{\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2\lambda_1 + {\lambda_3}^2\lambda_2 + {\lambda_1}^3),$$
$$w_{13} = -w_{31} = 1/2\,V^2(-{\lambda_3}^2\lambda_1 - \lambda_3{\lambda_1}^2 - 2\,{\lambda_2}^3 + {\lambda_2}^2\lambda_3 + {\lambda_2}^2\lambda_1 + {\lambda_1}^3 + {\lambda_3}^3),$$
$$w_{23} = -w_{32} = 1/2\,V^1(-\lambda_3{\lambda_1}^2 + {\lambda_3}^2\lambda_2 - {\lambda_2}^3 + {\lambda_2}^2\lambda_3 - {\lambda_1}^2\lambda_2 + 2\,{\lambda_1}^3 - {\lambda_3}^3).$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что $\mathrm{rot}\,(w) \equiv 0$, а условие $\mathrm{div}\,(w) = 0$ имеет вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(w)_1 &= -1/2\, V^1 \lambda_1(-\lambda_3{\lambda_1}^2 + {\lambda_3}^2\lambda_2 - \\
&\quad - {\lambda_2}^3 + {\lambda_2}^2\lambda_3 - {\lambda_1}^2\lambda_2 + 2\,{\lambda_1}^3 - {\lambda_3}^3) = 0,\\
\mathrm{div}\,(w)_2 &= -1/2\, V^2 \lambda_2(-{\lambda_3}^2\lambda_1 - \lambda_3{\lambda_1}^2 - \\
&\quad - 2\,{\lambda_2}^3 + {\lambda_2}^2\lambda_3 + {\lambda_2}^2\lambda_1 + {\lambda_1}^3 + {\lambda_3}^3) = 0,\\
\mathrm{div}\,(w)_3 &= -1/2\, V^3 \lambda_3(-{\lambda_2}^2\lambda_1 - {\lambda_1}^2\lambda_2 - \\
&\quad - 2\,{\lambda_3}^3 + {\lambda_3}^2\lambda_2 + {\lambda_3}^2\lambda_1 + {\lambda_1}^3 + {\lambda_2}^3) = 0.
\end{aligned} \tag{16}$$

Полезным будет ввести обозначение

$$F(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = -2\lambda_i^3 + \lambda_i^2(\lambda_j + \lambda_k) + (\lambda_j + \lambda_k)(\lambda_j - \lambda_k)^2.$$

Заметим, что уравнение третьей степени (относительно λ_i)

$$F(\lambda_i, \lambda_j, \lambda_k) = 0$$

имеет только один действительный корень $\lambda_i = f(\lambda_j, \lambda_k)$, где функция $f(\lambda_j, \lambda_k)$ определена для любых значений структурных констант, за исключением случая $\lambda_j + \lambda_k = 0$, и задается равенством

$$6f(\lambda_j, \lambda_k) = (q + 12r)^{1/3} + (\lambda_j + \lambda_k) + \frac{(\lambda_j + \lambda_k)^2}{(q + 12r)^{1/3}},$$

где $q = (\lambda_j + \lambda_k)(55\lambda_j^2 - 106\lambda_j\lambda_k + 55\lambda_k^2)$, $r = |(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_j + \lambda_k)|\sqrt{3(7\lambda_j^2 - 13\lambda_j\lambda_k + 7\lambda_k^2)}$.

Применяя введенные обозначения, перепишем (16) в виде

$$\begin{aligned}
&V^1\lambda_1 F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0,\\
&V^2\lambda_2 F(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_1) = 0,\\
&V^3\lambda_3 F(\lambda_3, \lambda_1, \lambda_2)) = 0,
\end{aligned} \tag{17}$$

Решаем систему уравнений (17) совместно с условием (6) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$. Тем самым определим алгебры Ли и соответствующие им направления, для которых тензор w_{ij} является гармоническим.

Случай 1. $V^1 = 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$.

Получаем следующие решения:

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = 0, \quad V = (0, 0, \pm 1); \tag{18}$$

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = f(\lambda_1, \lambda_2), \quad V = (0, 0, \pm 1), \quad \lambda_1 \neq -\lambda_2, \quad f(\lambda_1, \lambda_2) \neq 0; \tag{19}$$

$$\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_2 = 0, \quad V = (0, \pm 1, 0); \tag{20}$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad V^2 \neq 0, \quad V = \big(0, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^2)^2}\big), \quad |V^2| < 1; \tag{21}$$

$$\lambda_1, \lambda_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_2 = f(\lambda_1, \lambda_3), \quad V = (0, \pm 1, 0), \quad \lambda_1 \neq -\lambda_3, \quad f(\lambda_1, \lambda_3) \neq 0; \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\lambda_1}{441}\, A((2\sqrt{249} - 45)\, A^2 - 147) \approx -3{,}184\lambda_1,\\
\lambda_3 &= \frac{\lambda_1}{882}\, ((2\sqrt{249} - 45)\, A^2 - 147\, A - 1323) \approx -3{,}092\lambda_1,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V = \left(0, V^2, \pm\sqrt{1-(V^2)^2}\right), \quad V^2 \neq 0, \quad |V^2| < 1,$$

где $A = \sqrt[3]{135 + 6\sqrt{2494}}$.

Пусть имеет место (18) или (20). Тогда алгебра Ли изоморфна $e(2)$ либо $e(1,1)$.

Если выполняется (19) или (22), то алгебра Ли имеет тип либо $su(2)$ (например, при $\lambda_1 = -1$, $\lambda_k = 3$, $f(\lambda_1, \lambda_k) \approx 2{,}901$, $k \in \{2,3\}$), либо $sl(2,R)$ (например, при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_k = 3$, $f(\lambda_1, \lambda_k) \approx 2{,}931$, $k \in \{2,3\}$).

Из (21) (соответственно (23)) заключаем, что алгебра Ли изоморфна трехмерной алгебре Гейзенберга h (соответственно $su(2)$).

Исследуем полученное множество направлений. Согласно (15), очевидно, получаем, что в каждом из случаев (18)–(23) квадрат длины вектора V равен 1.

Пусть теперь $\{V^k\}$ — гармонический вектор. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора $\{V^k\}$. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}(V)_{23} = -\operatorname{rot}(V)_{32} = V^1(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3) = 0\,. \tag{24}$$

Отсюда видно, что все направления (18)–(23) является гармоническими.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (18)–(23) помещаем в табл. 2 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Таблица 2

<table>
<tr><th>Знак $\|V\|^2$</th><th>Матрица структурных констант</th><th>Вектор</th><th>№</th></tr>
<tr><td colspan="4">$su(2)$</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 = 0$</td><td colspan="3">Не существует алгебры Ли данного типа</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$\|V\|^2 > 0$</td><td>$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}$,
$-\lambda_1, \lambda_2, f(\lambda_1,\lambda_2)$ одного знака,
$\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, f(\lambda_1,\lambda_2) \neq 0$</td><td>$(0,0,\pm 1)$ —
гармоническое направление</td><td>(19)</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_1,\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,
$-\lambda_1, \lambda_3, f(\lambda_1,\lambda_3)$ одного знака,
$\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_3, f(\lambda_1,\lambda_3) \neq 0$</td><td>$(0,\pm 1,0)$ —
гармоническое направление</td><td>(22)</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_1\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_2\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$</td><td>$\left(0, V^2, \pm\sqrt{1-(V^2)^2}\right)$,
$V^2 \neq 0, |V^2| < 1$ —
гармоническое направление</td><td>(23)</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 < 0$</td><td colspan="3">Не существует алгебры Ли данного типа</td></tr>
</table>

Продолжение табл. 2

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
	$sl(2,R)$		
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_4\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ не является гармоническим направлением	(32)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_4\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ не является гармоническим направлением	(36)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ не является гармоническим направлением	(35)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, V^2, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - (V^2)^2}\right)$ не является гармоническим направлением	(38)
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & f(\lambda_1,\lambda_2) \end{pmatrix}$, $-\lambda_1, \lambda_2, f(\lambda_1,\lambda_2)$ разных знаков, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_2, f(\lambda_1,\lambda_2) \neq 0$	$(0, 0, \pm 1)$ — гармоническое направление	(19)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & f(\lambda_1,\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $-\lambda_1, \lambda_3, f(\lambda_1,\lambda_3)$ разных знаков, $\lambda_1 + \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_1, \lambda_3, f(\lambda_1,\lambda_3) \neq 0$	$(0, \pm 1, 0)$ — гармоническое направление	(22)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_4\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(V^1, 0, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2}\right)$, $V^1 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ не является гармоническим направлением	(32)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_4\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^2 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(36)

Продолжение табл. 2

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^2 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(35)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, V^3\right)$, $V^1, V^2 \neq 0$, $V^3 = \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$ не является гармоническим направлением	(38)
$\|V\|^2 < 0$	$\begin{pmatrix} -f(\lambda_2, \lambda_3) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $-f(\lambda_2, \lambda_3), \lambda_2, \lambda_3$ разных знаков, $\lambda_2 + \lambda_3 \neq 0$, $\lambda_2, \lambda_3, f(\lambda_2, \lambda_3) \neq 0$	$(\pm 1, 0, 0)$ не является гармоническим направлением	(31)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3\lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & k_4\lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(V^1, 0, \pm\sqrt{1-(V^1)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(32)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^1 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ не является гармоническим направлением	(35)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$ не является гармоническим направлением	(38)

Продолжение табл. 2

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
	$e(2)$		
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ не является гармоническим направлением	(29)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, V^2, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - (V^2)^2}\right)$, $V^2 \neq 0$, $\|V^2\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ не является гармоническим направлением	(30)
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^2 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(29)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, V^3\right)$, $V^1, V^2 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$, $V^3 = \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}$ не является гармоническим направлением	(30)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_1\lambda_3 < 0$	$(0, \pm 1, 0)$ – гармоническое направление	(20)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1\lambda_2 < 0$	$(0, 0, \pm 1)$ – гармоническое направление	(18)
$\|V\|^2 < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_2\lambda_3 > 0$	$(\pm 1, 0, 0)$ не является гармоническим направлением	(25)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^1 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ не является гармоническим направлением	(29)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$ не является гармоническим направлением	(30)

Продолжение табл. 2

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
		$e(1,1)$	
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ — гармоническое направление	(33)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, V^2, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - (V^2)^2}, 0\right)$, $V^2 \neq 0$, $\|V^2\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — гармоническое направление	(34)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, V^2, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - (V^2)^2}, 0\right)$, $V^2 \neq 0$, $\|V^2\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — гармоническое направление	(37)
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_1\lambda_3 > 0$	$(0, \pm 1, 0)$ — гармоническое направление	(20)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_1\lambda_2 > 0$	$(0, 0, \pm 1)$ — гармоническое направление	(18)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^2 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ — гармоническое направление	(33)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, V^3\right)$, $V^1, V^2 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$, $V^3 = \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}$ — гармоническое направление	(34)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, V^3\right)$, $V^1, V^2 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2 + (V^2)^2 < 1$, $V^3 = \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}$ — гармоническое направление	(37)
$\|V\|^2 < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \lambda_2\lambda_3 < 0$	$(\pm 1, 0, 0)$ является гармоническим направлением при $\lambda_2 = -\lambda_3$	(25)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}, \lambda_1 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^1 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ — гармоническое направление	(33)

Окончание табл. 2

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^1)^2+(V^2)^2<1$ — гармоническое направление	(34)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^1)^2+(V^2)^2<1$ — гармоническое направление	(37)
		h	
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ не является гармоническим направлением	(26)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \neq 0$	$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ не является гармоническим направлением	(27)
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, 0, \pm\sqrt{1-(V^1)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — гармоническое направление	(26)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^2 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(27)
	$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_1 \neq 0$	$\left(0, V^2, \pm\sqrt{1-(V^2)^2}\right)$, $V^2 \neq 0$, $\|V^2\| < 1$ — гармоническое направление	(21)
$\|V\|^2 < 0$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 \neq 0$	$\left(V^1, 0, \pm\sqrt{1-(V^1)^2}\right)$, $V^1 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$ не является гармоническим направлением	(26)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, $\lambda_3 \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right)$, $V^1 \neq 0$, $\|V^1\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ не является гармоническим направлением	(27)

Здесь $k_1 = \frac{A((2\sqrt{249}-45)A^2-147)}{441} \approx -3{,}184$, $k_2 = \frac{(2\sqrt{249}-45)A^2-147A-1323}{882} \approx -3{,}092$, $k_3 = \frac{16B+(47-3\sqrt{249})B^2-32}{64} \approx 1{,}0298$, $k_4 = \frac{(47-3\sqrt{249})B^2+16B-160}{192} \approx -0{,}323$, где $A = \sqrt[3]{135+6\sqrt{2494}}$, $B = \sqrt[3]{188+12\sqrt{249}}$.

Случай 2. $V^1 \neq 0$, $\lambda_1 = 0$, $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq 0$.

Система уравнений (17), (6) в данном случае имеет следующие решения:

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V = (\pm 1, 0, 0); \tag{25}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 = 0, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V^1 \neq 0, \quad V = \left(V^1, 0, \pm\sqrt{1-(V^1)^2}\right), \quad |V^1| < 1; \tag{26}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V^2 \neq 0, \quad V = \left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right), \quad |V^2| < 1; \tag{27}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \quad V^1, V^2 \neq 0, \quad V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right), \quad |(V^1)^2 + (V^2)^2| < 1; \tag{28}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad V^2 \neq 0, \quad V = \left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right), \quad |V^2| < 1; \tag{29}$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right), \quad V^1, V^2 \neq 0, \quad |(V^1)^2 + (V^2)^2| < 1\,. \tag{30}$$

Алгебра Ли, соответствующая решению (25), изоморфна $e(2)$ или $e(1,1)$. А направление $V = (\pm 1, 0, 0)$ суть направление комплексной длины, так как $\|V\|^2 = -1$.

Пусть имеет место (26). Тогда алгебра Ли изоморфна трехмерной алгебре Гейзенберга h, а условие (15) эквивалентно равенству

$$\|V\|^2 = 1 - 2(V^1)^2.$$

Очевидно, что

$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow V^1 \in \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) \cup \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big);$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow V^1 \in \Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cup \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big).$$

Если выполняется (27), то соответствующая алгебра Ли имеет тип h, и квадрат длины вектора $V = \left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\right)$ задается равенством

$$\|V\|^2 = 2(V^2)^2 - 1\,.$$

Легко заметить, что

$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow V^2 \in \Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cup \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big);$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow V^2 \in \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) \cup \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big).$$

Если имеет место (29) или (30), то алгебра Ли изоморфна $e(2)$. Направление (29) было исследовано выше. Для направления $V = \Big(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\Big)$ из (15) находим

$$\|V\|^2 = 1 - 2(V^1)^2.$$

Ясно, что

$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow V^1 \in \Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\Big) \cup \Big(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big);$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow V^1 \in \Big(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\Big) \cup \Big(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\Big).$$

Алгебра Ли, соответствующая решению (28), изоморфна коммутативной алгебре R^3. Этот случай не представляет интереса, так как тензор w_{ij} тривиален.

Из (24), очевидно, следует, что ни одно из направлений (25)–(30) не является гармоническим.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (25)–(30) помещаем в табл. 2 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Случай 3. $V^1 \neq 0$, $\lambda_1 \neq 0$, $F(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$. В данном случае система уравнений (17), (6) имеет следующие решения:

$$\lambda_1 = f(\lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V = (\pm 1, 0, 0), \quad \lambda_2 \neq -\lambda_3, \quad f(\lambda_2, \lambda_3) \neq 0; \tag{31}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{64}\,(16\,B + (47 - 3\sqrt{249})\,B^2 - 32) \approx 1{,}0298\lambda_1; \tag{32}$$
$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{192}\,((47 - 3\sqrt{249})\,B^2 + 16\,B - 160) \approx -0{,}323\lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$
$$V = \big(V^1, 0, \pm\sqrt{1-(V^1)^2}\big), \quad |V^1| \in (0,1);$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_1, \quad |V^2| \in (0,1) \quad V = \big(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\big); \tag{33}$$

$$\lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_2 = 0, \quad \lambda_3 = \lambda_1, \quad V = \big(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\big), \tag{34}$$
$$V^1, V^2 \neq 0, \quad |(V^1)^2 + (V^2)^2| < 1;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \quad |V^2| \in (0,1), \quad V = \big(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\big); \tag{35}$$

$$\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{64}\,(16\,B + (47 - 3\sqrt{249})\,B^2 - 32) \approx 1{,}0298\lambda_1; \tag{36}$$
$$\lambda_3 = \frac{\lambda_1}{192}\,((47 - 3\sqrt{249})\,B^2 + 16\,B - 160) \approx -0{,}323\lambda_1, \quad \lambda_1 \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$
$$V = \big(\pm\sqrt{1-(V^2)^2}, V^2, 0\big), \quad |V^2| \in (0,1);$$

$$\lambda_1 = \lambda_2, \quad \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = 0, \qquad V = \big(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\big), \tag{37}$$
$$V^1, V^2 \neq 0, \quad |(V^1)^2 + (V^2)^2| < 1;$$

$$\lambda_1 = \lambda_2,\ \lambda_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \lambda_3 = \lambda_2, \qquad V = \big(V^1, V^2, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\big), \tag{38}$$
$$V^1, V^2 \neq 0, \quad |(V^1)^2 + (V^2)^2| < 1,$$

где $B = \sqrt[3]{188 + 12\sqrt{249}}$.

Если имеет место одно из решений: (31), (32), (35), (36) или (38), то алгебра Ли изоморфна алгебре $sl(2,R)$.

Если выполняется (33), (34) или (37), то алгебра Ли изоморфна алгебре $e(1,1)$.

Случаи квадратов длин направлений (31)–(38) были исследованы выше.

Для найденных алгебр и соответствующих им направлений (31)–(38) выделим те направления, которые являются гармоническими, т. е. удовлетворяют условию (24). Нетрудно заметить, что это направления (33), (34) и (37).

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (31)–(38) помещаем в табл. 2 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Пусть теперь характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни. Используя (2), находим символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{23}^2 = -\Gamma_{13}^1 = -\Gamma_{22}^3 = -\Gamma_{11}^3 = \beta,\\
&\Gamma_{12}^3 = -\Gamma_{13}^2 = -\Gamma_{21}^3 = -\Gamma_{23}^1 = \frac{1}{2}\lambda_3,\\
&\Gamma_{31}^2 = \Gamma_{32}^1 = \alpha - \frac{1}{2}\lambda_3,
\end{aligned}$$

Далее, учитывая (8), вычисляем дивергенцию тензора Схоутена – Вейля. Получаем, что $\mathrm{div}_1(S) = g^{it}S_{ijk;t} = 0$. Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в данном случае всегда имеет $\mathrm{div}_1(S) = 0$, и его компоненты задаются равенством (8).

Матрица формы Киллинга алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на базисных векторах в этом случае имеет вид (см. [8])

$$\begin{pmatrix} 2\lambda_3\alpha & -2\lambda_3\beta & 0 \\ -2\lambda_3\beta & -2\lambda_3\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta^2 - 2\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} -2(\alpha^2+\beta^2) & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda_3\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_3\sqrt{\alpha^2+\beta^2} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Форма Киллинга не является знакоопределенной, следовательно, группа Ли некомпактна с некомпактной алгеброй Ли $sl(2,\mathbb{R})$.

Замечание 4. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda_3(\alpha - \frac{1}{2}\lambda_3) & \beta(2\alpha-\lambda_3) & 0 \\ \beta(2\alpha-\lambda_3) & -\lambda_3(\alpha-\frac{1}{2}\lambda_3) & 0 \\ 0 & 0 & -2\beta^2 - \frac{1}{2}\lambda_3^2 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при указанных выше ограничениях метрика не является эйнштейновой.

Пусть тензор Схоутена – Вейля дополнительно удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S) = 0$. В данном случае получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(S)_{1121} = \mathrm{rot}(S)_{1323} = \mathrm{rot}(S)_{2122} = \mathrm{rot}(S)_{2313} = \\
&\qquad = -\,\mathrm{rot}(S)_{1211} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1233} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2212} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2133} = \\
&\qquad\qquad = 7/4\,\beta\,{\lambda_3}^3 - 1/2\,\beta\,{\lambda_3}^2\alpha + 6\,\beta^3\alpha + \lambda_3\beta^3 - 2\,\lambda_3\beta\,\alpha^2 = 0, \\
&\mathrm{rot}(S)_{1212} = \mathrm{rot}(S)_{1133} = \mathrm{rot}(S)_{2122} = \mathrm{rot}(S)_{2323} = \\
&\qquad = -\,\mathrm{rot}(S)_{1122} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1313} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2211} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2233} = \\
&\qquad = 3/4\,{\lambda_3}^4 - 3/4\,{\lambda_3}^3\alpha + \beta^2\lambda_3\alpha - 2\,\beta^4 - 1/2\,\beta^2{\lambda_3}^2 + 4\,\beta^2\alpha^2 = 0, \\
&\mathrm{rot}(S)_{3312} = \mathrm{rot}(S)_{3321} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3132} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3231} = \\
&\qquad\qquad = 1/2\,\beta\,\left(-{\lambda_3}^2 - 4\,\lambda_3\alpha + 8\,\alpha^2 - 4\,\beta^2\right)(-\lambda_3 + 2\,\alpha) = 0\,. \qquad (40)
\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (40) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$, находим все трехмерные унимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни, и тензор Схоутена–Вейля удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S) = 0$. Учитывая, что $\beta \neq 0$, получаем следующее решение:

$$\lambda_3 = -2\alpha, \beta = \pm\sqrt{3}\alpha, \quad \alpha \neq 0. \qquad (41)$$

Матрица формы Киллинга (39) алгебры Ли $\mathfrak{g}$ примет вид

$$\begin{pmatrix} -8\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 8\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что форма Киллинга не является знакоопределенной. Следовательно, группа Ли некомпактна с некомпактной алгеброй Ли $sl(2,\mathbb{R})$.

Найденное решение (41) для наглядности помещаем в пятую строку табл. 1.

Непосредственно проверяется, что для полученного решения тензор Схоутена–Вейля (8) тривиален.

Замечание 5. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} -4\alpha^2 & \pm4\sqrt{3}\alpha^2 & 0 \\ \pm4\sqrt{3}\alpha^2 & 4\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & -8\alpha^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае эйнштейновых метрик нет.

Находим компоненты дивергенции второго типа тензора Схоутена–Вейля и решаем систему уравнений $\mathrm{div}_2(S) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_2(S)_{11} = -\,\mathrm{div}_2(S)_{22} = 2\,\mathrm{div}_2(S)_{33} = 3/4\,{\lambda_3}^4 - 3/4\,{\lambda_3}^3\alpha + \beta^2\lambda_3\alpha - \\
&\qquad\qquad - 2\,\beta^4 - 1/2\,\beta^2{\lambda_3}^2 + 4\,\beta^2\alpha^2 = 0, \\
&\mathrm{div}_2(S)_{12} = \mathrm{div}_2(S)_{21} = 1/4\,\beta\,(5\,{\lambda_3}^3 - 6\,{\lambda_3}^2\alpha + 40\,\beta^2\alpha - 4\,\beta^2\lambda_3 + \\
&\qquad\qquad + 24\,\lambda_3\alpha^2 - 32\,\alpha^3) = 0.
\end{aligned}$$

Получаем, что решения данной системы уравнений совпадают с решениями системы $\operatorname{rot}(S) = 0$. Тем самым решен вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в случае комплексно сопряженных корней характеристического уравнения.

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$\begin{aligned}
w_{12} = -w_{21} &= V^3\left(\lambda_3{}^3 - \lambda_3{}^2\alpha + 4\,\beta^2\alpha\right),\\
w_{13} = -w_{31} &= V^1(-1/2\,\beta\,\lambda_3{}^2 - 2\,\beta\,\lambda_3\alpha + 4\,\beta\,\alpha^2 -\\
&\qquad - 2\,\beta^3) + V^2(1/2\,\lambda_3{}^3 - 1/2\,\lambda_3{}^2\alpha + 2\,\beta^2\alpha),\\
w_{23} = -w_{32} &= V^1(-1/2\,\lambda_3{}^3 + 1/2\,\lambda_3{}^2\alpha - 2\,\beta^2\alpha) +\\
&\qquad + V^2(-1/2\,\beta\,\lambda_3{}^2 - 2\,\beta\,\lambda_3\alpha + 4\,\beta\,\alpha^2 - 2\,\beta^3)\,.
\end{aligned}$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что условия $\operatorname{rot}(w) = 0$, $\operatorname{div}(w) = 0$ равносильны системе уравнений вида

$$\begin{aligned}
2\operatorname{div}(w)_1 &= V^2(\beta\,\lambda_3{}^3 + 8\,\beta^3\alpha + 4\,\lambda_3\beta\,\alpha^2 - 8\,\beta\,\alpha^3) +\\
&\quad + V^1(12\,\beta^2\alpha^2 - 4\,\beta^4 - \beta^2\lambda_3{}^2 - 4\,\beta^2\lambda_3\alpha + \lambda_3{}^3\alpha - \lambda_3{}^2\alpha^2) = 0,\\
2\operatorname{div}(w)_2 &= V^1(\beta\,\lambda_3{}^3 + 4\,\lambda_3\beta\,\alpha^2 + 8\,\beta^3\alpha - 8\,\beta\,\alpha^3) +\\
&\quad + V^2(-\lambda_3{}^3\alpha + 4\,\lambda_3\beta^2\alpha + \beta^2\lambda_3{}^2 - 12\,\beta^2\alpha^2 + 4\,\beta^4 + \lambda_3{}^2\alpha^2) = 0,\\
\operatorname{div}(w)_3 &= V^3\left(\lambda_3{}^3 - \lambda_3{}^2\alpha + 4\,\beta^2\alpha\right)\lambda_3 = 0\,.
\end{aligned} \tag{42}$$

Гармонический тензор w_{ij} определяется системой уравнений (42) совместно с условием (6) и ограничением на структурные константы $\beta \neq 0$, т. е. системой уравнений вида

$$\begin{aligned}
&2\operatorname{div}(w)_1 = V^2(\beta\,\lambda_3{}^3 + 8\,\beta^3\alpha + 4\,\lambda_3\beta\,\alpha^2 - 8\,\beta\,\alpha^3) +\\
&\qquad + V^1(12\,\beta^2\alpha^2 - 4\,\beta^4 - \beta^2\lambda_3{}^2 - 4\,\beta^2\lambda_3\alpha + \lambda_3{}^3\alpha - \lambda_3{}^2\alpha^2) = 0,\\
&2\operatorname{div}(w)_2 = V^1(\beta\,\lambda_3{}^3 + 4\,\lambda_3\beta\,\alpha^2 + 8\,\beta^3\alpha - 8\,\beta\,\alpha^3) +\\
&\qquad + V^2(-\lambda_3{}^3\alpha + 4\,\lambda_3\beta^2\alpha + \beta^2\lambda_3{}^2 - 12\,\beta^2\alpha^2 + 4\,\beta^4 + \lambda_3{}^2\alpha^2) = 0,\\
&\operatorname{div}(w)_3 = V^3\left(\lambda_3{}^3 - \lambda_3{}^2\alpha + 4\,\beta^2\alpha\right)\lambda_3 = 0,\\
&(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = 1,\\
&\beta \neq 0.
\end{aligned}$$

Решаем данную систему уравнений относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$.

Случай 1. $V^3 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$, $\left(\lambda_3{}^3 - \lambda_3{}^2\alpha + 4\,\beta^2\alpha\right) \neq 0$.

Получаем одно решение:

$$\lambda_3 = 0, \quad V = (0, 0, \pm 1), \quad \alpha, \beta \neq 0. \tag{43}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая полученному набору структурных констант, есть некомпактная алгебра типа $e(1,1)$. Квадрат длины вектора V определяется равенством (15), и в данном случае равен 1.

Аналогично случаю действительных корней характеристического уравнения проверим, является ли данное направление гармоническим. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора V^k. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}(V)_{23} = -\operatorname{rot}(V)_{32} = 2V^2\beta - V^1\lambda_3 = 0. \tag{44}$$

Отсюда видно, что направление $V = (0, 0, \pm 1)$ является гармоническим.

Найденное решение (43) помещаем в табл. 3 под тем же номером в соответствии с типом алгебры и знаком квадрата длины вектора V.

Случай 2. $\lambda_3 \neq 0$, $V^3 \neq 0$, $\left(\lambda_3{}^3 - \lambda_3{}^2\alpha + 4\,\beta^2\alpha\right) = 0$.

Имеются следующие решения:

$$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad \beta = \pm\sqrt{3}\alpha, \quad \lambda_3 = -2\alpha, \quad V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right), \tag{45}$$

$$|(V^1)^2 + (V^2)^2| \leq 1;$$

$$\alpha = \frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^2 - 4\beta^2}, \quad \beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, \quad V = (0, 0, \pm 1), \quad \lambda_3 \notin \{0, \pm 2\beta\}. \tag{46}$$

Алгебра Ли $\mathfrak{g}$, соответствующая наборам структурных констант (45)–(46), есть некомпактная алгебра типа $sl(2, R)$.

Для направления (45) из (15) находим

$$\|V\|^2 = 1 - 2(V^1)^2.$$

Очевидно, что

$$\|V\|^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; V^1 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; V^1 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$

$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; V^1 \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right].$$

Также из (44) легко получить, что данное направление является гармоническим при

$$V^1 = \pm\sqrt{3}V^2.$$

Причем знак «+» соответствует значению $\beta = -\sqrt{3}\alpha$, а «−» соответствует значению $\beta = \sqrt{3}\alpha$.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (45)–(46) помещаем в табл. 3 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $\operatorname{div}_1(S) \equiv 0$. *Если дополнительно выполнено условие* $\operatorname{rot}(S) = 0$, *то алгебра Ли* $\mathfrak{g}$ *группы G входит в табл.* 1.

2. *Из того, что* $\operatorname{div}_2(S) = 0$, *следует тривиальность тензора Схоутена–Вейля, а матрица структурных констант ее алгебры Ли* $\mathfrak{g}$ *группы G входит в табл.* 1.

Таблица 3

<table>
<tr><th>Знак $\|V\|^2$</th><th>Матрица структурных констант</th><th>Вектор</th><th>№</th></tr>
<tr><td colspan="4">$sl(2,R)$</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 = 0$</td><td>$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$,
$\beta = \pm\sqrt{3}\alpha$, $\alpha \neq 0$</td><td>$\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, V^2, \pm\sqrt{\frac{1}{2} - (V^2)^2}\right)$,
$|V^2| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ —
гармоническое направление</td><td>(45)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$\|V\|^2 > 0$</td><td>$\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^2 - 4\beta^2} & \beta & 0 \\ \beta & \frac{\lambda_3^3}{\lambda_3^2 - 4\beta^2} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$,
$\beta \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0, \pm 2\beta$</td><td>$(0, 0, \pm 1)$ —
гармоническое направление</td><td>(46)</td></tr>
<tr><td>$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$,
$\beta = \pm\sqrt{3}\alpha$, $\alpha \neq 0$</td><td>$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right)$,
$(V^1)^2 + (V^2)^2 \leq 1$,
$V^1 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ —
гармоническое направление</td><td>(45)</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 < 0$</td><td>$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha \end{pmatrix}$,
$\beta = \pm\sqrt{3}\alpha$, $\alpha \neq 0$</td><td>$\left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right)$,
$V^1 \in \left[-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$.
Направление является гармоническим в следующих случаях:
1) $\beta = \sqrt{3}\alpha$, $V^2 = -\frac{V^1}{\sqrt{3}}$,
$V^1 \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$
2) $\beta = -\sqrt{3}\alpha$, $V^2 = \frac{V^1}{\sqrt{3}}$,
$V^1 \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$</td><td>(45)</td></tr>
<tr><td colspan="4">$e(1,1)$</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 = 0$</td><td colspan="3">Не существует алгебры Ли данного типа</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 > 0$</td><td>$\begin{pmatrix} -\alpha & \beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\alpha, \beta \neq 0$</td><td>$(0, 0, \pm 1)$ —
гармоническое направление</td><td>(43)</td></tr>
<tr><td>$\|V\|^2 < 0$</td><td colspan="3">Не существует алгебры Ли данного типа</td></tr>
</table>

Теорема 2. *Пусть G — трехмерная унимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\{V^k\}$ — произвольный вектор, такой что $(V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = 1$, $w_{ij} = V^k S_{kij}$ — гармонический тензор, где S_{kij} — тензор Схоутена–Вейля. Тогда если корни характеристического уравнения вещественны, то структурные константы алгебры Ли группы G и компоненты вектора $\{V^k\}$ содержатся в табл. 2. Если характеристическое уравнение имеет комплексно сопряженные корни, то структурные константы алгебры Ли группы G и компоненты вектора $\{V^k\}$ содержатся в табл. 3.*

3. Гармонические тензоры на трехмерных неунимодулярных группах Ли

Пусть далее G — трехмерная неунимодулярная группа Ли.

Случай A

Вычислим компоненты дивергенции тензора Схоутена–Вейля. Применяя (2), найдем символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}
&\Gamma^1_{13} = \Gamma^3_{11} = \lambda \sin(\varphi),\\
&\Gamma^3_{12} = \Gamma^3_{21} = \Gamma^2_{13} = \Gamma^1_{23} = \frac{1}{2}(\lambda - \mu)\cos(\varphi),\\
&\Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{22} = \mu \sin(\varphi),\\
&\Gamma^2_{31} = -\Gamma^1_{32} = \frac{1}{2}(\lambda + \mu)\cos(\varphi).
\end{aligned}$$

Свертывая по индексам i, t в равенстве (3) и принимая во внимание вид метрического тензора, получим $\mathrm{div}_1(S) = g^{it} S_{ijk;t} \equiv 0$. Следовательно, тензор Схоутена–Вейля в случае A всегда имеет тривиальную дивергенцию I типа, $\mathrm{div}_1(S) = 0$. Сам тензор, вообще говоря, ненулевой, и его компоненты задаются равенством (9).

Замечание 6. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\begin{aligned}
&R_{11} = \Big(\frac{1}{2}\mu^2 - \lambda\mu - \frac{3}{2}\lambda^2\Big)\cos^2(\varphi) + \lambda\mu + \lambda^2,\\
&R_{12} = (\lambda^2 - \mu^2)\sin(\varphi)\cos(\varphi),\\
&R_{22} = \Big(\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda\mu - \frac{3}{2}\mu^2\Big)\cos^2(\varphi) + \lambda\mu + \mu^2,\\
&R_{33} = \frac{1}{2}(\mu + \lambda)^2\cos^2(\varphi) - \lambda^2 - \mu^2.
\end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что при ограничениях $\lambda + \mu \neq 0$, $\varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ метрика является эйнштейновой тогда и только тогда, когда $\lambda = \mu$, а константа Эйнштейна отлична от нуля и равна $2\lambda^2 \sin^2(\varphi)$.

Пусть теперь тензор Схоутена–Вейля дополнительно удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S) = 0$, т. е. тензор Схоутена–Вейля является почти гармоническим. В данном случае имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(S)_{1211} = \mathrm{rot}(S)_{1233} = \mathrm{rot}(S)_{2122} = \mathrm{rot}(S)_{2133} =\\
&\qquad = -\,\mathrm{rot}(S)_{1121} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1323} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2212} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2313} =\\
&\qquad = 1/4\,\sin(\varphi)\cos(\varphi)(8\,\lambda^3\mu - 8\,\lambda\,\mu^3 + 6\,\lambda\,\cos^2(\varphi)\mu^3 - 6\,\lambda^3\cos^2(\varphi)\mu -
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 3\lambda^4\cos^2(\varphi) + 3\mu^4\cos^2(\varphi)) = 0,\\
&\operatorname{rot}(S)_{1212} = \operatorname{rot}(S)_{1313} = -\operatorname{rot}(S)_{1122} = -\operatorname{rot}(S)_{1133} =\\
&\quad = 3/2\cos^4(\varphi)\lambda\mu^3 - 3/2\cos^4(\varphi)\lambda^3\mu - 3/4\lambda^4\cos^4(\varphi) + 3/4\mu^4\cos^4(\varphi) +\\
&\qquad + 11/4\lambda^3\cos^2(\varphi)\mu - 3/4\lambda^2\cos^2(\varphi)\mu^2 - 11/4\lambda\cos^2(\varphi)\mu^3 +\\
&\qquad\qquad + 3/4\lambda^4\cos^2(\varphi) - \lambda^3\mu + \mu^2\lambda^2 = 0,\\
&\operatorname{rot}(S)_{2211} = \operatorname{rot}(S)_{2233} = -\operatorname{rot}(S)_{2121} = -\operatorname{rot}(S)_{2323} =\\
&\quad = 3/2\cos^4(\varphi)\lambda\mu^3 - 3/2\cos^4(\varphi)\lambda^3\mu - 3/4\lambda^4\cos^4(\varphi) + 3/4\mu^4\cos^4(\varphi) -\\
&\qquad - 11/4\lambda\cos^2(\varphi)\mu^3 - 3/4\mu^4 + 3/4\lambda^2\cos^2(\varphi)\mu^2 +\\
&\qquad\qquad + 11/4\lambda^3\cos^2(\varphi)\mu - \mu^2\lambda^2 + \lambda\mu^3 = 0,\\
&\operatorname{rot}(S)_{3131} = \operatorname{rot}(S)_{3322} = -\operatorname{rot}(S)_{3311} = -\operatorname{rot}(S)_{3232} =\\
&\quad = 1/4\cos^2(\varphi)(6\mu^4\cos^2(\varphi) + 12\lambda\cos^2(\varphi)\mu^3 - 12\lambda^3\cos^2(\varphi)\mu -\\
&\qquad - 6\lambda^4\cos^2(\varphi) - 10\lambda\mu^3 - 3\mu^4 + 10\lambda^3\mu + 3\lambda^4) = 0,\\
&\operatorname{rot}(S)_{3312} = \operatorname{rot}(S)_{3321} = -\operatorname{rot}(S)_{3132} = -\operatorname{rot}(S)_{3231} =\\
&\quad = 1/2\sin(\varphi)\cos(\varphi)(-6\lambda^3\cos^2(\varphi)\mu - 3\lambda^4\cos^2(\varphi) +\\
&\qquad + 6\lambda\cos^2(\varphi)\mu^3 + 3\mu^4\cos^2(\varphi) - 2\lambda\mu^3 + 2\lambda^3\mu) = 0.
\end{aligned}
\tag{47}
$$

Решаем систему уравнений (47) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Находим в случае A все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых тензор Схоутена–Вейля является почти гармоническим.

Данная система уравнений имеет три решения:

$$
\begin{aligned}
&\lambda = \mu, \quad \varphi = \varphi, \quad \mu = \mu, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi \neq \pi k,\ k \in \mathbb{Z};\\
&\lambda = \lambda, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = 0, \quad \lambda \neq 0;\\
&\lambda = 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \mu = \mu, \quad \mu \neq 0.
\end{aligned}
$$

Помещаем данные решения соответственно в строки 1–3 табл. 4.

Замечание 7. Легко проверить, что тензор Схоутена–Вейля (9) тривиален для каждого решения системы (47), а компоненты тензора Риччи соответственно имеют вид

$$
\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} 2\lambda^2\sin(\varphi) & 0 & 0\\ 0 & 2\lambda^2\sin(\varphi) & 0\\ 0 & 0 & -2\lambda^2\sin(\varphi)\end{pmatrix},
$$

$$
\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\lambda^2\end{pmatrix}, \quad \|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & \mu^2 & 0\\ 0 & 0 & -\mu^2\end{pmatrix}.
$$

Нетрудно проверить, что для первого решения метрика является эйнштейновой, а константа Эйнштейна отлична от нуля и равна $2\lambda^2\sin(\varphi)$. Для других решений метрика не является эйнштейновой.

Таблица 4

	№	Матрица структурных констант	Метрический тензор
A	1	$\begin{pmatrix} \lambda\cos(\varphi) & \lambda\sin(\varphi) & 0 \\ -\lambda\sin(\varphi) & \lambda\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0, \quad \varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
	2	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \lambda \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
	3	$\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \mu \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
B	4	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q \neq t$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
C.1	5	$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, q \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	6	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
	7	$\begin{pmatrix} p & -s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, s \neq 0$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
C.2	Тензор Схоутена – Вейля не является почти гармоническим ни для одной алгебры данного типа		

Вычислим компоненты дивергенции II типа тензора Схоутена – Вейля и решим систему уравнений $\operatorname{div}_2(S) = 0$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}_2(S)_{11} &= 1/4\,(\lambda-\mu)(9\cos^4(\varphi)(\lambda+\mu)^3 - 3\cos^2(\varphi)(\lambda^3 + 8\,\mu\,\lambda^2 + \\
&\qquad + 9\,\mu^2\lambda + 2\,\mu^3) + 4\,\lambda\,\mu^2) = 0, \\
\operatorname{div}_2(S)_{12} &= \operatorname{div}_2(S)_{21} = 3/4\,\sin(\varphi)\cos(\varphi)(\lambda^2-\mu^2)(4\,\lambda\,\mu - 3\cos^2(\varphi)(\lambda+\mu)^2) = 0, \\
\operatorname{div}_2(S)_{22} &= -1/4\,(\lambda-\mu)(9\cos^4(\varphi)(\lambda+\mu)^3 - 3\cos^2(\varphi)(\lambda^3 + \\
&\qquad + 9\,\mu\,\lambda^2 + 8\,\mu^2\lambda + \mu^3) + 4\,\lambda^2\mu) = 0, \\
\operatorname{div}_2(S)_{33} &= 1/4\,(\lambda-\mu)^2(3\cos^2(\varphi)(\lambda+\mu)^2 - 4\,\lambda\,\mu) = 0.
\end{aligned}$$

Получаем, что решения данной системы уравнений совпадают с решениями системы $\operatorname{rot}(S) = 0$. Тем самым решен вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в рассматриваемом случае A.

Применяя (5), нетрудно заметить, что квадрат длины вектора V в данном случае определяется формулой

$$\|V\|^2 = (V^1)^2 + (V^2)^2 - (V^3)^2. \tag{48}$$

Кроме того, полагаем, что компоненты вектора V удовлетворяют равенству (6).

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$\begin{aligned}
&w_{21} = -w_{12} = 1/2\, V^3\, (\lambda - \mu) \cos(\varphi) \left(\lambda^2 - \mu^2\right),\\
&w_{13} = -w_{31} = 1/2\, V^1 \sin(\varphi)(3\,(\lambda^2\mu + \lambda^3 - \mu^3 - \mu^2\lambda) \cos^2(\varphi) + 2\,\lambda\,\mu^2 - 2\,\lambda^2\mu) +\\
&\qquad + 1/2\, V^2 \cos(\varphi)(3\,(\lambda^2\mu + \lambda^3 - \mu^3 - \mu^2\lambda) \cos^2(\varphi) + 4\,\lambda\,\mu^2 + \mu^3 - 2\,\lambda^3 - 3\,\lambda^2\mu),\\
&w_{23} = -w_{32} = -1/2\, V^2 \sin(\varphi)(3\,(\lambda^2\mu + \lambda^3 - \mu^3 - -\mu^2\lambda) \cos^2(\varphi) + 2\,\lambda\,\mu^2 - 2\,\lambda^2\mu) +\\
&\qquad + 1/2\, V^1 \cos(\varphi)(3\,(\lambda^2\mu + \lambda^3 - \mu^3 - \mu^2\lambda) \cos^2(\varphi) + 3\,\lambda\,\mu^2 + 2\,\mu^3 - \lambda^3 - 4\,\lambda^2\mu).
\end{aligned}$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что условия $\operatorname{rot}(w) = 0$, $\operatorname{div}(w) = 0$ равносильны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(w)_{132} = \operatorname{rot}(w)_{321} = \operatorname{rot}(w)_{213} = -\operatorname{rot}(w)_{123} = -\operatorname{rot}(w)_{231} =\\
&\qquad = -\operatorname{rot}(w)_{312} = 1/2\, \sin(\varphi)\cos(\varphi) V^3 (\lambda - \mu)^2 (\lambda + \mu)^2 = 0,\\
&\operatorname{div}(w)_1 = 1/2\,(\lambda - \mu)(V^1[2\lambda\mu^2 - \cos^2(\varphi)(\lambda + \mu)(\lambda^2 + 7\lambda\mu + 3\mu^2) +\\
&\qquad + 3\,(\lambda + \mu)^3 \cos^4(\varphi)] - V^2(\lambda + \mu)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \times\\
&\qquad \times [\mu^2 + 4\,\lambda\mu - 3\,\cos^2(\varphi)(\lambda + \mu)^2]) = 0,\\
&\operatorname{div}(w)_2 = 1/2\,(\mu - \lambda)(V^2[2\lambda^2\mu - \cos^2(\varphi)(\lambda + \mu)(3\lambda^2 + 7\lambda\mu + \mu^2) +\\
&\qquad + 3\,(\lambda + \mu)^3 \cos^4(\varphi)] - V^1(\lambda + \mu)\sin(\varphi)\cos(\varphi) \times\\
&\qquad \times [\lambda^2 + 4\,\lambda\mu - 3\,\cos^2(\varphi)(\lambda + \mu)^2]) = 0.
\end{aligned} \tag{49}$$

Решаем совместно систему уравнений (6) и (49) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$. Тем самым определим алгебры Ли и соответствующие им направления, для которых тензор w_{ij} является гармоническим. Учитывая, что $\varphi \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ и $\lambda + \mu \neq 0$, получаем следующие решения:

$$\lambda = \mu, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad V^3 \neq 0,$$
$$V = \left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2 - (V^3)^2}, V^2, V^3\right); \tag{50}$$

$$\lambda = 0, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad V^3 \neq 0,$$
$$V = \left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2 - (V^3)^2}, V^2, V^3\right); \tag{51}$$

$$\lambda \neq \pm\mu, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad V = (0, 0, \pm 1); \tag{52}$$

$$\mu = 0, \quad \lambda \neq 0, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad V^3 \neq 0,$$
$$V = \left(\pm\sqrt{1 - (V^2)^2 - (V^3)^2}, V^2, V^3\right); \tag{53}$$

$$\mu = 0, \quad V^1 = \frac{3\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}}, \quad V^2 = \frac{2 - 3\sin^2(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}}, \quad V^3 = 0,$$
$$\lambda \neq 0, \quad \varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}\}; \tag{54}$$

$$\lambda = 0, \quad V^1 = \frac{2 - 3\sin^2(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}}, \quad V^2 = \frac{3\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}}, \quad V^3 = 0,$$
$$\mu \neq 0, \quad \varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in \mathbb{Z}\}; \tag{55}$$

$$\lambda = 0, \quad \mu \neq 0, \quad \varphi = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad V = (0, \pm 1, 0)\,. \tag{56}$$

Исследуем полученное множество направлений. Согласно (48), очевидно, получаем, что в каждом из случаев (50)–(53) квадрат длины вектора V определяется равенством

$$\|V\|^2 = 1 - 2(V^3)^2.$$

Очевидно, что

$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^3 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow V^3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right);$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow V^3 \in \left(-1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right).$$

Также из (48) находим для решения (52), что квадрат длины вектора V равен -1, а в каждом из случаев (54)–(56) выполняется $\|V\|^2 = 1$.

Пусть далее вектор V^k — гармонический вектор. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора V^k. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны уравнению

$$\operatorname{rot}(V)_{21} = -\operatorname{rot}(V)_{12} = V^3 \cos(\varphi)(\lambda + \mu) = 0.$$

Отсюда видно, что направления (51)–(56) являются гармоническими.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (50)–(56) помещаем в табл. 5 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Случай B

Вычислим компоненты дивергенции тензора Схоутена – Вейля. Применяя (2), находим символы Кристоффеля:

$$\Gamma^3_{23} = \Gamma^2_{31} = \Gamma^3_{32} = -\Gamma^1_{12} = -\Gamma^2_{13} = -\Gamma^1_{21} = \frac{s}{2},$$
$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^2_{23} = q,$$
$$\Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{33} = -p,$$
$$\Gamma^3_{33} = -\Gamma^1_{31} = t.$$

Используя найденные значения символов Кристоффеля и (10), получаем $\operatorname{div}_1(S) = g^{it} S_{ijk;t} \equiv 0$. Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в случае B всегда имеет $\operatorname{div}_1(S) = 0$. Сам тензор, вообще говоря, ненулевой, и его компоненты задаются равенством (10).

Таблица 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
		А	
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} \mu\cos\varphi & \mu\sin\varphi & 0 \\ -\mu\sin\varphi & \mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\mu \neq 0$	$(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ не является гармоническим направлением	(50)
	$\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$	$(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ — гармоническое направление	(51)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$,	$(0, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$ — гармоническое направление	(53)
$\|V\|^2 > 0$	$\begin{pmatrix} \mu\cos\varphi & \mu\sin\varphi & 0 \\ -\mu\sin\varphi & \mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\mu \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ не является гармоническим направлением	(50)
	$\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ — гармоническое направление	(51)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$,	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ — гармоническое направление	(53)
	$\begin{pmatrix} \lambda\cos\varphi & 0 & 0 \\ -\lambda\sin\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\lambda \neq 0$,	$\left(\frac{3\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}}, \frac{2-3\sin^2(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}}, 0\right)$– гармоническое направление	(54)
	$\begin{pmatrix} 0 & \mu\sin\varphi & 0 \\ 0 & \mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k \mid k\in\mathbb{Z}\}$, $\mu \neq 0$,	$\left(\frac{2-3\sin^2(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}}, \frac{3\cos(\varphi)\sin(\varphi)}{\sqrt{4\cos^2(\varphi)+\sin^2(\varphi)}}, 0\right)$– гармоническое направление	(55) (56)

Продолжение табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2 < 0$	$\begin{pmatrix} \mu\cos\varphi & \mu\sin\varphi & 0 \\ -\mu\sin\varphi & \mu\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \notin \{\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k \,\vert\, k \in \mathbb{Z}\}$, $\mu \neq 0$,	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ не является гармоническим направлением	(50)
	$\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\mu \neq 0$	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ — гармоническое направление	(51)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq 0$,	$\left(\pm\sqrt{1-(V^2)^2-(V^3)^2}, V^2, V^3\right)$, $V^3 \in \left(-1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$, $(V^2)^2+(V^3)^2 \leq 1$ — гармоническое направление	(53)
	$\begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \\ -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\lambda \neq \pm\mu$,	$(0,0,\pm 1)$ — гармоническое направление	(52)
		B	
$\|V\|^2 = 0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t \neq \pm q$	$\left(V^1, \pm\sqrt{-2V^3(V^3-1)}, V^3\right)$, $V^1+V^3=1$, $V^3 \in (0,1)$. Направление является гармоническим при $p=\frac{V^2}{V^3}q$, $t=0$	(59)
	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t \neq \pm q$	$\left(V^1, \pm\sqrt{-2V^3(V^3+1)}, V^3\right)$, $V^1+V^3=-1$, $V^3 \in (-1,0)$. Направление является гармоническим при $p=\frac{V^2}{V^3}q$, $t=0$	(59)
	$\begin{pmatrix} \frac{(V^2)^2}{(V^3)^2}s & \frac{V^2}{V^3}s & 0 \\ -\frac{V^2}{V^3}s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$	$\left(V^1, \pm\sqrt{-2V^3(V^3-1)}, V^3\right)$, $V^1+V^3=1$, $V^3 \in (0,1)$ не является гармоническим направлением	(60)
	$\begin{pmatrix} \frac{(V^2)^2}{(V^3)^2}s & \frac{V^2}{V^3}s & 0 \\ -\frac{V^2}{V^3}s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s \neq 0$	$\left(V^1, \pm\sqrt{-2V^3(V^3+1)}, V^3\right)$, $V^1+V^3=-1$, $V^3 \in (-1,0)$ не является гармоническим направлением	(60)
	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s \neq 0, t \neq \pm q$	$(\pm 1, 0, 0)$ не является гармоническим направлением	(61)

Продолжение табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2>0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t\neq\pm q$	$\left(V^1,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2},V^3\right)$, $\|V^1+V^3\|<1$, $(V^2)^2+(V^3)^2<1$. Направление является гармоническим при $p=\frac{V^2}{V^3}q$, $t=0$	(59)
	$\begin{pmatrix} \frac{(V^2)^2}{(V^3)^2}s & \frac{V^2}{V^3}s & 0 \\ -\frac{V^2}{V^3}s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s\neq 0$	$\left(V^1,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2},V^3\right)$, $\|V^1+V^3\|<1$, $(V^2)^2+(V^3)^2<1$ не является гармоническим направлением	(60)
$\|V\|^2<0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t\neq\pm q$	$\left(V^1,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2},V^3\right)$, $\|V^1+V^3\|>1$, $(V^2)^2+(V^3)^2<1$. Направление является гармоническим при $p=\frac{V^2}{V^3}q$, $t=0$	(59)
	$\begin{pmatrix} \frac{(V^2)^2}{(V^3)^2}s & \frac{V^2}{V^3}s & 0 \\ -\frac{V^2}{V^3}s & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s\neq 0$	$\left(V^1,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2},V^3\right)$, $\|V^1+V^3\|>1$, $(V^2)^2+(V^3)^2<1$ не является гармоническим направлением	(59)
C1			
$\|V\|^2=0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p,q\neq 0$	$\left(V^1,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}-(V^1)^2}\right)$, $\|V^1\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Направление является гармоническим при $V^1=0$	(66)
	$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $q\neq 0$	$\left(V^1,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}-(V^1)^2}\right)$, $\|V^1\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$— гармоническое направление	(67)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s\neq 0$	$\left(V^1,\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\sqrt{\frac{1}{2}-(V^1)^2}\right)$, $\|V^1\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$. Направление является гармоническим при $V^1=0$	(69)
	$\begin{pmatrix} p & -(7+4\sqrt{3})s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=(2+\sqrt{3})s$, $s\neq 0$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ не является гармоническим направлением	(70)

Продолжение табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2=0$	$\begin{pmatrix} p & -(7-4\sqrt{3})s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=(2-\sqrt{3})s$, $s\neq 0$	$(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ не является гармоническим направлением	(70)
	$\begin{pmatrix} p & -(7+4\sqrt{3})s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=-(2+\sqrt{3})s$, $s\neq 0$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ не является гармоническим направлением	(70)
	$\begin{pmatrix} p & -(7-4\sqrt{3})s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=-(2-\sqrt{3})s$, $s\neq 0$	$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0)$ не является гармоническим направлением	(70)
$\|V\|^2>0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p,q\neq 0$	$\left(V^1,V^2,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $\|V^2\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2+(V^2)^2<1$. Направление является гармоническим при $V^1=0$	(66)
	$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $q\neq 0$	$\left(V^1,V^2,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $\|V^2\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2+(V^2)^2<1$ — гармоническое направление	(67)
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s\neq 0$	$\left(V^1,V^2,\pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^2)^2}\right)$, $\|V^2\|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, $(V^1)^2+(V^2)^2<1$. Направление является гармоническим при $V^1=0$	(69)
	$\begin{pmatrix} 0 & q & 0 \\ s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $s\neq \pm q$	$(0,0,\pm 1)$ – гармоническое направление	(68)
$\|V\|^2>0$	$\begin{pmatrix} p & \frac{\sqrt{11-\sqrt{73}}}{2}s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=\frac{\sqrt{9-\sqrt{73}}}{2}s$, $s\neq 0$	$\left(\frac{\sqrt{6(13+\sqrt{73})}}{12},-\frac{\sqrt{6(11-\sqrt{73})}}{12},0\right)$ не является гармоническим направлением	(75)

Продолжение табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2>0$	$\begin{pmatrix} p & -\frac{p^2}{s} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p, s \neq 0$	$V^1=\frac{p(5s^2+p^2)}{\sqrt{(p^2+s^2)(s^4+34s^2p^2+p^4)}}$, $V^2=\frac{s(5p^2+s^2)}{\sqrt{(p^2+s^2)(s^4+34s^2p^2+p^4)}}$, $V^3=0$, $p \in \big(-\infty,-(2+\sqrt{3})s\big) \cup \big(-s,(-2+\sqrt{3})s\big) \cup \big((2-\sqrt{3})s,s\big) \cup \big((2+\sqrt{3})s,\infty\big)$ не является гармоническим направлением	(70)
	$\begin{pmatrix} p & \frac{s}{2} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=\pm\frac{s}{2}$, $s \neq 0$	$(\pm 1,0,0)$ не является гармоническим направлением	(71)
	$\begin{pmatrix} p & \frac{p(ps+f)}{2(2p^2-s^2)} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f=\sqrt{32p^4+8s^4-31p^2s^2}$, $p \neq 0, s \neq -p, \pm\sqrt{2}p, 2p$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^3=0$, $s \in (-\infty,-\sqrt{2}p) \cup (-\sqrt{2}p,-p) \cup (2p,\infty)$ не является гармоническим направлением	(72)
	$\begin{pmatrix} p & \frac{p(ps-f)}{2(2p^2-s^2)} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f=\sqrt{32p^4+8s^4-31p^2s^2}$, $p \neq 0, s \neq p, \pm\sqrt{2}p, -2p$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^3=0$, $s \in (-\infty,-2p) \cup \big(p,\sqrt{2}p\big) \cup \big(\sqrt{2}p,\infty\big)$ не является гармоническим направлением	(73)
$\|V\|^2<0$	$\begin{pmatrix} p & \frac{p(ps+f)}{2(2p^2-s^2)} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f=\sqrt{32p^4+8s^4-31p^2s^2}$, $p \neq 0, s \neq -p, \pm\sqrt{2}p, 2p$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^3=0$, $s \in \big(-p,\sqrt{2}p\big) \cup \big(\sqrt{2}p,2p\big)$. Направление является гармоническим в следующих случаях: 1) $s=0$, 2) $s=p$	(72)
	$\begin{pmatrix} p & \frac{p(ps-f)}{2(2p^2-s^2)} & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $f=\sqrt{32p^4+8s^4-31p^2s^2}$, $p \neq 0, s \neq p, \pm\sqrt{2}p, -2p$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}$, $V^3=0$, $s \in \big(-2p,-\sqrt{2}p\big) \cup \big(-\sqrt{2}p,p\big)$. Направление является гармоническим в следующих случаях: 1) $s=0$, 2) $s=-p$	(73)

Продолжение табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
	$\begin{pmatrix} p & \frac{\sqrt{11+\sqrt{73}}}{2}s & 0 \\ s & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $p=\frac{\sqrt{9+\sqrt{73}}}{2}s,\ s\neq 0$	$\left(\frac{\sqrt{6(13-\sqrt{73})}}{12}, -\frac{\sqrt{6(11+\sqrt{73})}}{12}, 0\right)$ не является гармоническим направлением	(74)
C2			
$\|V\|^2=0$	Не существует алгебр Ли с гармоническим тензором w_{ij}		
$\|V\|^2>0$	$\begin{pmatrix} r & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $r,q\neq 0$	$(0,0,\pm 1)$ не является гармоническим направлением	(80)
	$\begin{pmatrix} -\frac{q^2}{r} & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$V^1=\frac{q(2r^2+q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}$, $V^2=\frac{r(r^2+2q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}$, $V^3=0,\ q\in(-r,0)\cup(0,r)$ не является гармоническим направлением	(81)
	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $q=\pm\frac{1}{4}\sqrt{6r^2-28pr+6p^2+2f}$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{43p^3-61r^3-83rp^2+101r^2p+f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{61p^3-43r^3-101rp^2+83r^2p-f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^3=0,\ p\in\left[\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\right)$ $f=\sqrt{-(23p^2+82pr+23r^2)(p-r)^2}$ не является гармоническим направлением	(82)
	$\begin{pmatrix} p & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $q=\pm\frac{1}{4}\sqrt{6r^2-28pr+6p^2-2f}$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{43p^3-61r^3-83rp^2+101r^2p-f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{61p^3-43r^3-101rp^2+83r^2p+f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^3=0,\ p\in\left[\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\right)$ $f=\sqrt{-(23p^2+82pr+23r^2)(p-r)^2}$ не является гармоническим направлением	(83)
$\|V\|^2<0$	$\begin{pmatrix} -\frac{q^2}{r} & q & 0 \\ -q & r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $q\in(-\infty,-r)\cup(r,\infty)$	$V^1=\frac{q(2r^2+q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}$, $V^2=\frac{r(r^2+2q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}$, $V^3=0$. Направление является гармоническим при $q=\pm 2r$	(81)

Окончание табл. 5

Знак $\|V\|^2$	Матрица структурных констант	Вектор	№
$\|V\|^2<0$	$\begin{pmatrix} p & q & 0\\ -q & r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $q=\pm\frac{\sqrt{6r^2-28pr+6p^2+2f}}{4}$, $p\in\left(-r,\frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\right]$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{43p^3-61r^3-83rp^2+101r^2p+f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{61p^3-43r^3-101rp^2+83r^2p-f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $f=\sqrt{-(23p^2+82pr+23r^2)(p-r)^2}$, $V^3=0$ не является гармоническим направлением	(82)
	$\begin{pmatrix} p & q & 0\\ -q & r & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $q=\pm\frac{\sqrt{6r^2-28pr+6p^2-2f}}{4}$, $p\in\left(-r,\frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\right]$	$V^1=\pm\sqrt{\frac{43p^3-61r^3-83rp^2+101r^2p-f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $V^2=\pm\sqrt{\frac{61p^3-43r^3-101rp^2+83r^2p+f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}}$, $f=\sqrt{-(23p^2+82pr+23r^2)(p-r)^2}$, $V^3=0$ не является гармоническим направлением	(83)

Замечание 8. Тензор Риччи имеет вид

$$\|R_{ij}\|=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2}s^2\\ 0 & -\frac{1}{2}s^2 & qs\\ -\frac{1}{2}s^2 & qs & ps+qt-q^2\end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае многообразие является эйнштейновым тогда и только тогда, когда $s=0,\quad q=0,\quad p=p,\quad t\neq q$, и константа Эйнштейна равна нулю.

Пусть теперь тензор Схоутена–Вейля дополнительно удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S)=0$, т. е. почти гармонический. Вычисляя компоненты ротора тензора Схоутена–Вейля, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{gathered}
\mathrm{rot}(S)_{1313}=\mathrm{rot}(S)_{1322}=\mathrm{rot}(S)_{3122}=\mathrm{rot}(S)_{3131}=-\mathrm{rot}(S)_{1133}=\\
=-\mathrm{rot}(S)_{1232}=-\mathrm{rot}(S)_{3212}=-\mathrm{rot}(S)_{3311}=3/4\,s^4=0,\\
2\,\mathrm{rot}(S)_{1233}=2\,\mathrm{rot}(S)_{3312}=2\,\mathrm{rot}(S)_{1323}=2\,\mathrm{rot}(S)_{3132}=\mathrm{rot}(S)_{2133}=\\
=\mathrm{rot}(S)_{2232}=\mathrm{rot}(S)_{3213}=\mathrm{rot}(S)_{3321}=-\mathrm{rot}(S)_{2313}=-\mathrm{rot}(S)_{2322}=\\
=-\mathrm{rot}(S)_{3123}=-\mathrm{rot}(S)_{3231}=3/2\,qs^3=0,\\
\mathrm{rot}(S)_{3313}=\mathrm{rot}(S)_{3322}=-\mathrm{rot}(S)_{3131}=-\mathrm{rot}(S)_{3232}=\\
=/4\,s^3p-3/4\,s^2q^2+7/4\,qs^2t=0,\\
\mathrm{rot}(S)_{3233}=-\mathrm{rot}(S)_{3323}=3\,qs^2p+3\,tsq^2-ts^2p-qst^2=0,\\
\mathrm{rot}(S)_{2323}=-\mathrm{rot}(S)_{2232}=3/2\,s^2q^2+1/2\,s^3p+1/2\,qs^2t=0.
\end{gathered}\tag{57}$$

Решая систему уравнений (57) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$, находим в случае B все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых тензор Схоутена–Вейля удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S)=0$.

Данная система уравнений имеет одно решение:

$$s = 0, \quad p = p, \quad q = q, \quad t = t, \quad q \neq t,$$

которое для наглядности поместим в четвертую строку табл. 4.

Тензор Схоутена – Вейля (10) в данном случае тривиален.

Замечание 9. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q(t-q) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае метрика является эйнштейновой, только если $q = 0$, и константа Эйнштейна равна нулю.

Определяем компоненты дивергенции II типа тензора Схоутена – Вейля и находим решения системы уравнений $\operatorname{div}_2(S) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}_2(S)_{13} = 3/4\, s^4 = 0,\\
&\operatorname{div}_2(S)_{22} = 3/2\, s^4 = 0,\\
&\operatorname{div}_2(S)_{23} = -9/4\, qs^3 = 0,\\
&\operatorname{div}_2(S)_{33} = -1/4\, s^2(-9\, q^2 + 5\, ps + 5\, qt) = 0.
\end{aligned}$$

Получаем, что решения данной системы уравнений совпадают с решениями системы $\operatorname{rot}(S) = 0$. Тем самым решен вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в рассматриваемом случае B.

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$\begin{aligned}
&w_{21} = -w_{12} = 1/2\, V^3 s^3,\\
&w_{13} = -w_{31} = -V^2 s^3 + 3/2\, V^3 q s^2,\\
&w_{23} = -w_{32} = -1/2\, V^1 s^3 + 3/2\, V^2 q s^2 + V^3(1/2\, s^2 p - 3/2\, s q^2 + 1/2\, qst).
\end{aligned}$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что условия $\operatorname{rot}(w) = 0$, $\operatorname{div}(w) = 0$ равносильны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{rot}(w)_{132} = \operatorname{rot}(w)_{321} = \operatorname{rot}(w)_{213} = -\operatorname{rot}(w)_{123} =\\
&\qquad\qquad = -\operatorname{rot}(w)_{231} = -\operatorname{rot}(w)_{312} = 1/2\, s^3 V^3 (q + t) = 0,\\
&\operatorname{div}(w)_2 = 1/2\, s^3(2\, sV^2 - 3\, V^3 q - V^3 t) = 0,\\
&\operatorname{div}(w)_3 = -1/2\, s^2(2\, sV^2 q - 3\, V^3 q^2 + sV^3 p) = 0.
\end{aligned} \tag{58}$$

Решаем систему уравнений (58) совместно с условием (6) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$. Тем самым определим алгебры Ли и соответствующие им направления, для которых тензор w_{ij} является гармоническим. При условии, что $q \neq t$, получаем следующие решения:

$$s = 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad t \neq \pm q, \quad V^3 \neq 0, \quad V = (V^1, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^3)^2}, V^3); \tag{59}$$

$$q = \frac{sV^2}{V^3}, \quad t = -\frac{sV^2}{V^3}, \quad p = \frac{s(V^2)^2}{(V^3)^2}, \quad s \neq 0, \quad V^3 \neq 0, \quad (V^1)^2 + (V^3)^2 < 1, \tag{60}$$
$$V = (V^1, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2}, V^3);$$
$$p \in \mathbb{R}, \quad s \neq 0, \quad t \neq \pm q, \quad V = (\pm 1, 0, 0). \tag{61}$$

Исследуем полученное множество направлений. Из равенств (5)–(6) находим, что квадрат длины вектора V имеет вид

$$\|V\|^2 = -2V^1V^3 + (V^2)^2. \tag{62}$$

Отсюда получаем, что (61) есть изотропное направление.

Пусть имеет место (59) или (60). Тогда из равенств (6) и (62) заключаем, что

$$\|V\|^2 = 1 - (V^1 + V^3)^2.$$

Ясно, что

$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow |V^1 + V^3| < 1;$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow |V^1 + V^3| > 1;$$
$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^1 + V^3 = \pm 1.$$

Кроме того, если $V^1 + V^3 = 1$, то $V^2 = \pm\sqrt{-2V^3(V^3-1)}$, а если $V^1 + V^3 = -1$, то $V^2 = \pm\sqrt{-2V^3(V^3+1)}$.

Пусть далее вектор V^k — гармонический. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора V^k. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}(V)_{21} = -\operatorname{rot}(V)_{12} = \operatorname{rot}(V)_{32} = -\operatorname{rot}(V)_{23} =$$
$$= \left(\frac{1}{2}s + p\right)V^3 + \frac{1}{2}V^1 s - V^2 q = 0\,. \tag{63}$$

Решаем систему из уравнений (6), (58) и (63). При имеющихся ограничениях на структурные константы получаем, что направление (59) является гармоническим, только если

$$s = 0, \quad t = 0, \quad p = \frac{qV^2}{V^3}, \quad q \neq 0, \quad V^3 \neq 0$$
$$V = (V^1, \pm\sqrt{1-(V^1)^2-(V^3)^2}, V^3).$$

Направления (60) и (61) не являются гармоническими.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (59)–(61) помещаем в табл. 5 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Подслучай С.1.

Вычислим компоненты дивергенции тензора Схоутена–Вейля. Используя (2), находим символы Кристоффеля:

$$\Gamma^3_{11} = -\Gamma^1_{13} = s,$$
$$\Gamma^3_{22} = \Gamma^2_{23} = q,$$
$$\Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{31} = -p,$$

Учитывая (11), получим $\mathrm{div}_1(S) = g^{it} S_{ijk;t} \equiv 0$. Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в подслучае C.1 всегда имеет $\mathrm{div}_1(S) = 0$. Сам тензор, вообще говоря, ненулевой, и его компоненты задаются равенством (11).

Замечание 10. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} s(q-s) & p(q+s) & 0 \\ p(q+s) & q(q-s) & 0 \\ 0 & 0 & -q^2-s^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что в данном случае метрика является эйнштейновой тогда и только тогда, когда $q = -s \neq 0,\ \ p \in \mathbb{R}$, и константа Эйнштейна равна $-2s^2$.

Пусть теперь тензор Схоутена – Вейля дополнительно удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S) = 0$, т. е. является почти гармоническим. Вычисляя ковариантные производные, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}(S)_{1211} = \mathrm{rot}(S)_{1323} = \mathrm{rot}(S)_{2212} = \mathrm{rot}(S)_{2313} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1121} = \\
&\qquad = -\,\mathrm{rot}(S)_{1233} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2122} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2133} = 3\,spq^2 + 3\,qs^2p = 0,\\
&\mathrm{rot}(S)_{2211} = \mathrm{rot}(S)_{2323} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2121} = -\,\mathrm{rot}(S)_{2233} = \\
&\qquad = (-2\,p^2q - 2\,p^2s + sq^2 + qs^2)q = 0,\\
&\mathrm{rot}(S)_{3132} = \mathrm{rot}(S)_{3231} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3312} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3321} = \\
&\qquad = 2\,(-2\,p^2q - 2\,p^2s + sq^2 + qs^2)p = 0,\\
&\mathrm{rot}(S)_{1122} = \mathrm{rot}(S)_{1133} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1212} = -\,\mathrm{rot}(S)_{1313} = \\
&\qquad = (-2\,p^2q - 2\,p^2s + sq^2 + qs^2)s = 0,\\
&\mathrm{rot}(S)_{3131} = \mathrm{rot}(S)_{3232} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3311} = -\,\mathrm{rot}(S)_{3322} = 3\,p^2s^2 - 3\,p^2q^2 = 0.
\end{aligned} \tag{64}$$

Решая систему уравнений (64) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$, находим в подслучае C.1 все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых тензор Схоутена – Вейля удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S) = 0$.

Находим решения системы уравнений (64). Учитывая, что $q \neq s$, получаем:

$$\begin{aligned}
&s = p = 0, \quad q = q, \quad q \neq 0,\\
&q = p = 0, \quad s = s, \quad s \neq 0,\\
&q = -s, \quad p = p, \quad s = s, \quad s \neq 0.
\end{aligned}$$

Помещаем данные решения соответственно в строки 5–7 табл. 4.

Легко проверить, что компоненты тензора Схоутена – Вейля (11) обращаются в нуль для каждого решения системы (64).

Замечание 11. Компоненты тензора Риччи соответственно имеют вид

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & -q^2 \end{pmatrix}, \quad \|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -s^2 \end{pmatrix}, \quad \|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} -2s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2s^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2s^2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что метрика является эйнштейновой только для последнего решения, и константа Эйнштейна в этом случае равна $-2s^2$.

Вычисляем компоненты дивергенции II типа тензора Схоутена – Вейля и решаем систему уравнений $\mathrm{div}_2(S) = 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_2(S)_{11} = (q+s)(sq^2 + 3\,p^2 s - 5\,p^2 q) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{12} = \mathrm{div}_2(S)_{21} = p(q+s)(5\,qs - 4\,p^2) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{22} = -(q+s)(qs^2 - 5\,p^2 s + 3\,p^2 q) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{33} = -(q+s)^2(qs - 2\,p^2) = 0.
\end{aligned}$$

Получаем, что решения данной системы уравнений совпадают с решениями системы $\mathrm{rot}\,(S) = 0$. Тем самым решен вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в рассматриваемом случае C.1.

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$\begin{aligned}
&w_{12} = -w_{21} = V^3\left(pq^2 + 2\,pqs + s^2 p\right),\\
&w_{13} = -w_{31} = V^1\left(-2\,p^2 q - 2\,p^2 s + sq^2 + qs^2\right) + V^2\left(-pq^2 + 2\,s^2 p + pqs\right),\\
&w_{23} = -w_{32} = V^1\left(-2\,pq^2 + s^2 p - pqs\right) + V^2\left(-2\,p^2 q - 2\,p^2 s + sq^2 + qs^2\right).
\end{aligned}$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что условия $\mathrm{rot}\,(w) = 0$, $\mathrm{div}\,(w) = 0$ равносильны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,(w)_{132} = \mathrm{rot}\,(w)_{321} = \mathrm{rot}\,(w)_{213} = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{123} = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{231} =\\
&\qquad\qquad\qquad = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{312} = pV^3\,(s-q)\,(q+s)^2 = 0,\\
&\mathrm{div}\,(w)_1 = (q+s)(V^1[sq^2 + p^2 s - 4\,p^2 q] + V^2[3\,pqs - 2\,p^3 - pq^2]) = 0,\\
&\mathrm{div}\,(w)_2 = -(q+s)(V^1[s^2 p - 3\,pqs + 2\,p^3] + V^2[qs^2 - 4\,p^2 s + p^2 q]) = 0.
\end{aligned}\tag{65}$$

Гармонический тензор w_{ij} определяется системами уравнений (6) и (65). Решаем данную систему уравнений относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$. При условии, что $q \neq s$, имеются следующие решения:

$$s = -q, \quad q \neq 0, \quad p \neq 0, \quad (V^1)^2 + (V^2)^2 < 1,$$
$$V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right); \tag{66}$$

$$p = s = 0, \quad q \neq 0, \quad (V^1)^2 + (V^2)^2 < 1,$$
$$V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right); \tag{67}$$

$$p = 0, \quad s \neq q \quad V = (0, 0, \pm 1); \tag{68}$$

$$p = q = 0, \quad s \neq 0, \quad (V^1)^2 + (V^2)^2 < 1, \quad V = \left(V^1, V^2, \pm\sqrt{1 - (V^1)^2 - (V^2)^2}\right); \tag{69}$$

$$q = -\frac{p^2}{s}, \quad s, p \neq 0, \quad V^3 = 0, \quad V^1 = \frac{p(5s^2 + p^2)}{\sqrt{(p^2 + s^2)(s^4 + 34s^2p^2 + p^4)}},$$
$$V^2 = \frac{s(5p^2 + s^2)}{\sqrt{(p^2 + s^2)(s^4 + 34s^2p^2 + p^4)}}; \tag{70}$$

$$p = \pm\frac{s}{2}, \quad q = \frac{s}{2}, \quad s \neq 0, \quad V = (\pm 1, 0, 0); \tag{71}$$

$$q = \frac{p(ps+f)}{2(2p^2-s^2)}, \quad p \neq 0, \quad s \notin \{-p, \pm\sqrt{2}p, 2p\},$$

$$V^1 = \pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}; \tag{72}$$

$$V^2 = \pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}, \quad V^3 = 0; \quad q = \frac{p(ps-f)}{2(2p^2-s^2)}, \quad p \neq 0,$$

$$s \notin \{p, \pm\sqrt{2}p, -2p\}, \quad V^1 = \pm\sqrt{\frac{8p^4+4s^4-9s^2p^2+spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}; \tag{73}$$

$$V^2 = \pm\sqrt{\frac{16p^4+2s^4-9s^2p^2-spf}{24p^4+6s^4-18s^2p^2}}, \quad V^3 = 0; \quad p = \frac{\sqrt{9+\sqrt{73}}}{2}s, \quad q = \frac{11+\sqrt{73}}{6}s,$$

$$s \neq 0, \quad V = \left(\frac{\sqrt{6(13-\sqrt{73})}}{12}, -\frac{\sqrt{6(11+\sqrt{73})}}{12}, 0\right); \tag{74}$$

$$p = \frac{\sqrt{9-\sqrt{73}}}{2}s, \quad q = \frac{11-\sqrt{73}}{6}s, \quad s \neq 0,$$

$$V = \left(\frac{\sqrt{6(13+\sqrt{73})}}{12}, -\frac{\sqrt{6(11-\sqrt{73})}}{12}, 0\right), \tag{75}$$

где $f = \sqrt{32p^4+8s^4-31p^2s^2}$.

Исследуем полученное множество направлений. Из (5) находим квадрат длины вектора V:

$$\|V\|^2 = (V^1)^2 - (V^2)^2 + (V^3)^2. \tag{76}$$

Если имеет место (66), (67) или (69), то из равенств (6) и (76) получаем

$$\|V\|^2 = 1 - 2(V^2)^2.$$

Очевидно, что

$$\|V\|^2 = 0 \Leftrightarrow V^2 = \pm\frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 > 0 \Leftrightarrow |V^2| < \frac{1}{\sqrt{2}};$$
$$\|V\|^2 < 0 \Leftrightarrow |V^2| > \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично получаем, что квадрат длины направлений (68) и (71) равен 1.

Если выполняется (70), то из условия (76) находим

$$\|V\|^2 = \frac{(p^2-s^2)(s^4+p^4-14p^2s^2)}{(s^2+p^2)(s^4+34s^2p^2+p^4)}.$$

Нетрудно проверить, что при имеющихся ограничениях на структурные константы данное направление является изотропным только при $p = \pm(2\pm\sqrt{3})s$. Пусть для определенности $s > 0$. Непосредственно проверяется, что

$$\|V\|^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \Big(-\infty, -(2+\sqrt{3})s\Big) \cup \Big(-s, (-2+\sqrt{3})s\Big) \cup$$
$$\cup \Big((2-\sqrt{3})s, s\Big) \cup \Big((2+\sqrt{3})s, \infty\Big);$$

$$\|V\|^2 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad p \in \Big(-(2+\sqrt{3})s, -s\Big) \cup \Big((-2+\sqrt{3})s, 0\Big) \cup \\ \cup \Big(0, (2-\sqrt{3})s\Big) \cup \Big(s, (2+\sqrt{3})s\Big)\,.$$

Пусть имеет место (72). Тогда из (76) получаем

$$\|V\|^2 = \frac{s^4 - 4p^4 - sp\sqrt{32p^4 + 8s^4 - 31p^2s^2}}{3(4p^4 + s^4 - 3s^2p^2)}\,.$$

Легко заметить, что $\|V\| \neq 0$ при заданных ограничениях на структурные константы. В предположении $p > 0$ имеем

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \Big(-\infty, -\sqrt{2}p\Big) \cup \Big(-\sqrt{2}p, -p\Big) \cup (2p, \infty)\,;$$
$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \Big(-p, \sqrt{2}p\Big) \cup \Big(\sqrt{2}p, 2p\Big)\,.$$

Пусть выполняется (73). Тогда из (76) находим

$$\|V\|^2 = \frac{s^4 - 4p^4 + sp\sqrt{32p^4 + 8s^4 - 31p^2s^2}}{3(4p^4 + s^4 - 3s^2p^2)}.$$

Нетрудно заметить, что соответствующее направление не является изотропным при допустимых значениях структурных констант. Положим $p > 0$, тогда легко проверить, что

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; s \in (-\infty, -2p) \cup \Big(p, \sqrt{2}p\Big) \cup \Big(\sqrt{2}p, \infty\Big)\,;$$
$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; s \in \Big(-2p, -\sqrt{2}p\Big) \cup \Big(-\sqrt{2}p, p\Big)\,.$$

Аналогично из (76) для направления (74) (соответственно (75)) получаем, что квадрат длины вектора V равен $\frac{1-\sqrt{73}}{12}$ (соответственно $\frac{1+\sqrt{73}}{12}$).

Пусть далее вектор V^k — гармонический вектор. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора V^k. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}(V)_{31} = -\operatorname{rot}(V)_{13} = 2V^1 s. \tag{77}$$

Проверим, какие из найденных направлений (66)–(75) являются гармоническими. Очевидно, что (67) и (68) есть гармонические направления. Векторы (66) и (69) являются гармоническими только при $V^1 = 0$. Применяя (77), находим, что множество направлений (72) содержит два гармонических направления:

$$q = \sqrt{2}p, \quad s = 0, \quad p \neq 0, \quad V = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right);$$
$$q = 2p, \quad s = p, \quad p \neq 0, \quad V = (0, \pm 1, 0).$$

Аналогично в множестве направлений (73) гармоническими являются

$$q = -\sqrt{2}p, \quad s = 0, \quad p \neq 0, \quad V = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{3}, 0\right);$$
$$q = -2p, \quad s = -p, \quad p \neq 0, \quad V = (0, \pm 1, 0).$$

Наконец, (70), (71), (74) и (75) суть негармонические направления.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (66)–(75) помещаем в табл. 5 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Подслучай C.2.

Вычислим компоненты дивергенции тензора Схоутена – Вейля. Применяя (2), находим символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned}&\Gamma^2_{23} = \Gamma^3_{22} = \Gamma^1_{13} = -\Gamma^3_{11} = q,\\&\Gamma^1_{23} = -\Gamma^3_{12} = -\Gamma^3_{21} = -\Gamma^2_{13} = \frac{1}{2}(p+r),\\&\Gamma^1_{32} = \Gamma^2_{31} = \frac{1}{2}(r-p).\end{aligned}$$

Учитывая (12), получим $\operatorname{div}_1(S) = g^{it}S_{ijk;t} \equiv 0$. Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в подслучае C.2 всегда имеет $\operatorname{div}_1(S) = 0$. Сам тензор, вообще говоря, ненулевой, и его компоненты задаются равенством (12).

Замечание 12. Тензор Риччи имеет следующие компоненты:

$$\|R_{ij}\| = \begin{pmatrix} -2q^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}r^2 & -q(p+r) & 0\\ -q(p+r) & 2q^2 - \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}r^2 & 0\\ 0 & 0 & -2q^2 + \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}r^2 + pr \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при указанных выше ограничениях метрика не является эйнштейновой.

Пусть теперь тензор Схоутена – Вейля дополнительно удовлетворяет условию $\operatorname{rot}(S) = 0$, т. е. является почти гармоническим. Вычисляя ковариантные производные, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot}(S)_{1211} = \operatorname{rot}(S)_{1323} = \operatorname{rot}(S)_{2212} = \operatorname{rot}(S)_{2313} =\\&\qquad = -\operatorname{rot}(S)_{1121} = -\operatorname{rot}(S)_{1233} = -\operatorname{rot}(S)_{2122} = -\operatorname{rot}(S)_{2133} =\\&\qquad\qquad = 1/4\,p^2qr + 1/4\,qr^2p + 3/4\,p^3q + 3/4\,qr^3 + pq^3 + q^3r = 0,\\&\operatorname{rot}(S)_{2211} = \operatorname{rot}(S)_{2323} = -\operatorname{rot}(S)_{2121} = -\operatorname{rot}(S)_{2233} =\\&\qquad = 5/4\,p^3r - 1/4\,r^3p + 3/4\,p^4 + 2\,p^2q^2 + pq^2r - q^2r^2 + 1/4\,p^2r^2 = 0,\\&\operatorname{rot}(S)_{3132} = \operatorname{rot}(S)_{3231} = -\operatorname{rot}(S)_{3312} = -\operatorname{rot}(S)_{3321} =\\&\qquad\qquad = 3/2\,q(r^2-p^2)(r-p) = 0,\\&\operatorname{rot}(S)_{1212} = \operatorname{rot}(S)_{1313} = -\operatorname{rot}(S)_{1122} = -\operatorname{rot}(S)_{1133} =\\&\qquad = 1/4\,p^3r - 5/4\,r^3p - 3/4\,r^4 - 2\,q^2r^2 + p^2q^2 - 1/4\,p^2r^2 - pq^2r = 0,\\&\operatorname{rot}(S)_{3131} = \operatorname{rot}(S)_{3232} = -\operatorname{rot}(S)_{3311} = -\operatorname{rot}(S)_{3322} =\\&\qquad\qquad = p^2q^2 - q^2r^2 + 1/2\,r^3p - 3/4\,r^4 + 3/4\,p^4 - 1/2\,p^3r = 0. \qquad (78)\end{aligned}$$

Решая систему уравнений (78) относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$, находим в подслучае C.2 все трехмерные неунимодулярные алгебры Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, для которых тензор Схоутена – Вейля удовлетворяет условию $\operatorname{rot}(S) = 0$.

Получаем, что при ограничении $p+r \neq 0$ данная система уравнений решений не имеет. Следовательно, тензор Схоутена – Вейля в подслучае C.2 не удовлетворяет условию $\mathrm{rot}(S)=0$ ни при каких значениях структурных констант.

Отметим, что система уравнений $\mathrm{div}_2(S)=0$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{div}_2(S)_{11} = 1/4\,(p+r)(6\,p^3 - 3\,p^2 r + 4\,r^2 p + 12\,q^2 p - 8\,q^2 r - 3\,r^3) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{12} = \mathrm{div}_2(S)_{21} = 1/4\,q(p+r)(9\,p^2 - 14\,pr + 4\,q^2 + 9\,r^2) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{22} = 1/4\,(p+r)(3\,p^3 - 4\,p^2 r + 8\,q^2 p + 3\,r^2 p - 6\,r^3 - 12\,q^2 r) = 0,\\
&\mathrm{div}_2(S)_{33} = -1/4\,(p+r)^2(3\,p^2 - 2\,pr + 4\,q^2 + 3\,r^2) = 0,
\end{aligned}$$

при ограничении $p+r \neq 0$ решений не имеет. Таким образом, вопрос о почти гармоничности тензора Схоутена – Вейля в подслучае C.2 решается отрицательно.

Используя (4), находим компоненты тензора w_{ij}:

$$\begin{aligned}
&w_{21} = -w_{12} = V^3(1/2\,p^2 r - 1/2\,r^2 p - 1/2\,r^3 + 1/2\,p^3),\\
&w_{13} = -w_{31} = V^1(3/2\,p^2 q - 3/2\,qr^2) + V^2(1/2\,p^3 + 1/2\,r^2 p + r^3 + pq^2 + q^2 r),\\
&w_{23} = -w_{32} = V^1(p^3 + 1/2\,p^2 r + 1/2\,r^3 + pq^2 + q^2 r) + V^2(3/2\,p^2 q - 3/2\,qr^2).
\end{aligned}$$

Вычисляем ротор и дивергенцию тензора w_{ij}. Получаем, что условия $\mathrm{rot}\,(w) = 0$, $\mathrm{div}\,(w) = 0$ равносильны следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{rot}\,(w)_{132} = \mathrm{rot}\,(w)_{321} = \mathrm{rot}\,(w)_{213} = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{123} = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{231} =\\
&\qquad\qquad = -\,\mathrm{rot}\,(w)_{312} = V^3(p-r)(p+r)^2 q = 0,\\
&\mathrm{div}\,(w)_1 = 1/2\,(p+r)(V^1[2\,p^3 - p^2 r + 5\,pq^2 + pr^2 - 3\,q^2 r] +\\
&\qquad\qquad + V^2[4\,p^2 q - 4\,prq + 2\,qr^2 + 2\,q^3]) = 0,\\
&\mathrm{div}\,(w)_2 = 1/2\,(p+r)(V^1[2\,p^2 q - 4\,pqr + 2\,q^3 + 4\,qr^2] +\\
&\qquad\qquad + V^2[-p^2 r + 3\,pq^2 + r^2 p - 5\,q^2 r - 2\,r^3]) = 0\,. \qquad (79)
\end{aligned}$$

Гармонический тензор w_{ij} определяется системами уравнений (6) и (79). Решаем данную систему уравнений относительно структурных констант алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и компонент вектора $\{V^k\}$. Принимая во внимание, что $q \neq 0$ и $p+r \neq 0$, находим следующие решения:

$$p = r, \quad r \neq 0, \quad q \neq 0, \quad V = (0,0,\pm 1)\,; \qquad (80)$$

$$p = -\frac{q^2}{r}, \quad r \neq 0, \quad q \notin \{0, \pm r\}, \quad V^3 = 0, \quad V^1 = \frac{q(2r^2+q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}\,,$$

$$V^2 = \frac{r(r^2+2q^2)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}\,; \qquad (81)$$

$$q = \pm\frac{1}{4}\sqrt{6r^2 - 28pr + 6p^2 + 2f}, \quad V^3 = 0, \quad f = \sqrt{-(23p^2 + 82pr + 23r^2)(p-r)^2},$$

$$V^1 = \pm\sqrt{\frac{43p^3 - 61r^3 - 83rp^2 + 101r^2p + f(r+p)}{8(p-r)(13r^2 - 10rp + 13p^2)}}\,,$$

$$V^2 = \pm\sqrt{\frac{61p^3 - 43r^3 - 101rp^2 + 83r^2p - f(r+p)}{8(p-r)(13r^2 - 10rp + 13p^2)}}\,,$$

$$p \in \Big(\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\Big) \cup \Big(-r, \frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\Big)\,; \qquad (82)$$

$$q = \pm\frac{1}{4}\sqrt{6r^2-28pr+6p^2-2f}, \quad V^3 = 0, \quad f = \sqrt{-(23p^2+82pr+23r^2)(p-r)^2},$$

$$V^1 = \pm\sqrt{\frac{43p^3-61r^3-83rp^2+101r^2p-f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}},$$

$$V^2 = \pm\sqrt{\frac{61p^3-43r^3-101rp^2+83r^2p+f(r+p)}{8(p-r)(13r^2-10rp+13p^2)}},$$

$$p \in \Big[\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\Big) \cup \Big(-r, \frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\Big]. \qquad (83)$$

Исследуем полученное множество направлений. Согласно (5) квадрат длины вектора V определяется равенством

$$\|V\|^2 = (V^1)^2 - (V^2)^2 + (V^3)^2. \qquad (84)$$

Очевидно, что квадрат длины вектора (80) равен 1. Пусть имеет место (81). Из (6) и (84) находим

$$\|V\|^2 = \frac{(r^2-q^2)(r^2+q^2+rq)(r^2+q^2-rq)}{\sqrt{(r^2+q^2)(r^4+q^4+7q^2r^2)}}\,.$$

Легко заметить, что $\|V\|^2 \neq 0$ при допустимых значениях структурных констант. Непосредственно проверяется, что

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; q \in (-r, 0) \cup (0, r)\,;$$
$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; q \in (-\infty, -r) \cup (r, \infty)\,.$$

Если выполняется (82), то из (6) и (84) получаем

$$\|V\|^2 = \frac{(p+r)(9p^2-18rp+9r^2-f)}{4(r-p)(13r^2-10rp+13p^2)}\,.$$

Нетрудно заметить, что соответствующее направление не является изотропным при заданных ограничениях на структурные константы. Пусть для определенности $r > 0$. Тогда легко проверить, что

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; p \in \Big[\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\Big);$$
$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; p \in \Big(-r, \frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\Big].$$

Аналогично для (83) имеем

$$\|V\|^2 = \frac{(p+r)(9p^2-18rp+9r^2+f)}{4(r-p)(13r^2-10rp+13p^2)}\,.$$

Легко проверить, что $\|V\|^2 \neq 0$ при допустимых значениях структурных констант. Более того, полагая $r > 0$, имеем

$$\|V\|^2 > 0 \;\Leftrightarrow\; p \in \Big[\frac{-24\sqrt{2}-41}{23}r, -r\Big);$$
$$\|V\|^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; p \in \Big(-r, \frac{24\sqrt{2}-41}{23}r\Big].$$

Пусть далее вектор V^k — гармонический. Вычисляем компоненты ротора и дивергенции вектора V^k. Получаем, что условия $\operatorname{div}(V) = 0$, $\operatorname{rot}(V) = 0$ равносильны следующему уравнению:

$$\operatorname{rot}(V)_{31} = -\operatorname{rot}(V)_{13} = 2V^1 q + V^2(p + r) = 0. \tag{85}$$

Очевидно, что (80) есть гармоническое направление. Применяя (85) находим, что в множестве направлений (81) гармоническими являются направления вида

$$p = -4r, \quad q = 2r, \quad r \neq 0, \quad V = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right);$$
$$p = -4r, \quad q = -2r, \quad r \neq 0, \quad V = \left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 0\right).$$

Легко проверяется, что (82) и (83) суть негармонические направления.

Для наглядности полученные наборы структурных констант и соответствующие им направления (80)–(83) помещаем в табл. 5 с сохранением их номеров, учитывая при этом тип алгебры и знак квадрата длины вектора V.

Таким образом, доказаны теоремы.

Теорема 3. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. $\operatorname{div}_1(S) \equiv 0$. *Если дополнительно выполнено условие* $\operatorname{rot}(S) = 0$, *т. е. тензор Схоутена – Вейля почти гармонический, тогда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в табл.* 4.

2. *Из того, что* $\operatorname{div}_2(S) = 0$, *следует тривиальность тензора Схоутена – Вейля, а матрица структурных констант ее алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G содержится в табл.* 4.

Теорема 4. *Пусть G — трехмерная неунимодулярная группа Ли с левоинвариантной лоренцевой метрикой, $\{V^k\}$ — произвольный вектор, такой что $(V^1)^2+(V^2)^2+(V^3)^2 = 1$, $w_{ij} = V^k S_{kij}$ — гармонический тензор, где S_{kij} — тензор Схоутена – Вейля. Тогда матрицы структурных констант алгебры Ли группы G и компоненты вектора $\{V^k\}$ содержатся в табл.* 5.

Отметим, что решение систем алгебраических уравнений в настоящей работе производилось с использованием пакета аналитических расчетов Maple, что позволило оптимизировать вычислительную часть исследования.

Список литературы

1. *Бессе А.* Многообразия Эйнштейна: В 2 т. / Пер. с англ. М.: Мир, 1990. Т. 1–2.

2. *Родионов Е. Д., Славский В. В., Чибрикова Л. Н.* Левоинвариантные лоренцевы метрики на 3-мерных группах Ли с нулевым квадратом длины тензора Схоутена – Вейля // Вестн. БГПУ. Серия: Естественные и точные науки. 2004. № 4. С. 53–60.

3. *Milnor J.* Curvature of Left Invariant Metric on Lie Groups // Adv. in mathematics. 1976. Vol. 21. P. 293–329.

4. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* О гармонических тензорах на трехмерных группах Ли с левоинвариантной римановой метрикой // ДАН. Серия: Математика. 2008. Т. 419, № 6. С. 735–738.

5. *Балащенко В. В., Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Левоинвариантные римановы метрики с гармонической сверткой тензора Схоутена – Вейля на трехмерных группах Ли // Вестн. БГПУ. Серия: Естественные и точные науки. 2007. № 7. С. 5–13.

6. *Гладунова О. П., Родионов Е. Д., Славский В. В.* Левоинвариантные лоренцевы метрики с гармонической сверткой тензора Схоутена – Вейля на трехмерных группах Ли // Вестн. БГПУ. Серия: Естественные и точные науки. 2007. № 7. С. 45–69.

7. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.

8. *Чибрикова Л. Н.* Применение пакетов аналитических вычислений к решению задач однородной (псевдо)римановой геометрии: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Барнаул, 2005.

Материал поступил в редколлегию 05.10.2008

Адреса авторов

ГЛАДУНОВА Олеся Павловна
Алтайский государственный университет
пр. Ленина 61, Барнаул, 656049, Россия
e-mail: gladunova_olesya@mail.ru

РОДИОНОВ Евгений Дмитриевич
Алтайская государственная педагогическая академия
ул. Молодежная 55, Барнаул, 656031, Россия
e-mail: rodionov@uni-altai.ru, edr2002@mail.ru

СЛАВСКИЙ Виктор Владимирович
Алтайская государственная педагогическая академия
ул. Молодежная 55, Барнаул, 656031, Россия
e-mail: slavsky@uriit.ru, slavsky2004@mail.ru