УДК 517.95

В. В. Шубин

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С РАЗРЫВНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ*

В работе рассматриваются краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции $\operatorname{sign} y u_{yyyy} \pm Au + c(x,y)u = f(x,y)$ в цилиндре $Q = \Omega \times (-T,T) = \{(x,y) : x \in \Omega, -T < y < T\}$, где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей и $T > 0$. Здесь A — эллиптический оператор вида $A\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a^{ij}(x)u_{x_i}\big)$. Для данных уравнений задаются краевые условия на боковой поверхности циллиндра $\partial\Omega \times (-T,T)$ и на основаниях $\Omega \times \{-T\}$ и $\Omega \times \{T\}$, а также условия сопряжения на сечении $\Omega \times 0$. Доказываются теоремы существования и единственности регулярных решений поставленных задач.

Ключевые слова: уравнения с частными производными, уравнения третьего порядка, уравнения составного типа, уравнения с переменным направлением эволюции, уравнения с разрывными коэффициентами.

Краевые задачи для уравнений нечетного порядка вида

$$\mathcal{D}_y^{2m+1}u + \mathcal{M}u = f,$$

где $\mathcal{M}$ — некоторый эллиптический оператор, рассматривались в работах [1–3]. Краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции, но с непрерывным коэффициентом, исследовались в работе [4]. Также некоторые уравнения с разрывным коэффициентом типа функции sign изучались в работе [5]. В данной работе рассматриваются краевые задачи для уравнений третьего порядка со сменой направления эволюции с разрывным коэффициентом.

Пусть Ω — ограниченная область с гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, $T > 0$. Рассмотрим цилиндр $Q = \Omega \times (-T,T) = \{(x,y) \mid x \in \Omega, -T < y < T\}$. Пусть $A\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a^{ij}(x)u_{x_i}\big)$ — эллиптический оператор. Здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование. Обозначим $Q^+ = \Omega \times (0,T)$, $Q^- = \Omega \times (-T,0)$. В цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\, u_{yyy} - A\,u + c(x,y)u = f(x,y). \tag{1}$$

Для этого уравнения рассмотрим следующие краевые задачи.

Краевая задача I. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1) *в подобластях Q^+ и Q^-, краевым условиям*

$$\begin{gathered} u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\ u(x,T) = u_y(x,T) = 0, \\ u(x,-T) = u_y(x,-T) = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

* Работа выполнена при поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (государственный контракт № 16.740.11.0127).

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} u(x,+0) &= \alpha\, u(x,-0), \\ \beta\, u_{yy}(x,+0) &= u_{yy}(x,-0). \end{aligned} \tag{3}$$

Краевая задача II. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1) *в подобластях Q^+ и Q^-, краевым условиям*

$$\begin{aligned} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,y)\nu_j(x)\big|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u(x,T) = u_y(x,T) &= 0, \\ u(x,-T) = u_y(x,-T) &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

и условиям сопряжения (3).

Здесь $\nu(x)$ — внешняя нормаль к границе области Ω.

Краевая задача III. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1) *в подобластях Q^+ и Q^-, краевым условиям*

$$\begin{aligned} u(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u_y(x,T) = u_{yy}(x,T) &= 0, \\ u_y(x,-T) = u_{yy}(x,-T) &= 0, \end{aligned} \tag{5}$$

и условиям сопряжения (3).

Краевая задача IV. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (1) *в подобластях Q^+ и Q^-, краевым условиям*

$$\begin{aligned} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,y)\nu_j(x)\big|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u_y(x,T) = u_{yy}(x,T) &= 0, \\ u_y(x,-T) = u_{yy}(x,-T) &= 0, \end{aligned} \tag{6}$$

и условиям сопряжения (3).

Под *решением* краевой задачи I (II, III, IV) будем понимать функцию $u(x,y)$ такую, что $u|_{Q^+} \in W_2^{2,3}(Q^+)$, $u|_{Q^-} \in W_2^{2,3}(Q^-)$, и такую, что она почти всюду в областях Q^+ и Q^- удовлетворяет уравнению (1) (в котором производные понимаются как обобщенные производные Соболева в соответствующих областях), краевым условиям (2) ((4), (5), (6) соответственно) и условиям сопряжения (3).

Сначала рассмотрим данные краевые задачи для уравнения (1) в случае, когда $A = \Delta$, т. е. для уравнения

$$\operatorname{sign} y\, u_{yyy} - \Delta\, u + c(x,y)u = f(x,y).$$

Далее будем рассматривать задачу для системы из двух уравнений, которая связана с краевой задачей I.

Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, которые в цилиндре Q^+ являются решениями уравнений

$$\begin{aligned} u_{yyy} + \Delta u + c_1(x,y)u &= f_1(x,y), \\ v_{yyy} + \Delta v + c_2(x,y)v &= f_2(x,y), \end{aligned} \tag{7}$$

и такие, что для них выполняются условия

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &= 0,\\ v|_{\partial\Omega\times(0,T)} &= 0,\\ u(x,0) = u_y(x,0) &= 0,\\ v(x,0) = v_y(x,0) &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u(x,T) &= \alpha\, v(x,T),\\ \beta\, u_{yy}(x,T) &= v_{yy}(x,T). \end{aligned} \tag{9}$$

Далее перейдем к доказательству теорем существования и единственности задачи (7)–(9). Переобозначим для удобства $Q := Q^+$.

Лемма 1. *Пусть u, v — решение задачи (7)–(9), и пусть $\alpha\beta < 0$, $c_1(x,y) \leqslant 0$, $c_2(x,y) \leqslant 0$. Тогда справедлива следующая оценка:*

$$\|u\|_{L_2(Q)} + \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant C(\|f_1\|_{L_2(Q)} + \|f_2\|_{L_2(Q)}), \tag{10}$$

где постоянная C определяется числами α, β и областью Q.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу того что $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют уравнениям (7), справедливо следующее интегральное тождество:

$$-\int_0^T\int_\Omega (u_{yyy} + \Delta\, u + c_1(x,y)u)u\,dx\,dy + \\ + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^T\int_\Omega (v_{yyy} + \Delta\, v + c_2(x,y)v)v\,dx\,dy = \\ = -\int_0^T\int_\Omega \Big(f_1(x,y)u - \frac{\alpha}{\beta}f_2(x,y)v\Big)\,dx\,dy.$$

В левой части этого тождества воспользуемся формулой интегрирования по частям и условиями (8), (9). В правой части используем неравенство Юнга. В результате придем к неравенству:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u_y^2(x,T)\,dx - \frac{\alpha}{2\beta}\int_\Omega v_y^2(x,T)\,dx + \int_0^T\int_\Omega \Big((\nabla u)^2 - \frac{\alpha}{\beta}(\nabla v)^2\Big)\,dx\,dy - \\ - \int_0^T\int_\Omega c_1(x,y)u^2\,dx\,dy + \frac{\alpha}{\beta}\int_0^T\int_\Omega c_2(x,y)v^2\,dx\,dy \leqslant \\ \leqslant \frac{\delta_1^2}{2}\int_0^T\int_\Omega u^2\,dx\,dy + \frac{\delta_2^2}{2}\int_0^T\int_\Omega v^2\,dx\,dy + \\ + \frac{1}{2\delta_1^2}\int_0^T\int_\Omega f_1^2(x,y)\,dx\,dy + \frac{1}{2\delta_2^2}\frac{\alpha^2}{\beta^2}\int_0^T\int_\Omega f_2^2(x,y)\,dx\,dy.$$

Остается воспользоваться неравенством Фридрихса – Пуанкаре и подобрать подходящие δ_1 и δ_2, чтобы получить оценку (10). Лемма доказана. □

Следствие 1. *Пусть* $\alpha\beta \leqslant 0$. *Тогда задача* (7)–(9) *имеет не более одного решения.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha\beta < 0$, то из леммы 1 сразу следует единственность.

Пусть $\alpha = 0$. Тогда существует единственное решение задачи для первого уравнения из уравнений (7), с первым и третьим условием из (8) и первым условием из (9) (см. [1; 2]). Для доказательства единственности задачи (7)–(9) достаточно доказать, что при $f_1 \equiv f_2 \equiv 0$ решение задачи есть тождественно нулевые функции. Известно, что тогда $u(x,y) \equiv 0$. Но при этом второе из условий (9) принимает вид $v_{yy}(x,T) = 0$, и, таким образом, решение задачи для $v(x,y)$ единственно, и $v(x,y) \equiv 0$. Аналогично при $\beta = 0$. □

Теорема 1. *Пусть* $f_1, f_2 \in L_2(Q)$, $c_1, c_2 \in L_\infty(Q)$, $c_1(x,y) \leqslant 0$, $c_2(x,y) \leqslant 0$ *почти всюду и* $\alpha\beta \leqslant 0$. *Тогда задача (7)–(9) имеет единственное решение* (u,v) *такое, что* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *принадлежат пространству*

$$V_0(Q) = W_2^{2,3}(Q).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $\alpha\beta = 0$, то задача разрешима. Например, при $\alpha = 0$ получаем разрешимую задачу для $u(x,y)$. Учитывая существование решения $u(x,y)$, получаем разрешимую задачу для $v(x,y)$ (см. [1; 2]).

Пусть далее $\alpha\beta < 0$. Рассмотрим линейные дифференциальные операторы

$$\mathcal{L}^i_\varepsilon u = \varepsilon\Delta^2 u_{yyy} + u_{yyy} + \Delta u + c_i(x,y)u$$

при $\varepsilon > 0$, $i \in \{1,2\}$. Рассмотрим также регуляризованную задачу: найти функции u и v из пространства

$$V = \{u \mid u \in L_2(Q), u_{yyy} \in L_2(Q), \forall i,j = \overline{1,n}\ u_{x_ix_i} \in L_2(Q), u_{x_ix_ix_jx_jyyy} \in L_2(Q)\},$$

удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_\varepsilon u &= f_1(x,y), \\ \mathcal{L}^2_\varepsilon v &= f_2(x,y), \end{aligned} \tag{7_ε}$$

краевым условиям

$$\begin{aligned} u|_{\partial\Omega\times(0,T)}\ \Delta u|_{\partial\Omega\times(0,T)} &= 0, \\ v|_{\partial\Omega\times(0,T)}\ \Delta v|_{\partial\Omega\times(0,T)} &= 0, \\ u(x,0) = u_y(x,0) &= 0, \\ v(x,0) = v_y(x,0) &= 0 \end{aligned} \tag{$8'$}$$

и условиям сопряжения (9).

Докажем разрешимость задачи (7_ε),$(8')$, (9). Для этого воспользуемся методом продолжения по параметру. Определим операторы

$$\mathcal{L}^i_\varepsilon(\lambda)u = \varepsilon\Delta^2 u_{yyy} + u_{yyy} + \lambda(\Delta u + c_i(x,y)u), \quad i \in 1,2.$$

Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,y)$, $v(x,y) \in V$, удовлетворяющие соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_\varepsilon(\lambda)u &= f_1(x,y), \\ \mathcal{L}^2_\varepsilon(\lambda)v &= f_2(x,y), \end{aligned} \tag{$7_{\varepsilon,\lambda}$}$$

краевым условиям ($8'$) и условиям сопряжения (9).

Обозначим через Λ множество чисел $\lambda \in [0,1]$, для которых задача ($7_{\varepsilon,\lambda}$), ($8'$), (9) разрешима. Докажем, что это множество не пусто, открыто и замкнуто.

При $\lambda = 0$ получаем задачу для уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon\Delta^2 u_{yyy} + u_{yyy} &= f_1(x,y), \\ \varepsilon\Delta^2 v_{yyy} + v_{yyy} &= f_2(x,y) \end{aligned} \tag{10}$$

с теми же условиями. Если (u,v) — решение задачи (10), ($8'$), (9), то пара (w_1,w_2), где $w_1 = u_{yyy}$, $w_2 = v_{yyy}$, — решение задачи из пространства $\tilde{V} \times \tilde{V}$, где $\tilde{V} = \{w \mid w \in L_2(Q), \Delta^2 w \in L_2(Q)\}$ для уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon\Delta^2 w_1 + w_1 &= f_1(x,y), \\ \varepsilon\Delta^2 w_2 + w_2 &= f_2(x,y) \end{aligned} \tag{11}$$

с условиями такими, как первое условие из ($8'$). Обратно, если (w_1,w_2) — решение этой задачи из пространства $\tilde{V} \times \tilde{V}$, то, положив

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{1}{2}\int_0^y (y-\eta)^2 w_1(x,\eta)\,d\eta + a(x)y^2, \\ v(x,y) &= \frac{1}{2}\int_0^y (y-\eta)^2 w_2(x,\eta)\,d\eta + b(x)y^2, \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\begin{aligned} a(x) &= \frac{1}{2T^2(1-\alpha\beta)}\int_0^T (T-\eta)^2(\alpha w_2 - w_1)\,d\eta + \frac{\alpha}{2(1-\alpha\beta)}\int_0^T (\beta w_1 - w_2)\,d\eta, \\ b(x) &= \frac{\beta}{2T^2(1-\alpha\beta)}\int_0^T (T-\eta)^2(\alpha w_2 - w_1)\,d\eta + \frac{1}{2(1-\alpha\beta)}\int_0^T (\beta w_1 - w_2)\,d\eta \end{aligned}$$

($a(x)$ и $b(x)$ найдены из краевых условий и условий сопряжения), получим (u,v) — решение задачи ($7_{\varepsilon,0}$), ($8'$), (9) из пространства $V \times V$. Задача для уравнений (11) с условиями вида первого условия из ($8'$) имеет единственное решение из пространства $\tilde{V} \times \tilde{V}$. Это можно получить, используя разрешимость задачи Дирихле для уравнения Пуассона, априорные оценки и метод продолжения по параметру. Таким образом, мы доказали, что $0 \in \Lambda$.

Получим априорные оценки. Сначала умножим уравнения ($7_{\varepsilon,\lambda}$) на u и на $-\frac{\alpha}{\beta}v$. Воспользовавшись условиями ($8'$), (9) и формулой интегрирования по частям, придем к неравенству

$$\begin{aligned} \lambda\Big(\int_Q \big((\nabla u)^2 + (\nabla v)^2\big)\,dx\,dy + \int_Q \big(c_1(x,y)u^2 + c_2(x,y)v^2\big)\,dx\,dy\Big) &\leqslant \\ \leqslant K'\big(\|f_1\|^2_{L_2(Q)} + \|f_2\|^2_{L_2(Q)}\big).& \end{aligned} \tag{13}$$

Далее умножим уравнения $(7_{\varepsilon,\lambda})$ на u_{yyy} и на $-\frac{\alpha}{\beta}v_{yyy}$ соответственно, сложим и проинтегрируем по Q. Пользуясь полученным неравенством, формулой интегрирования по частям и условиями $(8')$, (9), получим

$$\int\limits_Q \Big(\varepsilon(\Delta u_{yyy})^2 - \frac{\alpha}{\beta}\varepsilon(\Delta v_{yyy})^2\Big)\,dx\,dy + \int\limits_Q \Big(u_{yyy}^2 - \frac{\alpha}{\beta}v_{yyy}^2\Big)\,dx\,dy +$$

$$+\frac{1}{2}\lambda\int\limits_\Omega \Big((\nabla u_y)^2(x,T) - \frac{\alpha}{\beta}(\nabla v_y)^2(x,T)\Big)\,dx =$$

$$= -\int\limits_Q \Big(c_1(x,y)u^2 - \frac{\alpha}{\beta}c_2(x,y)v^2\Big) + \int\limits_Q \Big(f_1(x,y)\,u_{yyy} - \frac{\alpha}{\beta}f_2(x,y)\,v_{yyy}\Big)\,dx\,dy.$$

Применяя в правой части неравенство Юнга и пользуясь неравенством (13), получим следующую оценку:

$$\begin{gathered}\varepsilon\|\Delta u_{yyy}\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon\|\Delta v_{yyy}\|^2_{L_2(Q)} + \|u_{yyy}\|^2_{L_2(Q)} + \\ +\|v_{yyy}\|^2_{L_2(Q)} \leqslant K_1^2\left(\|f_1\|^2_{L_2(Q)} + \|f_2\|^2_{L_2(Q)}\right),\end{gathered}\tag{14}$$

где K_1 определяется числами α, β и областью Q. Далее заметим, что соотношения (12) превратятся в тождество, если вместо w_1 и w_2 поставить соответственно u_{yyy} и v_{yyy}. Из этих тождеств нетрудно получить оценку

$$\|u\|_{L_2(Q)} + \|v\|_{L_2(Q)} \leqslant \tilde{K}\big(\|u_{yyy}\|_{L_2(Q)} + \|v_{yyy}\|_{L_2(Q)}\big).$$

Из соотношений (12) можно также получить оценку для функций Δu и Δv

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q)} + \|\Delta v\|_{L_2(Q)} \leqslant \tilde{\tilde{K}}\big(\|\Delta u_{yyy}\|_{L_2(Q)} + \|\Delta v_{yyy}\|_{L_2(Q)}\big).$$

Учитывая эти оценки и оценку (14), получаем

$$\begin{gathered}\varepsilon\|\Delta u\|^2_{L_2(Q)} + \varepsilon\|\Delta v\|^2_{L_2(Q)} + \|u\|^2_{L_2(Q)} + \|v\|^2_{L_2(Q)} \leqslant \\ \leqslant K_2^2\left(\|f_1\|^2_{L_2(Q)} + \|f_2\|^2_{L_2(Q)}\right).\end{gathered}\tag{15}$$

Число K_2, так же как и K_1, определяется числами α, β и областью Q. Осталось получить оценку для функций $\Delta^2 u_{yyy}$ и $\Delta^2 v_{yyy}$. Для этого умножим уравнения $(7_{\varepsilon,\lambda})$ на $\varepsilon\Delta^2 u_{yyy}$ и $\varepsilon\Delta^2 v_{yyy}$ соответственно, сложим и проинтегрируем по Q. Пользуясь полученными оценками, неравенством Юнга и тем фактом, что $\lambda \leqslant 1$, получим неравенство

$$\varepsilon\|\Delta^2 u_{yyy}\|_{L_2(Q)} + \varepsilon\|\Delta^2 v_{yyy}\|_{L_2(Q)} \leqslant K_3\big(\|f_1\|_{L_2(Q)} + \|f_2\|_{L_2(Q)}\big),\tag{16}$$

в котором число K_3 определяется α, β и Q. Из оценок (14)–(16) получаем

$$\begin{gathered}\|(u,v)\|_{V\times V} = \|u\|_V + \|v\|_V \leqslant \\ \leqslant K\big(\|f_1\|_{L_2(Q)} + \|f_2\|_{L_2(Q)}\big) = K\|(f_1,f_2)\|_{L_2(Q)\times L_2(Q)}.\end{gathered}\tag{17}$$

Здесь символами $\|\cdot\|_{V\times V}$ и $\|\cdot\|_{L_2(Q)\times L_2(Q)}$ обозначены нормы в пространствах $V\times V$ и $L_2(Q)\times L_2(Q)$ соответственно.

Определим оператор $\mathcal{A}(\lambda)(u,v) = (\mathcal{L}_\varepsilon(\lambda)u, \mathcal{L}_\varepsilon(\lambda)v)$. Это линейный непрерывный оператор, действующий из $V\times V$ в $L_2(Q)\times L_2(Q)$. Разрешимость задачи $(7_{\varepsilon,0,\lambda})$, $(8')$, (9) эквивалентна непрерывной обратимости оператора $\mathcal{A}(\lambda)$. Также заметим, что оценка (17) эквивалентна тому, что если оператор $\mathcal{A}(\lambda)$ обратим, то $\left\|\mathcal{A}(\lambda)^{-1}\right\| \leqslant K$, причем K не зависит от λ.

Из теоремы о продолжении по параметру (см. [6]) следует, что $\mathcal{A}(1)$ обратим. Таким образом, доказана разрешимость задачи (7_ε), $(8')$, (9) для любого ε.

Докажем теперь, что при $\varepsilon \to 0$ решения задачи (7_ε), $(8')$, (9) стремятся к решению задачи (7)–(9). Для этого получим оценку функций Δu и Δv не зависящую от ε. Умножим уравнения (7_ε) на Δu и $\frac{\alpha}{\beta}\Delta v$ соответственно и, пользуясь условиями $(8')$, (9), получим оценку

$$\|\Delta u\|_{L_2(Q)} + \|\Delta v\|_{L_2(Q)} \leqslant K_4\big(\|f_1\|_{L_2(Q)} + \|f_2\|_{L_2(Q)}\big), \quad K_4 \text{ не зависит от } \varepsilon. \tag{18}$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такую, что $\varepsilon_k \to 0$ при $k\to\infty$. Получим последовательность решений $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. В силу оценок (14), (15), (18) эта последовательность ограничена в $V_0(Q)$, и из нее можно выбрать слабо сходящуюся в $V_0(Q)$ подпоследовательность. Таким образом, существует функция $u(x,y)\in V_0(Q)$ такая, что $u_{k_l}\to u$ слабо в $V_0(Q)$ при $l\to\infty$. Аналогично существует функция $v(x,y)$ и подпоследовательность $v_{k_{l_m}}(x,y)$ слабо сходящаяся к $v(x,y)$ в $V_0(Q)$. Таким образом, получены следующие последовательности:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_l \to 0 && \text{при } l\to\infty,\\ &u_l \to u && \text{слабо в } V_0(Q) \text{ при } l\to\infty,\\ &v_l \to v && \text{слабо в } V_0(Q) \text{ при } l\to\infty. \end{aligned}$$

Докажем, что $\varepsilon_l\Delta^2\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l \to 0$ слабо в $L_2(Q)$ при $l\to\infty$. Сначала возьмем $\eta\in C_0^\infty$ и рассмотрим

$$\left|\int\limits_Q \varepsilon_l\Delta^2\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l\,\eta\,dx\,dy\right| \left|\int\limits_Q \varepsilon_l\Delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l\,\Delta\eta\,dx\,dy\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon_l\sqrt{\int\limits_Q \Delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l^2\,dx\,dy}\sqrt{\int\limits_Q \Delta\eta^2\,dx\,dy} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon_l}\|\Delta\eta\|_{L_2(Q)}\left(\sqrt{\varepsilon_l}\left\|\Delta\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l\right\|_{L_2(Q)}\right) \leqslant M_1\sqrt{\varepsilon_l}\to 0.$$

Здесь использованы неравенство Коши – Буняковского, формула интегрирования по частям и оценка (13). Постоянная M_1 определяется функциями $\eta(x,y)$, $f_1(x,y)$ и $f_2(x,y)$, числами α, β и областью Q. Пусть $\varepsilon_l\Delta^2\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l$ слабо в $L_2(Q)$ сходится к функции w. Тогда

$$\int\limits_Q \varepsilon_l\Delta^2\frac{\partial^3}{\partial y^3}u_l\eta\,dx\,dy \to \int\limits_Q w\eta\,dx\,dy$$

для всех $\eta\in L_2(Q)$. Следовательно,

$$\int\limits_Q w\eta\,dx\,dy = 0$$

для всех $\eta \in C_0^\infty(Q)$. В силу плотности $C_0^\infty(Q)$ в $L_2(Q)$ получаем, что $w = 0$.

Аналогично доказывается, что $\varepsilon_l \Delta \frac{\partial^3}{\partial y^3} v_l \to 0$ слабо в $L_2(Q)$. Таким образом, мы получили функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, которые удовлетворяют краевым условиям, условиям сопряжения и уравнениям (7), т. е. получим решение задачи (7)–(9). □

Далее вернемся к старым обозначениям $Q := \Omega \times (-T, T)$, $Q^+ = \Omega \times (0, T)$, $Q^- = \Omega \times (-T, 0)$.

Следствие 2. *Пусть $f(x, y) \in L_2(Q)$, $c(x, y) \in L_\infty(Q)$, $c(x, y) \geqslant 0$ почти всюду и пусть $\alpha\beta \leqslant 0$. Тогда краевая задача I имеет единственное решение из пространства $V_1 = \{u \mid u|_{Q^+} \in V_0(Q^+), u|_{Q^-} \in V_0(Q^-)\}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть u — решение краевой задачи I. Рассмотрим $u^+ = u|_{Q^+}$ и $u^- = u|_{Q^-}$. Тогда не трудно проверить, что функции $u_1(x, y) = u^+(x, T - y)$ и $v_1(x, y) = u^-(x, y - T)$, определенные в Q^+ и принадлежащие $V_0(Q^+)$, являются решениями задачи (7)–(9) при $f_1(x, y) = -f(x, T - y)$, $f_2(x, y) = -f(x, y - T)$, $c_1(x, y) = -c(x, T - y)$, $c_2(x, y) = -c(x, y - T)$. Таким образом, решение краевой задачи I единственно.

Пусть теперь пара функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ — решение задачи (7)–(9) с указанными выше функциями $f_1(x, y)$, $f_2(x, y)$, $c_1(x, y)$, $c_2(x, y)$. Тогда функция

$$u_1(x, y) = \begin{cases} u(x, T - y), & 0 < y < T, \\ v(x, T + y), & -T < y < 0, \end{cases}$$

является решением краевой задачи I, т. е. задача I имеет решение. Следствие доказано. □

Аналогичным образом подобный результат можно получить для краевых задач I и III с произвольным эллиптическим оператором $A\,u = \frac{\partial}{\partial x_j}\big(a^{ij}(x) u_{x_i}\big)$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия $f(x, y) \in L_2(Q)$, $c(x, y) \in L_\infty(Q)$ $a^{ij}(x) \in C^1(\Omega)$, $c(x, y) \leqslant 0$ и $\alpha\beta \leqslant 0$. Пусть также существует $\mu > 0$, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \mu|\xi|^2$. Тогда краевые задачи I, III имеют единственное решение из пространства V_1.*

Рассмотрим теперь задачи II и IV.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2, и пусть существует константа c_0 такая, что $c(x, y) \geqslant c_0 > 0$ для почти всех (x, y). Тогда краевые задачи II, IV имеют единственное решение из пространства V_1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим задачи, аналогичные задаче (7)–(9). Построение регуляризации для этих задач аналогичное за исключением того, что используются следующие дополнительные краевые условия:

$$a^{ij}(x)\Delta u_{x_i}(x, y)\nu_j(x)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0, \quad a^{ij}(x)\Delta v_{x_i}(x, y)\nu_j(x)\big|_{x \in \partial\Omega} = 0.$$

В остальном схема доказательства теоремы 1 полностью применима для этих задач. □

Далее в цилиндре Q рассмотрим уравнение

$$\operatorname{sign} y\, u_{yyy} + A\, u + c(x,y)u = f(x,y). \tag{19}$$

Для этого уравнения рассмотрим краевые задачи.

Краевая задача V. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (19), *краевым условиям*

$$\begin{aligned} u(x,y)\big|_{x\in\partial\Omega} &= 0,\\ u(x,T) &= 0,\\ u(x,-T) &= 0, \end{aligned} \tag{20}$$

и условиям сопряжения

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T u(x,y)\,dy &= \alpha_1 \int\limits_{-T}^0 u(x,y)\,dy,\\ u(x,+0) &= \alpha_2 u(x,-0),\\ \beta_1 u_y(x,+0) &= u_y(x,-0),\\ \beta_2 u_{yy}(x,+0) &= u_{yy}(x,-0). \end{aligned} \tag{21}$$

Краевая задача VI. *Найти функцию $u(x,y)$, определенную в области Q, удовлетворяющую уравнению* (19), *краевым условиям*

$$\begin{aligned} a^{ij}(x)u_{x_i}(x,y)\nu_j(x)\big|_{x\in\partial\Omega} &= 0,\\ u(x,T) &= 0,\\ u(x,-T) &= 0, \end{aligned} \tag{22}$$

и условиям сопряжения (21).

Под *решением* краевых задач V, VI будем понимать такую функцию $u(x,y) \in V_1$, что она почти всюду в областях Q^+ и Q^- удовлетворяет уравнению (19) (в котором производные понимаются как обобщенные производные Соболева в соответствующих областях), а также соответствующим краевым условиям и условиям сопряжения (21).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$$f(x,y) \in L_2(Q), \quad a^{ij}(x) \in C^1(\Omega), \quad c(x,y) \in L_\infty(Q),$$

$$\exists \big(c|_{Q^+}\big)_y(x,y) \in L_\infty(Q^+), \quad \exists \big(c|_{Q^-}\big)_y(x,y) \in L_\infty(Q^-), \quad \exists c(x,+0) \leqslant 0, \quad \exists c(x,-0) \leqslant 0,$$

$$\big(c|_{Q^+}\big)_y(x,y) \leqslant 0, \quad \big(c|_{Q^-}\big)_y(x,y) \geqslant 0 \quad \alpha_2\beta_1 \geqslant 0 \text{ и } \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = 0.$$

Пусть также существует $\mu > 0$ такое, что для любого $\xi \in \mathbb{R}^n$ выполнено $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \geqslant \mu|\xi|^2$. Тогда краевые задачи V и VI имеют единственное решение из пространства V_1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему для случая $A = \Delta$. Для эллиптического оператора с условиями, выписанными в формулировке теоремы, доказательство аналогичное.

Рассмотрим задачу: найти функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ из пространства $V_0(Q^+)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{gathered} u_{yyy} - \Delta u + c_1(x,y)u = f_1(x,y), \\ v_{yyy} - \Delta v + c_2(x,y)v = f_2(x,y) \end{gathered} \tag{23}$$

и условиям

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ v(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u(x,0) &= 0, \\ v(x,0) &= 0, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_0^T u(x,y)\,dy &= \alpha_1 \int\limits_0^T v(x,y)\,dy, \\ u(x,T) &= \alpha_2 v(x,T), \\ -\beta_1 u_y(x,T) &= v_y(x,T), \\ \beta_2 u_{yy}(x,T) &= v_{yy}(x,T). \end{aligned} \tag{25}$$

Так же, как в следствии к теореме 1, доказывается, что задача (23)–(25) эквивалентна краевой задаче V. Для задачи VI можно получить аналогичную задачу для уравнений (23) с соответствующими краевыми условиями.

Пусть $u(x,y)$ и $v(x,y)$ — решение задачи (23)–(25). Положим

$$u_1(x,y) = \int\limits_0^y u(x,\eta)\,d\eta, \quad v_1(x,y) = \int\limits_0^y v(x,\eta)\,d\eta.$$

Заметим, что $(u_1)_y(x,y) = u(x,y)$, $(v_1)_y(x,y) = v(x,y)$.

Докажем единственность. Заметим, что из условий теоремы следует, что если $\alpha_1 = 0$, то $\alpha_2 = 0$ или $\beta_2 = 0$. Также если $\alpha_2 = 0$, то $\alpha_1 = 0$ или $\beta_1 = 0$. Пусть сначала либо $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, либо $\alpha_1\beta_2 \neq 0$. Тогда умножим первое уравнение (23) на $u_1(x,y)$, второе — на $\frac{\alpha_2}{\beta_1}v_1(x,y)$, если $\alpha_2\beta_1 \neq 0$, и на $-\frac{\alpha_1}{\beta_2}v_1(x,y)$, если $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, затем сложим и проинтегрируем по Q^+. Пользуясь условиями (24), (25) и формулой интегрирования по частям, придем к соотношению (в случае $\alpha_2\beta_1 \neq 0$)

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q^+} \left((u_1)^2_{yy} + \frac{\alpha_2}{\beta_1}(v_1)^2_{yy} \right) dx\,dy + \int\limits_{\Omega} \left((\nabla u_1)^2(x,T) + \frac{\alpha_2}{\beta_1}(\nabla v_1)^2(x,T) \right) dx + \\ + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} \left(c_1(x,T)u_1^2(x,T) + \frac{\alpha_2}{\beta_1}c_2(x,T)v_1^2(x,T) \right) dx = \\ = \int\limits_{Q^+} \left(f_1(x,y)u_1 + \frac{\alpha_2}{\beta_1}f_2(x,y)v_1 \right) dx\,dy. \end{gathered} \tag{26}$$

В силу условий (24) справедливы неравенства

$$\begin{gathered} \int\limits_{Q^+} u_1^2\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{Q^+} u^2\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{Q^+} u_y^2\,dx\,dy, \\ \int\limits_{Q^+} v_1^2\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{Q^+} v^2\,dx\,dy \leqslant \int\limits_{Q^+} v_y^2\,dx\,dy. \end{gathered}$$

Из этих неравенств и соотношения (26), пользуясь неравенством Юнга, получаем оценку

$$\|u_y\|_{L_2(Q^+)} + \|v_y\|_{L_2(Q^+)} + \|u\|_{L_2(Q^+)} + \|v\|_{L_2(Q^+)} \leqslant K\big(\|f_1\|_{L_2(Q^+)} + \|f_2\|_{L_2(Q^+)}\big),$$

из которой сразу следует единственность.

Пусть теперь $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$. Тогда либо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Пусть для определенности $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Единственность следует из того, что если $f_1(x,y) \equiv \equiv f_2(x,y) \equiv 0$, то $u_1(x,y) \equiv v_1(x,y) \equiv 0$. Докажем это. Так как $f_1(x,y) \equiv 0$, то получаем задачу для уравнения

$$(u_1)_{yyyy} - \Delta\,(u_1)_y + c_1(x,y)(u_1)_y = 0$$

с условиями

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ u_1(x,0) &= 0, \qquad (u_1)_y(x,0) = 0, \\ u_1(x,T) &= 0, \qquad (u_1)_y(x,T) = 0, \end{aligned}$$

которая имеет единственное решение (см. [1; 2]), т. е. $u_1(x,y) \equiv 0$. В результате получаем задачу для следующего уравнения:

$$(v_1)_{yyyy} - \Delta\,(v_1)_y + c_1(x,y)(v_1)_y = 0$$

с условиями

$$\begin{aligned} v(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= 0, \\ v_1(x,0) &= 0, \qquad (v_1)_y(x,0) = 0, \\ (v_1)_{yy}(x,T) &= 0, \qquad (v_1)_{yyy}(x,T) = 0, \end{aligned}$$

которая тоже имеет единственное решение, т. е. $v_1(x,y) \equiv 0$. Отсюда следует, что $u(x,y) \equiv \equiv v(x,y) \equiv 0$. Таким образом, единственность решения задач V и VI доказана.

Доказательство существования будем проводить аналогично теореме 1. Сначала будем предполагать, что либо $\alpha_1\beta_2 \neq 0$, либо $\alpha_2\beta_1 \neq 0$. Для определенности $\alpha_2\beta_1 \neq 0$. Пусть $\mathcal{L}^i_\varepsilon u = \varepsilon\Delta^2 u_{yyy} + u_{yyy} - \Delta\,u + c_i(x,y)u$. Рассмотрим регуляризованную задачу: найти функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, определенные в Q^+, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1_\varepsilon u &= f_1(x,y), \\ \mathcal{L}^2_\varepsilon v &= f_2(x,y), \end{aligned} \tag{23_ε}$$

краевым условиям

$$\begin{aligned} u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= \Delta u(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\ v(x,y)|_{x\in\partial\Omega} &= \Delta v(x,y)|_{x\in\partial\Omega} = 0, \\ u(x,0) &= v(x,0) = 0 \end{aligned} \tag{$24'$}$$

и условиям сопряжения (25).

Рассмотрим также оператор

$$\mathcal{L}^i_\varepsilon(\lambda) = \varepsilon\Delta^2 u_{yyy} + u_{yyy} - \lambda(\Delta\,u + c_i(x,y)u)$$

и задачу: найти функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$, определенные в Q^+, удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^1_\varepsilon(\lambda)u &= f_1(x,y),\\ \mathcal{L}^2_\varepsilon(\lambda)v &= f_2(x,y),\end{aligned} \tag{$23_{\varepsilon,\lambda}$}$$

краевым условиям $(24')$ и условиям сопряжения (25).

Сначала докажем, что задача $(23_{\varepsilon,\lambda})$, $(24')$, (25) разрешима при $\lambda = 1$, затем, что задача (23_ε), $(24')$, (25) разрешима при любом $\varepsilon > 0$ и что решения стремятся к решению исходной задачи (23)–(25) при $\varepsilon \to 0$.

Получим априорные оценки, подобные оценкам из теоремы 1. Сначала умножим первое уравнение $(23_{\varepsilon,\lambda})$ на $u_1(x,y)$, второе — на $\frac{\alpha_2}{\beta_1}v_1(x,y)$, сложим и проинтегрируем по Q^+. Получим оценку

$$\|u_y\| + \|u\| + \|v_y\| + \|v\| \leqslant K_1\bigl(\|f_1\| + \|f_2\|\bigr).$$

Здесь и далее числа K_1, K_2, K_3 и K_4 определяются числами α_1, α_2, β_1, β_2 и областью Q^+. Под символом $\|\cdot\|$ понимается $\|\cdot\|_{L_2(Q^+)}$. Далее умножим первое уравнение $(23_{\varepsilon,\lambda})$ на $\Delta^2 u_1$, второе — на $\frac{\alpha_2}{\beta_1}\Delta^2 v_1$, сложим и проинтегрируем по Q^+. После интегрирования по частям получим

$$\|\Delta u_y\| + \|\Delta v_y\| + \|\Delta u\| + \|\Delta v\| \leqslant K_2\bigl(\|f_1\| + \|f_2\|\bigr).$$

Теперь умножим первое уравнение на u_{yyy}, второе — на v_{yyy} и опять сложим и проинтегрируем по Q^+. Учитывая полученные оценки, придем к неравенству

$$\varepsilon\bigl(\|\Delta u_{yyy}\|^2 + \|\Delta v_{yyy}\|^2\bigr) + \|u_{yyy}\|^2 + \|v_{yyy}\|^2 \leqslant K_3^2\bigl(\|f_1\| + \|f_2\|\bigr)^2.$$

Наконец, умножим уравнения $(23_{\varepsilon,\lambda})$ на $\varepsilon\Delta^2 u_{yyy}$ и на $\varepsilon\Delta^2 v_{yyy}$ соответственно, сложим, проинтегрируем по Q^+ и, учитывая предыдущие оценки, получим

$$\varepsilon\|\Delta^2 u_{yyy}\| + \varepsilon\|\Delta^2 v_{yyy}\| \leqslant K_4\bigl(\|f_1\| + \|f_2\|\bigr).$$

Полученных оценок достаточно, чтобы воспользоваться теоремой о продолжении по параметру (см. [6]) и затем, переходя к переделу при $\varepsilon \to 0$, получить решение задачи (23)–(25) и, следовательно, задачи V. Аналогично получим решение задачи VI.

В случае $\alpha_1\beta_2 = \alpha_2\beta_1 = 0$ приходим к ситуации, когда либо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, либо $\beta_1 = \beta_2 = 0$. Таким образом, получаем распадающуюся задачу, у которой существует решение (см. [1; 2]). Теорема доказана. □

Список литературы

1. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптико-параболические уравнения // Мат. сб. 1968. Т. 77, № 3 С. 354–389.

2. *Дубинский Ю. А.* Краевые задачи для некоторых классов дифференциально-операторных уравнений высокого порядка // ДАН СССР. 1971. Т. 196, № 1. С. 32–35.

3. *Джураев Т. Д., Апаков Ю. П.* Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-мат. науки. 2007. № 2 (15). С. 18–26.

4. *Егоров И. Е., Федоров В. Е.* Неклассические уравнения математической физики высокого порядка. Новосибирск, 1995.

5. *Терсенов С. А.* Параболические уравнения с меняющимся направлением времени. Новосибирск, 1985. 107 с.

6. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Физматлит, 2002.

Материал поступил в редколлегию 04.03.2011

Адрес автора

ШУБИН Владислав Валерьевич

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: vsh1000@gmail.com