УДК 519.21

В. И. Лотов

О СХОДИМОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА ПОЛУОСИ*

Приводится обобщение известного закона арксинуса для распределения времени пребывания случайного блуждания на полуоси. Кроме того, в условиях Краме́ра найдено асимптотическое представление производящей функции времени пребывания выше растущего уровня при наличии отрицательного сноса блуждания.

Ключевые слова: случайное блуждание, время пребывания на полуоси, закон арксинуса, факторизационный метод, производящие функции, асимптотический анализ.

Рассматривается последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин $\{X_n,\ n \geq 1\}$, имеющих невырожденное распределение, и пусть $S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ \ n \geq 1$. Для произвольного $b \geq 0$ введем

$$T_n(b) = \sum_{k=1}^{n} I_{\{S_k > b\}}\,,$$

где $I_A(\omega) = 1$, если $\omega \in A$, и $I_A(\omega) = 0$ в противном случае. Таким образом, $T_n(b)$ есть время пребывания случайного блуждания во множестве (b, ∞) на общем интервале времени $[1, \ldots, n]$, т. е. число точек $k,\ 1 \leq k \leq n$, таких, что $S_k > b$.

Мы будем изучать предельное поведение распределения случайной величины $T_n(b)$ при $n \to \infty$, в том числе при условии, что $b = b(n)$.

1. Случайное блуждание без сноса

Хорошо известен следующий классический результат (закон арксинуса) [1].

Теорема 1. *Если распределение* X_1 *симметрично или если* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$, *то для любого* $0 < x < 1$ *при* $b = 0$

$$\mathbf{P}\left(\frac{T_n(b)}{n} < x\right) \to \frac{2}{\pi} \arcsin \sqrt{x}, \qquad n \to \infty. \tag{1}$$

Покажем, что эта теорема допускает следующее обобщение. Мы будем предполагать теперь, что $b = b(n)$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$ *и* $b = b(n) = o(\sqrt{n})$. *Тогда утверждение* (1) *сохраняется в силе. Если* $0 \leq b(n) \leq C = \mathrm{const}$, *то* (1) *выполняется для симметричного случайного блуждания без дополнительных моментных ограничений.*

* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, код проекта 11-01-00285.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 56–60

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что $T_n(b) \le T_n(0)$ п. н. при $b \ge 0$. Поэтому в условиях теоремы 1

$$\liminf \mathbf{P}\Big(\frac{T_n(b)}{n} < x\Big) \ \ge\ \liminf \mathbf{P}\Big(\frac{T_n(0)}{n} < x\Big) \ =\ \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,.$$

Далее введем момент первого достижения уровня $b(n)$

$$N_n \ =\ \min\{\,1 \le k \le n : S_k \ge b(n)\,\}$$

и положим $N_n = \infty$, если $S_k < b(n)$ для всех $k = 1, \ldots, n$. Для всякого $0 < \varepsilon < 1$ имеем

$$\mathbf{P}\Big(\frac{T_n(b)}{n} < x\Big) \le \sum_{k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\Big(\frac{T_n(b)}{n} < x, N_n = k\Big) + \sum_{n\varepsilon < k \le n} \mathbf{P}\Big(\frac{T_n(b)}{n} < x, N_n = k\Big) +$$
$$+ \mathbf{P}\big(N_n = \infty\big) \le \sum_{k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\Big(\frac{T_n(b)}{n} < x, N_n = k\Big) + \mathbf{P}(N_n > n\varepsilon) = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\,.$$

Пусть $M_n = \min\{\,1 \le k \le n : \ S_k \ge C\,\}$ и $M_n = \infty$, если $S_k < C$ при всех k. Если $b(n) \le C$, то $N_n \le M_n$ и $P_2 \to 0$ при $n \to \infty$, поскольку в условиях теоремы 2 $M_n \to M < \infty$ п. н.

Пусть теперь $\mathbf{E}X_1 = 0$, $\sigma^2 = \mathbf{E}X_1^2 < \infty$ и $b = b(n) = o(\sqrt{n})$. Положим $\overline{S}_t = \max\limits_{1 \le k \le t} S_k$ и воспользуемся следующим соотношением [2]:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\big(\overline{S}_n < \sigma\sqrt{n}x\big) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}\, du, \quad x \ge 0.$$

Для $\mathbf{P}_2$ имеем

$$\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}\,(N_n > n\varepsilon) = \mathbf{P}\,\big(\overline{S}_{n\varepsilon} < b(n)\big) = \mathbf{P}\left(\frac{\overline{S}_{n\varepsilon}}{\sigma\sqrt{n\varepsilon}} < \frac{b(n)}{\sigma\sqrt{n\varepsilon}}\right) =$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{b(n)}{\sigma\sqrt{n\varepsilon}}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du + o(1) \to 0$$

при $n \to \infty$.

Для оценки $\mathbf{P}_1$ мы уже не будем различать случаи $b(n) \le C$ и $b(n) \to \infty$. Рассмотрим новое случайное блуждание $\{S_{k,m}, m \ge 1\}$, которое начинается в точке (k, S_k), где $S_{k,m} = X_{k+1} + X_{k+2} + \ldots + X_{k+m}$. Пусть $T_n^*(t)$ — время, проведенное этим блужданием выше некоторого уровня $t \ge 0$ в течение первых n шагов. Тогда, очевидно, $T_{n-k}^*(0) \le T_n(b)$ п. н. на событии $\{N_n = k < n\}$, и поэтому

$$\mathbf{P}_1 = \sum_{k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\left(\frac{T_n(b)}{n} < x, N_n = k\right) \le \sum_{k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\left(\frac{T_{n-k}^*(0)}{n} < x, N_n = k\right).$$

В силу независимости событий $\left\{\dfrac{T_{n-k}^*(0)}{n} < x\right\}$ и $\big\{N_n = k\big\}$ имеем

$$\sum_{k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\Big(\frac{T_{n-k}^*(0)}{n} < x, N_n = k\Big) \le \max_{1 \le k \le n\varepsilon} \mathbf{P}\Big(\frac{T_{n-k}^*(0)}{n} < x\Big)\ \mathbf{P}\Big(N_n \le n\varepsilon\Big) =$$

$$= \mathbf{P}\Big(\frac{T^*_{n-n\varepsilon}(0)}{n} < x\Big)\ \mathbf{P}\Big(N_n \le n\varepsilon\Big) = \mathbf{P}\Big(\frac{T^*_{n-n\varepsilon}(0)}{n-n\varepsilon} < \frac{x}{1-\varepsilon}\Big)\ \mathbf{P}\Big(N_n \le n\varepsilon\Big) \to$$
$$\to \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{\frac{x}{1-\varepsilon}}, \quad n\to\infty, \quad 0<x<1-\varepsilon\,.$$

Здесь мы воспользовались уже доказанным соотношением $\mathbf{P}\,(N_n \le n\varepsilon) \to 1$ и тем фактом, что случайное блуждание $\{S_{k,m}, m \ge 1\}$ является вероятностной копией исходного блуждания и для него также справедлив закон арксинуса. Теперь, устремляя ε к нулю, получаем

$$\limsup \mathbf{P}\left(\frac{T_n(b)}{n} < x\right) \le \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}\,,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

2. Случайное блуждание с отрицательным сносом

Здесь мы рассмотрим случайное блуждание с отрицательным сносом. В этом случае $T_n(b) \to T_\infty(b) < \infty$ п. н. при $n\to\infty$ для каждого фиксированного $b \ \ge\ 0$. Возникает вопрос о нахождении распределения случайной величины $T_\infty(b)$, т. е. времени пребывания всей траектории блуждания выше уровня b. Мы приведем ниже представление для производящей функции искомого распределения, которое включает достаточно просто устроенную главную часть и остаточный член. При больших значениях b последний является экспоненциально малым по сравнению с главной частью. На распределение X_1 при этом накладывается условие Краме́ра.

Отправной точкой наших исследований служит полученная в [3] теорема об асимптотике производящей функции распределения времени пребывания, поэтому мы приведем формулировку этого результата.

Напомним необходимые обозначения из [3]. Пусть $\varphi(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$. Мы будем использовать положительную компоненту $R_+(z,\lambda)$ факторизации

$$1 - z\varphi(\lambda) = R_+(z,\lambda)R_-(z,\lambda), \qquad |z|<1, \qquad \operatorname{Re}\lambda = 0, \tag{2}$$

в которой

$$R_+(z,\lambda) = \exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{E}\,(\exp\{\lambda S_n\}; S_n > 0\,)\Big\},$$
$$R_-(z,\lambda) = \exp\Big\{-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n}\mathbf{E}\,(\exp\{\lambda S_n\}; S_n \le 0\,)\Big\}.$$

Известны и другие представления для компонент факторизации [4].

Везде в дальнейшем мы будем предполагать выполненными следующие условия.

A1. Распределение X_1 содержит абсолютно непрерывную компоненту.

A2. $\mathbf{E}\,X_1 < 0,\ \ 1 < \varphi(\beta) < \infty$ при некотором $\beta > 0$.

Условие A2 обеспечивает выполнение факторизационного тождества (2) в полосе $0 \le \operatorname{Re}\lambda \le \beta$. Кроме того, из условия A2 следует, что в интервале $(0,\beta)$ функция $\varphi(\lambda)$ достигает своего минимума в некоторой точке q_0. При $1/\varphi(\beta) \le z < 1/\varphi(q_0)$ уравнение $1 - z\varphi(\lambda) = 0$ имеет решение $\lambda(z) \in (q_0, \beta]$. Обозначим $q = \lambda(1)$,

$$V(z,s) = -\frac{R_+(s,0)R_+(z,\lambda(s))}{\lambda(s)R'_+(s,\lambda(s))R_+(z,0)},$$

и пусть
$$L_\delta = \{s : |s| < 1, |s-1| < \delta\}.$$

Следующий результат получен в [3] (здесь число b от n не зависит).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A1, A2. *Тогда существуют* $\delta > 0$ *и* $\varepsilon > 0$ *такие, что при* $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$ *имеет место представление*

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, \mathbf{E} v^{T_n(b)} = \frac{1}{1-s} \left\{ 1 - V(sv, s)\, e^{-\lambda(s)b} - \frac{(v-1)R_+(s,0)}{R_+(sv,0)} \psi_{sv,s}(b) \right\},$$

где равномерно по множеству $|z| < 1$, $s \in L_\delta$

$$|\psi_{z,s}(b)| \le C e^{-(q+\varepsilon)b}.$$

Здесь и далее буквой C обозначаются константы, возможно, различные.

Приведенная теорема позволяет получить следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A1, A2. *Тогда существует* $\varepsilon > 0$ *такое, что при* $0 \le v \le 1$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E} v^{T_n(b)} = \mathbf{E} v^{T_\infty(b)} = 1 - \frac{R_+(v,q)e^{-qb}}{R_+(v,0)} + (v-1) r_b(v),$$

где
$$|r_b(v)| \le C e^{-(q+\varepsilon)b}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что выполнены условия теоремы 3. Используя установленные в [5] свойства функций $R_+(z,\lambda)$ и $\lambda(s)$, получаем для каждого фиксированного b при $s \to 1$
$$\frac{R_+(sv,\lambda(s))}{R_+(sv,0)} = \frac{R_+(v,q)}{R_+(v,0)}(1+o(1)),$$
$$-\frac{R_+(s,0)}{\lambda(s) R'_+(s,\lambda(s))} = 1 + o(1), \qquad e^{-\lambda(s)b} = e^{-qb}(1+o(1)),$$
поэтому
$$V(sv,s)\, e^{-\lambda(s)b} = \frac{R_+(v,q)e^{-qb}}{R_+(v,0)}(1+o(1)).$$

Для оценивания остаточного члена заметим, что в наших условиях величина $R_+(sv,0)$ отделена от нуля (напомним, что единственным нулем положительной компоненты $R_+(1,\lambda)$ является число $\lambda = \lambda(1) = q > 0$). Поэтому равномерно по $|sv| < 1$, $s \in L_\delta$

$$\left| \frac{R_+(s,0)}{R_+(sv,0)} \psi_{sv,s}(b) \right| \le C e^{-(q+\varepsilon)b}.$$

Таким образом, для всякого $|v| \le 1$ при $s \to 1$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} s^n \, \mathbf{E} v^{T_n(b)} = \frac{1}{1-s} \left\{ \left(1 - \frac{R_+(v,q)e^{-qb}}{R_+(v,0)} + (v-1) r_b(v)\right)(1+o(1)) \right\},$$

где обозначено
$$r_b(v) = \lim_{s\to 1} \frac{R_+(s,0)}{R_+(sv,0)} \psi_{sv,s}(b)\,.$$

При $0 \le v \le 1$ последовательность $\mathbf{E}v^{T_n(b)}$ является монотонной по n, поэтому в силу известной тауберовой теоремы [6]

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}v^{T_n(b)} = \mathbf{E}v^{T_\infty(b)} = 1 - \frac{R_+(v,q)e^{-qb}}{R_+(v,0)} + (v-1)r_b(v).$$

Теорема доказана. □

В [3] отмечалось, что $\psi_{sv,s}(b) \equiv 0$, если $\mathbf{P}(X_1 > t) = ce^{-\alpha t}$, $t > 0$. Имеем также в этом случае $r_b(v) \equiv 0$ и

$$R_+(v,\lambda) = \frac{\lambda - \lambda(v)}{\lambda - \alpha}\,.$$

Автор благодарен рецензенту за внимательное прочтение работы и ряд полезных замечаний.

Список литературы

1. *Спицер Ф.* Принципы случайного блуждания. М.: Мир, 1969.

2. *Erdös P., Kac M.* On Certain Limit Theorems of Theory of Probability // Bull. Amer. Math. Soc. 1946. Vol. 52. No. 4. P. 292–302.

3. *Лотов В. И.* О времени пребывания случайного блуждания в полосе // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 4. С. 785–804.

4. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

5. *Боровков А. А.* Новые предельные теоремы в граничных задачах для сумм независимых слагаемых// Сиб. мат. журн. 1962. Т. 3, №. 5. С. 645–694.

6. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular Variation. Cambridge University Press, 1987.

Материал поступил в редколлегию 24.10.2011

Адрес автора

ЛОТОВ Владимир Иванович

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия

Новосибирский государственный университет

ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090, Россия

e-mail: lotov@math.nsc.ru