УДК 519.217.2 + 519.214.6

В. С. Лугавов

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ПЕРЕХОДАХ ЦЕПИ МАРКОВА

Найдены распределения функционалов, заданных на переходах цепи Маркова.

Ключевые слова: конечная однородная цепь Маркова, функционалы для марковских цепей.

Введение

Пусть $\varkappa = \{\varkappa(n); n = 0, 1, \dots\}$ — однородная цепь Маркова с множеством состояний $D = \{1, 2, \dots, N\}$. Для произвольного подмножества $B \subset D^2$ рассмотрим случайное множество

$$T_B = \{n : (\varkappa(n-1), \varkappa(n)) \in B\} \bigcup \{0\}$$

и определяемые им функционалы

$$m(B,n) = \mathrm{Card}\left\{ T_B \cap [1,n] \right\}, \quad q(B,n) = \max\left\{ T_B \cap [0,n] \right\},$$
$$r(B,n) = \inf\left\{ T_B \cap [n+1,\infty) \right\} \quad (\inf\{\varnothing\} = \infty),$$

где $\mathrm{Card}(A)$ — число элементов множества A. Обозначим $s(B) = r(B, 0)$, так что

$$s(B) = \inf\left\{ T_B \cap [1,\infty) \right\}.$$

Варьируя множество B, можно с помощью этих функционалов получить широкий класс функционалов для цепей. Некоторые из этих функционалов достаточно наглядны. Так, если C — произвольное непустое подмножество из D, то $s(D \times C)$ — первый положительный момент достижения цепью $\varkappa$ множества C; $s\big((D\backslash C) \times C\big)$ — момент первого вхождения цепи в множество C; $m\big(D \times C, n\big)$ — время пребывания $\varkappa$ в множестве C за промежуток $[1,\ n]$; $m\big((D\backslash C) \times C, n\big)$ — число вхождений в C цепи $\varkappa$ за промежуток времени $[1,\ n]$; на множестве $\{s(D \times C) \leqslant n\}$ функционал $q(D \times C, n)$ — момент последнего (на промежутке $[1,\ n]$) пребывания цепи $\varkappa$ в C; аналогично на множестве $\big\{s\big((D\backslash C) \times C\big) \leqslant n\big\}$ $q((D\backslash C) \times C, n)$ — последний на промежутке $[1,\ n]$ момент вхождения $\varkappa$ в множество C.

Многие из указанных функционалов достаточно полно исследованы. Так, в работе [1] доказана локальная предельная теорема для вектора, координаты которого являются числами попаданий цепи в отдельные состояния за n шагов; интегральная предельная теорема для этого вектора доказана в [1; 2]. Обобщения этих результатов для процессов, определенных на цепи Маркова, содержатся в работах [3–8]. В [9] комбинаторными методами найден точный закон распределения матрицы, составленной из чисел переходов

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 2. С. 61–82

в цепи за n шагов (т. е. из чисел $m(\{i\}\times\{j\},n)$), и установлена его асимптотическая нормальность. В работе [10] рассматривается число серий i-го состояния двузначной цепи (этот функционал просто выражается через $m((D\backslash\{i\})\times\{i\},n)$) и находится точный закон распределения этого функционала. В работе [11] для двузначных цепей описываются распределения числа появлений некоторого состояния и числа серий этого состояния. Исчерпывающие сведения о функционалах $m(D\times\{i\},n)$, $q(D\times\{i\},n)$, $r(D\times\{i\},n)$ приведены в [7; 8; 12].

В теоремах 1, 2 устанавливаются условия конечности величины $s(B)$ и находятся ее факториальные моменты (при условии конечности $s(B)$). В теореме 3 приводится преобразование над распределением случайного вектора $\big(m(B,n),q(B,n),r(B,n),\kappa(q(B,n)),\kappa(r(B,n))\big)$. Обращение этого преобразования позволяет найти для правильных цепей (все существенные состояния которых непериодичны) предельные распределения функционалов $r(B,n)$ и $q(B,n)$.

В теореме 7 устанавливается предельное распределение функционала $m(B,n)$, когда начальное состояние $\kappa(0)$ цепи является несущественным состоянием. Для этого предварительно в теоремах 5, 6 исследуется предельное поведение дисперсии этого функционала.

Результаты данной работы частично анонсированы в [13].

1. Вспомогательные результаты и обозначения

Рассмотрим однородную марковскую последовательность случайных векторов $V=\{V(n),\sigma(n);\ n=0,1,\ldots\}$, управляемую однородной цепью Маркова $\sigma=\{\sigma(n);\ n=0,1,\ldots\}$ с конечным числом состояний $D_0=\{1,2,\ldots,N+1\}$. Координата $V(n)$ принимает значения из $Z_+\cup\{\infty\}$ (Z_+ — множество неотрицательных целых чисел), $V(0)=0$. Для любого борелевского множества $B\subset[0,\infty]$ предполагается выполненным условие:

$$P\big(V(n+1)\in B,\ \sigma(n+1)=j/V(n)=x,\ \sigma(n)=i\big)=\\ =P\big(V(1)+x\in B,\ \sigma(1)=j/\sigma(0)=i\big),\quad x\in Z_+;\quad i\in D,\quad j\in D_0\,.$$

Состояние $(\infty,N+1)$ для последовательности V будем считать поглощающим, причем поглощение предполагается одновременным по двум координатам. Положим

$$\varphi(\rho)=\big\|E(\rho^{V(1)};\sigma(1)=j/\sigma(0)=i)\big\|_{i,j=\overline{1,N}}\,,$$
$$\tilde\varphi(\rho)=\big\|E(\rho^{V(1)};\sigma(1)=j/\sigma(0)=i)\big\|_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,N+1}}\,,$$

считая $\rho^\infty=0$ при $0<\rho<1$ и $1^\infty=1$, и рассмотрим функционал

$$t(k)=\inf\{\,n>0:\ V(n)\geqslant k\,\},\quad k\geqslant 1\,.$$

Обозначим δ_{ij}, $i,j\in\{1,\ldots,N+1\}$ — символ Кронекера, $I=\|\delta_{ij}\|_{i,j=\overline{1,N}}$ — единичная матрица порядка N. Для произвольного множества M положим $\delta_M(x)=1$ при $x\in M$ и $\delta_M(x)=0$ при $x\notin M$. Для $S\subset(D_0)^2$ обозначим S^c — дополнение S до $(D_0)^2$; также для произвольной прямоугольной матрицы $A(\cdot)=\|a_{ij}(\cdot)\|_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,l}}$, $k,l\in\{1,2,\cdots,N+1\}$

положим $A(S,\cdot) = \|a_{ij}(\cdot)\delta_S(i,j)\|_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,l}}$, $[A(\cdot)]_{ij} = a_{ij}(\cdot)$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,l}$, $|A(\cdot)| = \sup\limits_{1\leqslant i\leqslant k}\sum\limits_{j=1}^{l}|a_{ij}(\cdot)|$. Для произвольной матрицы $C(\cdot) = \|c_{ij}(\cdot)\|_{i,j=\overline{1,k}}$, $k\in\overline{1,N}$, также обозначим $C^*(\cdot) = \|\delta_{ij}\sum\limits_{l=1}^{k}c_{il}(\cdot)\|_{i,j=\overline{1,k}}$.

Аналогично лемме 1 из работы [14] устанавливается следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть* $|\varphi(\rho)| < 1$ *при* $0<\rho<1$, *что эквивалентно* $P(V(1)=0/\sigma(0)=j)<1$, $j=\overline{1,N}$. *Тогда при* $0<\gamma<1$, $0<z<1$, $0<\mu_2\leqslant 1$, $0<\gamma\mu_1\mu_2\leqslant 1$; $i,j\in\overline{1,N}$, $r\in\overline{1,N+1}$

$$(1-\gamma)\gamma^{-1}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma^k E(z^{t(k)-1}\mu_1^{V(t(k)-1)}\mu_2^{V(t(k))});\quad t(k)<\infty,\quad \sigma(t(k)-1)=j,$$
$$\sigma(t(k))=r/\sigma(0)=i) = [\big(I-z\varphi(\mu_1\gamma\mu_2)\big)^{-1}]_{ij}\,[\tilde\varphi(\mu_2)-\tilde\varphi(\gamma\mu_2)]_{jr}\,.$$

2. Функционалы на переходах цепи Маркова

Пусть, как и во введении, $\varkappa = \{\varkappa(n);\ n=0,1,\dots\}$ — однородная цепь Маркова с множеством состояний $D=\{1,2,\dots,N\}$ и матрицей перехода $\mathcal{P}$; $T_B = \{n:\ \big(\varkappa(n-1),\varkappa(n)\big)\in B\}\cup\{0\}$, $B\subset D^2$. До конца работы будем придерживаться обозначений $P_i(\cdot) = P(\cdot/\varkappa(0)=i)$, $E_i(\cdot) = E(\cdot/\varkappa(0)=i)$.

Для изучения функционалов, определенных во введении, рассмотрим последовательность моментов $T_B(0)=0$, $T_B(k)=\inf\{T_B\cap(T_B(k-1),\infty)\}$, $k\geqslant 1$, и процесс $V_B = \{T_B(n),\varkappa(T_B(n));\ n=0,1,\dots\}$, где $\varkappa(\infty)=N+1$. Процесс V_B является однородным по времени, аддитивным по первой компоненте двумерным марковским процессом с поглощающим состоянием $(\infty,N+1)$. Обозначим матрицу эволюции процесса V_B через

$$\varphi_B(\rho) = \big\|E(\rho^{T_B(1)};\ \varkappa(T_B(1))=j/\varkappa(T_B(0))=i)\big\|_{i,j=\overline{1,N}} \tag{1}$$

и положим

$$\tilde\varphi_B(\rho) = \big\|E(\rho^{T_B(1)};\ \varkappa(T_B(1))=j/\varkappa(T_B(0))=i)\big\|_{i=\overline{1,N}}^{j=\overline{1,N+1}}\,.$$

При $0<\rho<1$ матрица $\varphi_B(\rho)$ имеет представление

$$\varphi_B(\rho) = \rho\big(I-\rho\mathcal{P}(B^c)\big)^{-1}\mathcal{P}(B), \tag{2}$$

вытекающее из равенства $\varphi_B(\rho) = \rho\mathcal{P}(B)+\rho\mathcal{P}(B^c)\varphi_B(\rho)$.

1. Рассмотрим определенный во введении функционал $s(B) = \inf\{n\geqslant 1:\ (\varkappa(n-1),\varkappa(n))\in B\}$. Распределение $s(B)$ может быть легко получено. Действительно, из соотношения (2), в силу равенства $s(B)=T_B(1)$, следует

$$P_i\big(s(B)=n,\ \varkappa(s(B))=j\big) = \big[\big(\mathcal{P}(B^c)\big)^{n-1}\mathcal{P}(B)\big]_{ij}$$

при $n\geqslant 1$; $i,j=\overline{1,N}$.

Отсюда, в частности, вытекает

$$P_i\big(s(B)=\infty\big) = \lim_{n\to\infty}\big[\{(\mathcal{P}(B^c))^n\}^*\big]_{ii}\,. \tag{3}$$

Выясним условия, которым должна удовлетворять пара (i, B), чтобы величина $s(B)$ была P_i-п. н. конечной и найдем при этих условиях ее факториальные моменты. Для этого наряду с (3) воспользуемся вытекающим из (2) равенством

$$E_i\big(\rho^{s(B)}; s(B) < \infty\big) \;=\; \rho\big[\{\big(I - \rho\mathcal{P}(B^c)\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\}^*\big]_{ii} \tag{4}$$

при $0 < \rho < 1,\ i = \overline{1, N}$. Также нам понадобится следующее свойство неотрицательных матриц (матриц с неотрицательными элементами).

Лемма 2. *Уменьшение хотя бы одного элемента неотрицательной неразложимой матрицы, не выводящее из класса неотрицательных матриц, влечет уменьшение спектрального радиуса этой матрицы.*

Доказательство леммы может быть получено из следующего утверждения (см. [15. Гл. 13, § 3]): при увеличении хотя бы одного элемента неотрицательной матрицы спектральный радиус не убывает, он строго возрастает, если преобразуемая матрица дополнительно неразложима. Действительно, пусть C — неотрицательная матрица, полученная из неразложимой матрицы D уменьшением ее некоторых элементов. Матрицы $C + \frac{1}{2}(D - C)$ и $D = C + (D - C)$ не отличаются расположением их нулевых элементов. Поэтому наряду с матрицей D матрица $C + \frac{1}{2}(D - C)$ также неразложима. Тогда, применяя первую часть вышеупомянутого утверждения к матрицам C и $C + \frac{1}{2}(D - C)$, а вторую — к матрицам $C + \frac{1}{2}(D - C)$ и D, получим требуемое свойство.

Пусть i — существенное состояние цепи $\varkappa$, и $S(i)$ — класс существенных сообщающихся состояний цепи, содержащий i. Очевидно, что подматрица матрицы $\mathcal{P}$, соответствующая переходам внутри класса $S(i)$, является неразложимой стохастической матрицей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть i — существенное состояние цепи $\varkappa$. Тогда для конечности P_i-п. н. величины $s(B)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие: $\mathcal{P}(B \bigcap S^2(i)) \neq O$ (O — нулевая матрица порядка N). Если величина $s(B)$ P_i-п. н. конечна, то*

$$E_i\Big(\prod_{n=0}^{k}(s(B) - n)\Big) \;=\; (k+1)!\Big[\Big\{\Big(I - \mathcal{P}(B^c \bigcap S^2(i))\Big)^{-(k+1)}\Big(\mathcal{P}(B^c \bigcap S^2(i))\Big)^k\Big\}^*\Big]_{ii}$$

при $k \geqslant 0$ ($O^0 = I$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\mathcal{P}\big(B \bigcap S^2(i)\big) \neq O$. Тогда из леммы 2 следует, что спектральный радиус матрицы $\mathcal{P}\big(B^c \cap S^2(i)\big)$ меньше 1. В силу (3) отсюда получим (i — существенное состояние)

$$P_i\big(s(B) = \infty\big) = \lim_{n\to\infty}\big[\{(\mathcal{P}(B^c \cap S^2(i)))^n\}^*\big]_{ii} = 0\,.$$

Необходимость условия $\mathcal{P}\big(B \cap S^2(i)\big) \neq O$ для конечности P_i-п. н. величины $s(B)$ очевидна, поскольку из существенного состояния любого класса возможен переход только в состояния этого же класса. По этой же причине множества $\{s(B) < \infty\}$, $\{s\big(B \cup (S^2(i))^c\big) < \infty\}$ P_i-п. н. совпадают, а величины $s(B), s\big(B \cup (S^2(i))^c\big)$ на этих множествах P_i-п. н. равны между собой. Поэтому, в силу (4), имеем

$$E_i\,(\rho^{s(B)};\, s(B) < \infty) \;=\; \rho\Big[\{\big(I - \rho\mathcal{P}(B^c \cap S^2(i))\big)^{-1}\mathcal{P}\big(B \cup (S^2(i))^c\big)\}^*\Big]_{ii}$$

при $0 < \rho < 1$. Дифференцируя $(k+1)$ раз обе части последнего равенства и переходя в полученном соотношении к пределу при $\rho \uparrow 1$, нетрудно получить справедливость второго утверждения теоремы.

Отметим, что первые два момента случайной величины $s(B)$, $B = D \times i_0$, $i_0 \in D$ получены в [7; 8].

Замечание 1. Если в условии теоремы 1 матрица $\mathcal{P}\big(B^c \bigcap S^2(i)\big)$ нильпотентна и n_0 — ее индекс нильпотентности ($n_0 = \min\{k > 0 : \big(\mathcal{P}\big(B^c \bigcap S^2(i)\big)\big)^k = O\}$), то при $k > n_0$ моменты $E_i\big(s(B)\big)^k$ представляются в виде линейных комбинаций моментов $E_i\big(s(B)\big)^n$, $n \leqslant n_0$ (причем коэффициенты этих линейных комбинаций зависят только от n_0 и k). Это связано с тем, что (см. соотношение, предшествующее (3)) для существенного состояния i выполняется $P_i\left(s(B) = n, \kappa(s(B)) = j\right) = \left[\left(\mathcal{P}(B^c \bigcap S^2(i))\right)^{n-1}\mathcal{P}(B)\right]_{ij} = 0$, $j = \overline{1,N}$ при $n > n_0$, и, следовательно, P_i-п. н. $s(B) \leqslant n_0$.

Для формулировки условий, обеспечивающих P_i-п. н. конечность величины $s(B)$ в случае, когда i — несущественное состояние, определим для произвольного непустого подмножества состояний $A \subset D$ $p(i,A) = P_i\{\,\kappa(n) \in A$ при некотором $n > 0\,\}$ — вероятность достижения множества A из состояния i, и будем говорить, что множество A достижимо из i, если $p(i,A) > 0$. Проверка достижимости или недостижимости множества A из состояния i достаточно просто осуществляется с помощью ориентированного графа, соответствующего матрице перехода $\mathcal{P}$. Пусть $S_1, S_2 \dots S_d$, $d \geqslant 1$ — все классы существенных сообщающихся состояний цепи κ. Для нахождения численных значений вероятностей $p(i, S_m)$ обозначим через H множество несущественных состояний цепи κ и заметим, что $(i \in H)$

$$p(i,S_m) \;=\; P_i\{\exists n > 0 : \big(\kappa(n-1), \kappa(n)\big) \in H \times S_m\} \;=\; P_i\{s(H \times S_m) < \infty\}.$$

Поскольку цепь, покинув класс H, никогда в него не возвратится, то в силу (4) несложно получить, что

$$E_i\left(\rho^{s(H\times S_m)}; s(H \times S_m) < \infty\right) = \rho\big[\{\big(I - \rho\mathcal{P}(H^2)\big)^{-1}\mathcal{P}(H \times S_m)\}^*\big]_{ii},$$

и, следовательно,

$$p(i,S_m) = \big[\{\big(I - \mathcal{P}(H^2)\big)^{-1}\mathcal{P}(H \times S_m)\}^*\big]_{ii}.$$

Обозначим $G_i = \{S_m, 1 \le m \le d : p(i,S_m) > 0\}$. Множество G_i не пустое. Последовательность состояний $(j_0, j_1 \dots j_n)$, $n \ge 1$ будем называть цепочкой, если все вероятности переходов p_{j_{m-1},j_m}, $m = \overline{1,n}$ положительны, и простой цепочкой, если дополнительно все входящие в нее состояния различны. Будем говорить, что цепочка $(j_0, j_1 \dots j_n)$, $n \geqslant 1$ соединяет несущественное состояние i с классом S_m, если $j_0 = i$, $j_{n-1} \in H$, $j_n \in S_m$. Обозначим $n(i,S_m)$ — число простых цепочек, соединяющих состояние i с классом S_m. Каждой простой цепочке $(j_0, j_1 \dots j_n)$ поставим во взаимнооднозначное соответствие множество $\{(j_0,j_1), \dots (j_{n-1},j_n)\}$, которое назовем множеством переходов, соответствующим заданной простой цепочке. Нумеруя произвольным образом числами $1, 2, \dots, n(i,S_m)$ простые цепочки, соединяющие i с $S_m \in G_i$, обозначим соответствующие им множества переходов через $D_1(i,S_m), \dots, D_{n(i,S_m)}(i,S_m)$.

Теорема 2. *Пусть i — несущественное состояние цепи $\varkappa$. Тогда для конечности P_i-п. н. величины $s(B)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого класса $S_m \in G_i$ выполнялось либо неравенство $\mathcal{P}\big(B \cap (S_m)^2\big) \neq O$, либо система соотношений $B \cap D_r(i, S_m) \neq \varnothing$, $r = \overline{1, n(i, S_m)}$. Если величина $s(B)$ P_i-п. н. конечна, то*

$$E_i\Big(\prod_{n=0}^{k}\big(s(B)-n\big)\Big) \;=\; (k+1)\,!\,\Big[\Big\{\big(I-\mathcal{P}\big((B')^c\big)\big)^{-(k+1)}\,\big(\mathcal{P}\big((B')^c\big)\big)^k\Big\}^*\Big]_{ii}$$

при $k \geqslant 0$, где $B' \;=\; B \cup \big(\bigcup\limits_{m:\, S_m \notin G_i} (S_m)^2\big) \cup \big(\bigcup\limits_{\substack{m:\, S_m \in G_i,\\ \mathcal{P}(B \bigcap (S_m)^2)=O}} (S_m)^2\big)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства необходимости предположим, что найдется класс $S_m \in G_i$, для которого $\mathcal{P}\big(B \bigcap (S_m)^2\big) = O$ и $B \bigcap D_r(i, S_m) = \varnothing$ для некоторого $r \in \overline{1, n(i, S_m)}$. Пусть $(i, j_1 \ldots j_n)$ — цепочка, отвечающая множеству переходов $D_r(i, S_m)$. Но тогда

$$P_i\{s(B)=\infty\} \;\geq\; P_i\{\varkappa(1)=j_1, \ldots, \varkappa(n)=j_n\} \;=\; p_{i,j_1}\prod_{l=1}^{n-1} p_{j_l j_{l+1}} \;>\; 0\,.$$

Для доказательства достаточности рассмотрим B' — пополнение множества B элементами тех множеств $(S_m)^2$ $(1 \leq m \leq d)$, для которых либо $S_m \notin G_i$, либо одновременно $S_m \in G_i$, $\mathcal{P}\big(B \cap (S_m)^2\big) = O$. Нетрудно видеть, что множества $\{s(B) < \infty\}$, $\{s(B') < \infty\}$ P_i-п. н. совпадают, а величины $s(B)$, $s(B')$ на этих множествах P_i-п. н. равны между собой. Поэтому в силу (4) имеем

$$E_i\left(\rho^{s(B)}; s(B) < \infty\right) \;=\; \rho\left[\left\{\big(I-\rho\mathcal{P}\big((B')^c\big)\big)^{-1}\mathcal{P}(B')\right\}^*\right]_{ii}.$$

Из строения множества B' вытекает, что спектральный радиус матрицы $\mathcal{P}\big((B')^c\big)$ меньше 1. Поэтому, переходя в обеих частях последнего равенства к пределу при $\rho \uparrow 1$, получим P_i-п. н. конечность величины $s(B)$. С помощью последнего равенства несложно доказывается справедливость второго утверждения теоремы 2.

Применение теорем 1 и 2 позволяет находить необходимые и достаточные условия P_i-п. н. конечности величины $s(B)$ для всех состояний i из любого подмножества множества D. Отсюда, в частности, можно получить (как, впрочем, и из соотношений (3), (4)) справедливость следующего утверждения.

Следствие 1. *Для конечности P_i-п. н., $i = \overline{1, N}$ величины $s(B)$ необходимо и достаточно, чтобы спектральный радиус матрицы $\mathcal{P}(B^c)$ был меньше 1 или, что эквивалентно, для всех классов существенных сообщающихся состояний S_m цепи выполнялись неравенства $\mathcal{P}\big(B \bigcap (S_m)^2\big) \neq O$. Если величина $s(B)$ P_i-п. н., $i = \overline{1, N}$ конечна, то при $k \geqslant 0$, $i \in D$*

$$E_i\Big(\prod_{n=0}^{k}\big(s(B)-n\big)\Big) \;=\; (k+1)!\Big[\Big\{\big(I-\mathcal{P}(B^c)\big)^{-(k+1)}\big(\mathcal{P}(B^c)\big)^k\Big\}^*\Big]_{ii}.$$

2. Найдем предельные распределения функционалов $q(B, n)$, $r(B, n)$ (см. введение). Для этого обратимся к процессу $V_B = \{T_B(n), \varkappa\big(T_B(n)\big); n = 0, 1, \ldots\}$ с матрицей эволюции $\varphi_B(\rho)$ (см. (1)). Положим $t_B(k) = \inf\{n > 0 : T_B(n) \geqslant k\}$, $k \geqslant 1$. Тогда $t_B(k) - 1 = m(B, k-1)$, $T_B\big(t_B(k)-1\big) = q(B, k-1)$, $T_B\big(t_B(k)\big) = r(B, k-1)$. Из леммы 1 вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *При* $0<\rho<1,\ 0<\gamma<1,\ 0<\lambda\ \leqslant 1,\ 0<\mu\lambda\leqslant 1;\ i,j\in\overline{1,N},\ r\in\overline{1,N+1}$

$$(1-\gamma)\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\,E_i\Big(\rho^{m(B,k)}\mu^{q(B,k)}\ \lambda^{r(B,k)};\varkappa\big(q(B,k)\big)=j,\varkappa\big(r(B,k)\big)=r\Big)=$$
$$=-\Big[\big(I-\rho\varphi_B(\mu\lambda\gamma)\big)^{-1}\Big]_{ij}\big[\tilde\varphi_B(\lambda\gamma)-\tilde\varphi_B(\lambda)\big]_{jr}. \quad (5)$$

Далее, назовем однородную марковскую цепь правильной, если все ее существенные состояния непериодичны. Для правильных цепей существуют предельные переходные вероятности [15. Гл. 13, § 7]. Пусть $\varPi=\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}^n$ — матрица предельных переходных вероятностей правильной цепи $\varkappa$. Обращая соотношение (5), после несложных преобразований получим (см. (2))

Следствие 2. *Пусть* $\varkappa$ *— правильная цепь Маркова, и* $\varPi$ *— матрица предельных переходных вероятностей. Тогда при* $i,j\in\overline{1,N}$, $t\geqslant 0$ *выполняются равенства*

$$\lim_{k\to\infty}P_i\big(k-q(B,k)=t;\varkappa\big(q(B,k)\big)=j\big)=[\varPi\mathcal{P}(B)\big(\mathcal{P}^t(B^c)\big)^*]_{ij}\,,$$
$$\lim_{k\to\infty}P_i\big(r(B,k)-k=t+1;\varkappa\big(r(B,k)\big)=j\big)=[\varPi\mathcal{P}^t(B^c)\mathcal{P}(B)]_{ij}\,,$$
$$\lim_{k\to\infty}P_i\big(r(B,k)-q(B,k)=t+1\big)=(t+1)[\big(\varPi\mathcal{P}^t(B^c)\big(I-\mathcal{P}(B^c)\big)^2\big)^*]_{ii}\,.$$

Представления для левых частей равенств этого следствия при $B=D\times i_0$, $i_0\in D$ получены в других обозначениях в [7].

3. Найдем распределение функционала $m(B,k),\ k\geqslant 1$. Для этого положим в соотношении (5) $\mu=\lambda=1$ и просуммируем обе части полученного равенства по j от 1 до N и по r от 1 до $N+1$. Получим

$$(1-\gamma)\sum_{k=0}^{\infty}\gamma^k\ E_i(\rho^{m(B,k)})\ =\ \Big[\Big(\big(I-\rho\varphi_B(\gamma)\big)^{-1}\big(I-\varphi_B(\gamma)\big)\Big)^*\Big]_{ii}.$$

Используя (2), отсюда получаем

$$E_i\left(\rho^{m(B,k)}\right)\ =\ \Big[\Big(\big(\mathcal{P}(B^c)+\rho\mathcal{P}(B)\big)^k\Big)^*\Big]_{ii}. \quad (6)$$

Из соотношения (6), в частности, вытекает

$$E_i\Big(\prod_{n=0}^{r}\big(m(B,k)-n\big)\Big)\ =\ (r+1)\,!\sum_{\substack{n_1,n_2,\ldots,n_{r+1}\geqslant 0,\\ n_1+\cdots+n_{r+1}\leqslant k-r-1}}\Big[\Big(\prod_{i=1}^{r+1}\big(\mathcal{P}^{n_i}\mathcal{P}(B)\big)\Big)^*\Big]_{ii} \quad (7)$$

при $k-1\geqslant r\geqslant 0$.

В дальнейшем нам также потребуется следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть* $A_n, n=\overline{0,\infty}$ *и* $C_n, n=\overline{0,\infty}$ *— последовательности матриц одинакового порядка, сходящиеся (покомпонентно) соответственно к матрицам* A,C. *Тогда последовательности* $n^{-1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}A_kC_{n-1-k}$, $n=\overline{1,\infty}$ *сходятся к матрице* AC.

Утверждение леммы в скалярном случае (т.е. $A_n, n=\overline{0,\infty}$; $C_n, n=\overline{0,\infty}$ — числовые последовательности) вытекает из теоремы Теплица. В общем случае доказательство вытекает из скалярного случая.

Теорема 4. *Пусть* $\varkappa$ — *правильная цепь Маркова, и* Π — *матрица предельных переходных вероятностей. Тогда при* $i \in \overline{1,N}$ *выполняется равенство*

$$\lim_{k\to\infty}\left\{E_i m(B,k) - k[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}\right\} = \left[\Big(\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1}-\Pi\big)\mathcal{P}(B)\Big)^*\right]_{ii}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{P}\Pi = \Pi$ и $\Pi^2 = \Pi$, то при $n \geqslant 1$ выполняется

$$(\mathcal{P}-\Pi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \mathcal{P}^k(-\Pi)^{n-k} = \mathcal{P}^n + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k(-1)^{n-k}\Pi = \mathcal{P}^n - \Pi\,.$$

Отсюда в силу (7) имеем

$$E_i m(B,k) = \sum_{n=0}^{k-1}\left[\big(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} = \sum_{n=0}^{k-1}\left[\big((\mathcal{P}^n-\Pi)\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} + k\left[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} =$$

$$= \sum_{n=1}^{k-1}\left[\big((\mathcal{P}-\Pi)^n\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} + \left[\big((I-\Pi)\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} + k\left[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii},$$

и, следовательно,

$$\lim_{k\to\infty}\left\{E_i m(B,k) - k\left[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii}\right\} = \left[\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} -$$

$$- \left[\big(\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} + \left[\big((I-\Pi)\mathcal{P}(B)\big)^*\right]_{ii} = \left[\Big(\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1}-\Pi\big)\mathcal{P}(B)\Big)^*\right]_{ii}.$$

Теорема доказана. □

Следствие 3. *В условиях теоремы* 4

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}E_i\big(m(B,k)\big) = [\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}, \quad i \in \overline{1,N}.$$

Обратимся к нахождению предельного распределении функционала $m(B,n)$. Следуя [15. Гл. 13, § 7], будем называть правильную цепь Маркова *регулярной*, если множество ее существенных состояний представляет один класс сообщающихся состояний. Правильную цепь, содержащую более одного класса существенных сообщающихся состояний, назовем *нерегулярной* цепью. В дальнейшем нам понадобятся некоторые свойства элементов матрицы предельных переходных вероятностей Π правильных цепей. Известно (см. [12. Гл. 12, § 5]), что элементы матрицы Π регулярной цепи удовлетворяют равенствам: $[\Pi]_{ij} = [\Pi]_{jj}$, если i,j — соответственно несущественное и существенное состояния цепи, а также $[\Pi]_{ij} = 0$, если i,j — несущественные состояния цепи. Пусть, как и ранее, H — множество несущественных состояний цепи $\varkappa$, а $S(j)$ (j — существенное состояние) — класс существенных состояний, содержащий состояние j. Следующее утверждение дополняет указанный результат.

Лемма 4. *Пусть* $\varkappa$ — *правильная цепь Маркова, и* Π — *матрица предельных переходных вероятностей. Тогда при* $i \in H$ *для любого существенного состояния* j *выполняется равенство* $[\Pi]_{ij} = p\big(i,S(j)\big)[\Pi]_{jj}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c — произвольное неотрицательное целое число, и $n \geqslant c$. Тогда

$$[\mathcal{P}^n]_{ij} = P_i\big(\varkappa(n)=j, \varkappa(c)\in H\big) + \sum_{l\in S(j)} P_i\big(\varkappa(c)=l\big)P_l\big(\varkappa(n-c)=j\big)\,.$$

Обозначим первое и второе слагаемые этого равенства соответственно через $I_1(c,n)$, $I_2(c,n)$. Для слагаемого $I_2(c,n)$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} I_2(c,n) \;=\; \sum_{l\in S(j)} P_i\bigl(\mathsf{\kappa}(c)=l\bigr)[\Pi]_{lj} = [\Pi]_{jj} \sum_{l\in S(j)} P_i\bigl(\mathsf{\kappa}(c)=l\bigr) = \\ = \; \bigl[\Pi\bigr]_{jj} P_i\left(s\bigl(H\times S(j)\bigr)\leqslant c\right).$$

Отсюда

$$\lim_{c\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_2(c,n) = \bigl[\Pi\bigr]_{jj} P_i\bigl(s(H\times S(j))<\infty\bigr) = [\Pi]_{jj}p\bigl(i,S(j)\bigr)\,.$$

Для слагаемого $I_1(c,n)$ имеем

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} I_1(c,n) \;\leqslant\; \overline{\lim_{n\to\infty}} P_i\bigl(s\bigl(H\times S(j)\bigr)\in(c,n]\bigr) \;=\; P_i\bigl(s\bigl(H\times S(j)\bigr)\in(c,\infty)\bigr),$$

и, следовательно,

$$\lim_{c\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}} I_1(c,n) = 0\,.$$

Поэтому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,[\mathcal{P}^n]_{ij} \;\leqslant\; \lim_{c\to\infty}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, I_1(c,n) + \lim_{c\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_2(c,n) \;=\; p\bigl(i,S(j)\bigr)[\Pi]_{jj}\,,$$

а также

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,[\mathcal{P}^n]_{ij} \;\geqslant\; \lim_{c\to\infty}\lim_{n\to\infty} I_2(c,n) \;=\; p\bigl(i,S(j)\bigr)[\Pi]_{jj}\,.$$

Лемма доказана. $\square$

Обозначим $D_i(\cdot) = D(\cdot/\mathsf{\kappa}_0 = i)$ и исследуем предельное поведение дисперсии $D_i m(B,k)$, $i\in\overline{1,N}$ при $k\to\infty$.

Теорема 5. *Пусть* $\mathsf{\kappa}$ *— правильная цепь Маркова (регулярная или нерегулярная). Тогда в любом из трех нижеперечисленных случаев:* 1) i *— произвольное состояние регулярной цепи;* 2) i *— произвольное существенное состояние нерегулярной цепи;* 3) i *— несущественное состояние нерегулярной цепи, для которого выполняется*

$$\Bigl[\Bigl(\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)-\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)\Pi\mathcal{P}(B)\Bigr)^*\Bigr]_{ii} = 0, \tag{8}$$

имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}D_i m\,(B,k) \;=\; \bigl[\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii} - 3\bigl\{[\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*]_{ii}\bigr\}^2 + \\ +\; 2\Bigl[\Bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigl(I-\mathcal{P}+\Pi\bigr)^{-1}\mathcal{P}(B)\Bigr)^*\Bigr]_{ii}. \tag{9}$$

Если 4) i *— несущественное состояние нерегулярной цепи, для которого выполняется*

$$\bigl[\bigl(\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)-\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii}\neq 0,$$

тогда имеет место равенство

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2}D_i m(B,k) = \Bigl[\Bigl(\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)-\bigl(\Pi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)\Pi\mathcal{P}(B)\Bigr)^*\Bigr]_{ii}. \tag{10}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (7) при $r=0$ и $r=1$ имеем

$$D_i m\,(B,k)\;-\;E_i m\,(B,k)\;=\;2\sum_{(n_1,n_2)\in K_1}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\;-$$
$$-\sum_{(n_1,n_2)\in K_2}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\,,\quad(11)$$

где $K_1=\{(n_1,n_2):n_1,n_2\geqslant 0,n_1+n_2\leqslant k-2\},K_2=\{(n_1,n_2):n_1,n_2=\overline{0,k-1}\}$.

Преобразуем правую часть последнего равенства к виду, удобному для предельного перехода. Для этого выразим слагаемые в (11) с помощью следующих равенств:

$$\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)\big)^*=\Big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)-\varPi\mathcal{P}(B)\big)\Big)^*+$$
$$+\;\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*+\Big(\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)-\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\Big)^*$$

и

$$\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)\big)^*=\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)-\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*+$$
$$+\;\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*$$

(здесь в первом равенстве мы воспользовались равенством $(A^*C)^*=A^*C^*$ для произвольных матриц A и C одинакового порядка).

Тогда равенство (11) примет вид

$$D_i m(B,k)-E_i m(B,k)\;=\;2\sum_{(n_1,n_2)\in K_1}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)-\varPi\mathcal{P}(B)\big)\big)^*\big]_{ii}+$$
$$+\;2\sum_{(n_1,n_2)\in K_1}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\;+\;2\sum_{(n_1,n_2)\in K_1}\big[\big(\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\;-$$
$$-\;\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\;-\sum_{(n_1,n_2)\in K_2}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)\;-$$
$$-\;\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\;-\sum_{(n_1,n_2)\in K_2}\big[\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\,.$$

Обозначим через $I_n(i,k),n=\overline{1,5}$ n-ю сумму в правой части этого равенства и рассмотрим предел $\lim\limits_{k\to\infty}k^{-1}(2(I_1(i,k)+I_2(i,k)+I_3(i,k))-I_4(i,k)-I_5(i,k))$.

При $k\geqslant 2$ имеем

$$I_1(i,k)=\big[\big(\sum_{n_1=0}^{k-2}\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\sum_{n_2=0}^{k-2-n_1}\big(\mathcal{P}^{n_2}\mathcal{P}(B)-\varPi\mathcal{P}(B)\big)\big)^*\big]_{ii}=\big[\big(\sum_{n=0}^{k-2}A(n)C(k-2-n)\big)^*\big]_{ii},$$

где $A(n)=\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B),\ C(n)=\sum\limits_{m=0}^{n}\big(\mathcal{P}^m\mathcal{P}(B)-\varPi\mathcal{P}(B)\big)$.

Так как выполнено $\lim\limits_{n\to\infty}A(n)=\varPi\mathcal{P}(B)$ и также поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}C(n)=\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\big)\mathcal{P}(B)$, то в силу леммы 3

$$\lim_{k\to\infty}k^{-1}I_1(i,k)=\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\big)\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\,.$$

Аналогично находятся пределы

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1} I_4(i,k) = \bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^* \bigl(\bigl((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\bigr)\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii},$$

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}\bigl(2I_2(i,k) - I_5(i,k)\bigr) = \bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^* \bigl(\bigl((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\bigr)\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii} - \\ - \bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii}\,.$$

Отметим, что все предыдущие вычисления справедливы для произвольной правильной цепи Маркова κ и для любого ее состояния i. Поэтому исследование предела

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}\bigl(2(I_1(i,k)+I_2(i,k)+I_3(i,k)) - I_4(i,k) - I_5(i,k)\bigr)$$

свелось к рассмотрению предела $\lim\limits_{k\to\infty} k^{-1} I_3(i,k)$.

Рассмотрим сумму

$$I_3(i,k) \;=\; \sum_{(n_1,n_2)\in K_1} \bigl[\bigl(\bigl(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B) - \bigl(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii}$$

и ее слагаемые $a_n(i)$, которым в силу матричного равенства $(AC)^* = (AC^*)^*$ придадим вид

$$a_n(i) = \bigl[\bigl(\bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B) - \bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)^*\bigr]_{ii}\,. \tag{12}$$

Докажем, что в случаях 1 и 2 (в условии теоремы) выполняются равенства $a_n(i) = 0$, а следовательно, и равенство $I_3(i,k) = 0$.

Пусть рассматриваемая цепь κ регулярна. Покажем, что в этом случае матрицы $\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B) - \bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigr)^*$ и $\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*$ перестановочны. Отсюда и в силу равенств

$$\bigl((A-A^*)C\bigr)^* = \bigl(C(A-A^*)\bigr)^* = \bigl(C(A-A^*)^*\bigr)^* = \bigl(C(A^*-A^*)\bigr)^* = O^* = O$$

(O — нулевая матрица) для перестановочных матриц $(A-A^*)$, C будет вытекать равенство $a_n(i) = 0$ для любого состояния i. Если рассматриваемая цепь κ регулярна, то все строки предельной матрицы $\varPi$ одинаковы [12. Гл. 12, § 5]. Отсюда вытекает, что $\varPi\mathcal{P}(B)$ также имеет одинаковые строки, а следовательно, $\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*$ с точностью до скалярного сомножителя совпадает с единичной матрицей и перестановочна с любой матрицей соответствующего порядка.

Пусть κ — правильная цепь, и i — ее существенное состояние, $S(i)$ — класс существенных состояний цепи, содержащий i. Тогда (см. (12))

$$\bigl[\bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)^*\bigr]_{ii} \;= \sum_{k=1}^{N} [\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik}[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*]_{kk} \;= \\ = \sum_{k\in S(i)} \bigl[\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigr]_{ik}\bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{kk} = \bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii} \sum_{k\in S(i)} [\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik} \;= \\ = \;\bigl[\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii}\bigl[\bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr]_{ii} = \bigl[\bigl(\bigl(\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigl(\varPi\mathcal{P}(B)\bigr)^*\bigr)^*\bigr]_{ii}\,,$$

поскольку $[\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik} = 0$ при $k\notin S(i)$ (так как $[\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik} \leqslant [\mathcal{P}^{n+1}]_{ik} = 0$ при $k\notin S(i)$). Таким образом, $a_n(i) = 0$ и $I_3(i,k) = 0$. Заметим, что, переходя в равенстве $a_n(i) = 0$ к пределу при $n\to\infty$, получим равенство (8).

Рассмотрим случаи 3 и 4 в условии теоремы. Пусть κ — нерегулярная цепь, и i — ее несущественное состояние. Преобразуем $I_3(i,k)$:

$$I_3(i,k) \;=\; \sum_{(n_1,n_2)\in K_1} \big[\big(\big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B) - \varPi\mathcal{P}(B)\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} + \\ + \sum_{(n_1,n_2)\in K_1} \big[\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^* - \big(\mathcal{P}^{n_1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} + \\ + 2^{-1}k(k-1)\big[\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B) - \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}. \quad (13)$$

Обозначим через $G_1(i,k), G_2(i,k)$ соответственно первую и вторую суммы в правой части этого равенства. Так как

$$\sum_{(n_1,n_2)\in K_1} (\mathcal{P}^{n_1} - \varPi) \;=\; (k-1)(I-\varPi) + \sum_{l=1}^{k-2}\sum_{m=1}^{l} (\mathcal{P}-\varPi)^m,$$

то в силу леммы 3 имеем

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1}\big(G_1(i,k)+G_2(i,k)\big) \;=\; \big[\big(\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\big)\mathcal{P}(B)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} - \\ - \;\big[\big(\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}-\varPi\big)\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}. \quad (14)$$

Если для состояния i выполнено $[\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B) - \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\ \varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii} \neq 0$, то в силу (13), (14)

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2} I_3(i,k) = 2^{-1}[\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B) - \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}\,,$$

а следовательно, и

$$\lim_{k\to\infty} k^{-2} D_i m(B,k) = [\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B) - \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii} > 0\,. \quad (15)$$

Равенство (10) для случая 4 установлено.

Предположим, что для несущественного состояния i выполнено предположение (8) теоремы, а следовательно, и (см. (13), (14))

$$\lim_{k\to\infty} k^{-1} I_3(i,k) = [\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}\mathcal{P}(B)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii} - \\ - \big[\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}. \quad (16)$$

Отметим (нам это понадобится в дальнейшем), что из предположения (8) относительно несущественного состояния i вытекает аналогичное соотношение для любого несущественного состояния j, достижимого из i :

$$\big[\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B) - \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{jj} = 0\,. \quad (17)$$

Действительно, в противном случае, применяя предыдущие вычисления к состоянию j, получим (см. (15)) $\lim\limits_{k\to\infty} k^{-2} D_j m(B,k) > 0$. Последнее неравенство в силу достижимости j из i влечет неравенство $\lim\limits_{k\to\infty} k^{-2} D_i m(B,k) > 0$, которое противоречит (16).

Далее покажем, что при сделанном предположении (8) правая часть (16) равна нулю. Обозначим через S множество существенных состояний цепи $\varkappa$. Как и ранее, H — множество несущественных состояний цепи $\varkappa$, и $S_1, S_2, \ldots, S_d,\ d \geqslant 2$ — разбиение множества существенных состояний S цепи на непересекающиеся классы сообщающихся состояний, $S(j) = S_m$, если $j \in S_m$. Обозначим также $\Pi_{kl} = [\Pi]_{kl}$. Обратимся к предположению (8). Рассмотрим выражение $[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}$, входящее в левую часть (8). Имеем

$$\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^*\big]_{ii} = \sum_{k=1}^{N}[\Pi\mathcal{P}(B)]_{ik}[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk} =$$

$$= \sum_{k\in S}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{ik}\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{kk} = \sum_{r=1}^{d}\sum_{k\in S_r}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{ik}\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{kk}, \quad (18)$$

поскольку $[\Pi\mathcal{P}(B)]_{ik} \leqslant [\Pi\mathcal{P}]_{ik} = \Pi_{ik} = 0$ при $i, k \in H$. Рассмотрим правую часть цепочки равенств (18). Величина $[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk}$ одинакова для всех $k \in S_r$, так как

$$\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{kk} = \sum_{j=1}^{N}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{kj} = \sum_{j=1}^{N}\sum_{l\in S_r}\Pi_{kl}\big[\mathcal{P}(B)\big]_{lj}$$

и $\Pi_{kl} = \Pi_{vl}$ при $v \in S_r$. Положим

$$\alpha_r = [\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk},\ k \in S_r\,. \quad (19)$$

Тогда из (18) вытекает

$$\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^*\big]_{ii} = \sum_{r=1}^{d}\alpha_r\sum_{k\in S_r}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{ik}\,. \quad (20)$$

Рассмотрим правую часть (20). Пусть $v \in S_r$ — некоторое фиксированное состояние. Тогда в силу леммы 4

$$\sum_{k\in S_r}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{ik} = \sum_{k\in S_r}\sum_{j=1}^{N}\Pi_{ij}\big[\mathcal{P}(B)\big]_{jk} = \sum_{k\in S_r}\sum_{j\in S_r}\Pi_{ij}\big[\mathcal{P}(B)\big]_{jk} =$$
$$= \sum_{k\in S_r}\sum_{j\in S_r}p(i,S_r)\Pi_{jj}\big[\mathcal{P}(B)\big]_{jk} = p(i,S_r)\sum_{k\in S_r}\sum_{j\in S_r}\Pi_{vj}\,\times$$
$$\times\,\big[\mathcal{P}(B)\big]_{jk} = p(i,S_r)\sum_{k\in S_r}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{vk} = p(i,S_r)\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{vv} = \alpha_r p(i,S_r)\,,$$

и, следовательно,

$$\sum_{k\in S_r}[\Pi\mathcal{P}(B)]_{ik} = \alpha_r p(i,S_r)\,. \quad (21)$$

Отсюда и из (20) следует

$$\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^*\big]_{ii} = \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2 p(i,S_r)\,.$$

Вновь обратимся к предположению (8) и рассмотрим выражение $([\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii})^2$, входящее в левую часть (8) (i — несущественное состояние). В силу (21) имеем

$$\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} = \sum_{k\in S}\big[\Pi\mathcal{P}(B)\big]_{ik} = \sum_{r=1}^{d}\alpha_r p(i,S_r)\,. \quad (22)$$

Таким образом, равенству (8) можно придать следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2 p(i,S_r) = \big(\sum_{r=1}^{d}\alpha_r p(i,S_r)\big)^2.$$

Преобразуем левую часть последнего равенства. В силу равенства $\sum\limits_{k=1}^{d} p(i,S_k)=1$ имеем

$$\sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2 p(i,S_r) = \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2\sum_{k=1}^{d} p(i,S_r)p(i,S_k) =$$

$$= \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2\Big(p^2(i,S_r) + \sum_{\substack{k=\overline{1,d},\\ k\neq r}} p(i,S_r)p(i,S_k)\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2 p^2(i,S_r) + \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2\sum_{k=r+1}^{d} p(i,S_r)p(i,S_k) + \sum_{k=1}^{d}\sum_{r=k+1}^{d}(\alpha_r)^2 p(i,S_r)p(i,S_k) =$$

$$= \sum_{r=1}^{d}(\alpha_r)^2 p^2(i,S_r) + \sum_{r=1}^{d-1}\sum_{k=r+1}^{d} p(i,S_r)p(i,S_k)\times\big((\alpha_r)^2+(\alpha_k)^2\big)\,.$$

Поэтому равенству (8) можно также придать следующий вид:

$$\sum_{r=1}^{d-1}\sum_{k=r+1}^{d} p(i,S_r)p(i,S_k)(\alpha_r-\alpha_k)^2 = 0\,. \tag{23}$$

Рассмотрим любой из номеров $n(i)\in\overline{1,d}$, для которого выполнено неравенство $p(i,S_{n(i)})>0$ (в силу равенства $\sum_{r=1}^{d} p(i,S_r)=1$ такой номер найдется). Тогда из соотношения (23) вытекает, что для любого номера $1\leqslant r\leqslant d$, $r\neq n(i)$ выполняется хотя бы одно из равенств

$$p(i,S_r)=0,\quad \alpha_r=\alpha_{n(i)}\,. \tag{24}$$

Отсюда в силу (22) вытекает

$$[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii} = \alpha_{n(i)}\,. \tag{25}$$

Аналогично для любого несущественного состояния j, достижимого из i (см. (17)), вытекает равенство

$$[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{jj} = \alpha_{n(j)}\,. \tag{26}$$

Если несущественное состояние j достижимо из i, то из $p(j,S_{n(j)})>0$ вытекает неравенство $p(i,S_{n(j)})>0$, и, следовательно (см. (24)),

$$\alpha_{n(j)} = \alpha_{n(i)}\,. \tag{27}$$

Обратимся к правой части (16). Имеем

$$\big[\big((I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}\mathcal{P}(B)\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} = \big[\big(\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^* +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathcal{P}^n-\varPi)\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^*\big]_{ii} = \sum_{k=1}^{N}\big[\mathcal{P}(B)\big]_{ik}\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{kk} +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{N}\big[(\mathcal{P}^n-\mathit{\Pi})\mathcal{P}(B)\big]_{ik}\big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{kk}.$$

Рассмотрим слагаемые в правой части последнего равенства. Пусть $k \in H$. Если $[\mathcal{P}(B)]_{ik} > 0$, то состояние k достижимо из i. Отсюда в силу (26), (27) вытекает $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk} = \alpha_{n(i)}$. Аналогично неравенство $[(\mathcal{P}^n - \mathit{\Pi})\mathcal{P}(B)]_{ik} \neq 0$ влечет достижимость k из i (так как $[\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)]_{ik} = 0$ при $i,k \in H$), и, следовательно, также $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk} = \alpha_{n(i)}$.

Пусть $k \in S_r$ для некоторого $r \in \overline{1,d}$. Если $[\mathcal{P}(B)]_{ik} > 0$, то $p(i,S_r) > 0$, и, следовательно, в силу (19), (24) имеем $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk} = \alpha_r = \alpha_{n(i)}$. Если $[\big(\mathcal{P}^n - \mathit{\Pi}\big)\mathcal{P}(B)]_{ik} \neq 0$, то выполняется хотя бы одно из неравенств $[\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik} > 0$, $[\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)]_{ik} > 0$. И в первом (так как $[\mathcal{P}^{n+1}]_{ik} \geq [\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik}$), и во втором случае (поскольку $[\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)]_{ik} = \lim\limits_{n\to\infty}[\mathcal{P}^n\mathcal{P}(B)]_{ik}$) получаем $p(i,S_r) > 0$, и, следовательно, $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk} = \alpha_{n(i)}$.

Таким образом, имеем (см. также (25))

$$\begin{aligned}\big[\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}\mathcal{P}(B)\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} &= \alpha_{n(i)}\big[\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} = \\ &= \big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\big[\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}.\end{aligned}$$

Следовательно, если для несущественного состояния i нерегулярной цепи $\varkappa$ выполнено соотношение (8), то правая часть (16) равна 0.

Таким образом, в любом из трех нижеперечисленных случаев:

1) i — произвольное состояние регулярной цепи;

2) i — произвольное существенное состояние нерегулярной цепи;

3) i — несущественное состояние нерегулярной цепи, для которого выполнено (8), имеем

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} k^{-1}\big(D_i m(B,k) - E_i m(B,k)\big) &= 2\big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}-\mathit{\Pi}\big)\times \\ &\times\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} - \big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}-\mathit{\Pi}\big)\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} + \big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\times \\ &\times\big(\big((I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}-\mathit{\Pi}\big)\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} - \big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} = 2\big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\times \\ &\times(I-\mathcal{P}+\mathit{\Pi})^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii} - 3\big[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}.\end{aligned}$$

Отсюда в силу следствия 3 вытекает равенство (9). Теорема доказана. □

Отметим, что для неразложимых непериодических цепей (т. е. для регулярных цепей, не содержащих несущественных состояний) равенство (9) может быть получено из соотношения (0.4) работы [6].

Замечание. Из доказательства предыдущей теоремы нетрудно видеть, что условие (8) применительно к несущественному состоянию i эквивалентно тому, что числа $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{jj}$ для всех существенных состояний j, достижимых из i, имеют общее значение. А отсюда, в свою очередь, вытекает, что это общее значение совпадает с числом $[\big(\mathit{\Pi}\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}$.

Отметим также, что в случаях 1, 2 теоремы 5 соотношение (8) выполнено.

Из неравенство Чебышева, с помощью теорем 4, 5, получим следствие.

Следствие 4. *Пусть правильная цепь* $\varkappa$ *и ее состояние* i *удовлетворяют любому из условий 1–3 теоремы 5. Тогда последовательность*

$$c_n\Big(\frac{m(B,n)}{n} - [\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}\Big),$$

где $c_n = o(\sqrt{n})$, *сходится по вероятности* P_i *к нулю.*

Обозначим правую часть равенства (9) через $\sigma_i^2(B)$ и найдем условия, при которых $\sigma_i^2(B) > 0$.

Теорема 6. *Пусть* $\varkappa$ *— правильная цепь Маркова, и* i *— ее состояние, удовлетворяющее условию (8). Тогда для выполнения неравенства* $\sigma_i^2(B) > 0$ *необходимо, чтобы для любого, и достаточно, чтобы для некоторого класса существенных состояний* K, *достижимого из* i, *выполнялось* $\mathcal{P}(B\cap K^2) \neq \mathcal{P}(K^2)$ *и* $\mathcal{P}(B\cap K^2) \neq O$ *(*O *— матрица, состоящая из нулей).*

Доказательство теоремы разобьем на два этапа. Вначале докажем утверждение теоремы для регулярной цепи $\varkappa$, все состояния которой существенны, а затем — в общем случае.

1-й этап. Пусть $\varkappa$ — регулярная цепь, все состояния которой существенны. Необходимость условий теоремы в этом случае вытекает из того, что при $\mathcal{P}(B) = \mathcal{P}$ или $\mathcal{P}(B) = O$ выполняется соответственно $P_i\big(m(B,n) = n, n \geqslant 1\big) = 1$ или $P_i\big(m(B,n) = 0, n \geqslant 1\big) = 1$ для $i = \overline{1,N}$, а следовательно, $D_i m(B,n) = 0, n \geqslant 1$, $i = \overline{1,N}$. Для доказательства достаточности условий теоремы запишем $\sigma_i^2(B)$ (с учетом (8)) в виде

$$\sigma_i^2(B) = [\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^* - \big(\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^2 + 2\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1} - \Pi\big)\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}$$

и преобразуем сумму первых двух слагаемых этого равенства:

$$\begin{aligned}\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^* - \big(\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^2 &= \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(I - \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big) = \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\Pi\mathcal{P} - \Pi\mathcal{P}(B)\big)^* = \\ &= \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^* = \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big(\big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^* + \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big) = \\ &= \big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big)^2 + \big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big(\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^2.\end{aligned}$$

Обозначим через Π_j общее значение $[\Pi]_{ij} > 0$, $i,j = \overline{1,N}$ и положим $p_{ij} = [\mathcal{P}]_{ij}$, $p_k = [\big(\mathcal{P}(B)\big)^*]_{kk}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\big[\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big(\big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big)^2 + \big(\Pi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big(\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^2\big]_{ii} = \\ &\quad = \sum_{(k,l)\in B} \Pi_k p_{kl}\big(1 - \sum_{d=1}^{N} \Pi_d p_d\big)^2 + \sum_{(k,l)\in B^c} \Pi_k p_{kl}\big(\sum_{d=1}^{N} \Pi_d p_d\big)^2 = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \Pi_k p_{kl} u_{kl}^2,\end{aligned}$$

где $u_{kl} = 1 - \sum\limits_{d=1}^{N} \Pi_d p_d$ при $(k,l) \in B$ и $u_{kl} = -\sum\limits_{d=1}^{N} \Pi_d p_d$ при $(k,l) \in B^c$. Рассмотрим матрицу $\Pi\mathcal{P}(B)\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1} - \Pi\big)\mathcal{P}(B)$ в представлении $\sigma_i^2(B)$. Обозначим через $T = \parallel t_{ij} \parallel_{i,j=\overline{1,N}}$ матрицу $\big((I-\mathcal{P}+\Pi)^{-1} - \Pi\big)\mathcal{P}(B)$ и положим $t_i = \sum\limits_{j=1}^{N} t_{ij}$. Отметим, что $\Pi \cdot T = O$ и $\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*$ — диагональная матрица с равными диагональными элементами (а следовательно, $\big(\Pi\mathcal{P}(B)\big)^*$ перестановочна с любой матрицей соответствующей размерности). Тогда

$$\big(\varPi\mathcal{P}(B)T\big)^* = \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^* + \big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big)^*\big)T\big)^* = \big(\varPi\mathcal{P}(B)T\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^* +$$
$$+ \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big)^*T\big)^* = \big(\varPi\big(\mathcal{P} - \mathcal{P}(B^c)\big)T\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^* +$$
$$+ \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big)^*T\big)^* = -\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*T\big)^* + \big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big)^*T\big)^* .$$

Для первого слагаемого в правой части последнего равенства имеем

$$\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*T\big)^*\big]_{ii} = \big[\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*T^*\big)^*\big]_{ii} =$$
$$= \sum_{l=1}^{N} [\varPi\mathcal{P}(B^c)]_{il}[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ll}[T^*]_{ll} = \sum_{l=1}^{N} [\varPi\mathcal{P}(B^c)]_{il} \sum_{r=1}^{N} [\varPi]_r p_r t_l =$$
$$= \sum_{r=1}^{N} \varPi_r p_r \sum_{l=1}^{N} \sum_{k:(k,l)\in B^c} \varPi_k p_{kl} t_l = \sum_{r=1}^{N} \varPi_r p_r \sum_{(k,l)\in B^c} \varPi_k p_{kl} t_l = -\sum_{(k,l)\in B^c} \varPi_k p_{kl} t_l u_{kl} .$$

Аналогично для второго слагаемого получим

$$\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(\varPi\mathcal{P}(B^c)\big)^*T\big)^*\big]_{ii} = \sum_{(k,l)\in B} \varPi_k p_{kl} t_l u_{kl} .$$

Таким образом,

$$\sigma_i^2(B) = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} u_{kl}^2 + 2 \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} u_{kl} t_l .$$

Аналогично тому, как это сделано в [2], преобразуем правую часть последнего равенства. Имеем

$$\sigma_i^2(B) = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl} + t_l)^2 - \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_l^2 = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k + t_k)^2 -$$
$$- \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_l^2 = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k)^2 + 2 \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k) t_k +$$
$$+ \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_k^2 - \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_l^2 = \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k)^2 +$$
$$+ 2 \sum_{k=\overline{1,N}} \Big(\varPi_k t_k \sum_{l=\overline{1,N}} p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k)\Big) ,$$

поскольку

$$\sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_k^2 = \sum_{k=\overline{1,N}} \varPi_k t_k^2 , \qquad \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} t_l^2 = \sum_{l=\overline{1,N}} t_l^2 \sum_{k=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl} = \sum_{l=\overline{1,N}} t_l^2 \varPi_l .$$

Продолжая преобразование, из равенства $\mathcal{P} \cdot T = T + (\varPi - I)\mathcal{P}(B)$ имеем

$$\sum_{l=\overline{1,N}} p_{kl}(u_{kl} + t_l - t_k) = \sum_{l=\overline{1,N}} p_{kl} u_{kl} + \sum_{l=\overline{1,N}} p_{kl} t_l - t_k = \sum_{l:(k,l)\in B} p_{kl}\Big(1 - \sum_{d=1}^{N} \varPi_d p_d\Big) +$$
$$+ \sum_{l:(k,l)\in B^c} p_{kl}\Big(-\sum_{d=1}^{N} \varPi_d p_d\Big) + [(\mathcal{P} \cdot T)^*]_{kk} - t_k = p_k\Big(1 - \sum_{d=1}^{N} \varPi_d p_d\Big) - (1 - p_k) \sum_{d=1}^{N} \varPi_d p_d +$$
$$+ t_k + \sum_{d=1}^{N} \varPi_d p_d - p_k - t_k = 0 .$$

Таким образом,

$$\sigma_i^2(B) \;=\; \sum_{k,l=\overline{1,N}} \varPi_k p_{kl}(u_{kl}+t_l-t_k)^2\,.$$

Для доказательства достаточности предположим, что $\sigma_i^2(B)=0$. Тогда для любой пары состояний (k,l), для которой $p_{kl}>0$, должно выполняться $u_{kl}+t_l-t_k=0$. Так как на данном этапе рассматриваемая цепь $\varkappa$ регулярна и все ее состояния сообщаются, то найдется целое положительное число r, начиная с которого все степени матрицы $\mathcal{P}$ состоят из положительных чисел. В частности, положительны числа $[\mathcal{P}^r]_{jj}$ и $[\mathcal{P}^{r+1}]_{jj}$ для произвольного состояния j цепи. Отсюда вытекает, что найдутся такие две последовательности состояний $j,i_1,\ldots,i_{r-1},j$ и $j,j_1,\ldots,j_r,j$, для которых вероятности перехода $p_{ji_1},\ldots,p_{i_{r-1}j}$ и $p_{jj_1},\ldots,p_{j_rj}$ положительны. Так что для выполнения равенства $\sigma_i^2(B)=0$ должны выполняться равенства

$$u_{ji_1}+t_{i_1}-t_j=0,\ \ \ldots,\ \ u_{i_{r-1}j}+t_j-t_{i_{r-1}}=0\,.$$

Складывая эти равенства, мы получим, что $\sum\limits_{d=1}^{N}\varPi_d p_d=r^{-1}\cdot n_1$ при некотором целом n_1: $0\le n_1\le r$. Аналогично рассматривая вторую цепочку состояний, получим равенство $\sum\limits_{d=1}^{N}\varPi_d p_d=(r+1)^{-1}\cdot n_2$ при некотором целом n_2: $0\le n_2\le r+1$. Из равенства $r^{-1}\cdot n_1=(r+1)^{-1}\cdot n_2$ вытекает, что либо $n_1=n_2=0$, либо $n_1=n_2-1=r$, т. е. $\mathcal{P}(B)=O$ или $\mathcal{P}(B)=\mathcal{P}$. Достаточность условий теоремы в рассматриваемом случае доказана.

2-й этап. Пусть $\varkappa$ — правильная цепь Маркова, и i — ее состояние, удовлетворяющее условию (8). Если i — существенное состояние, то единственным классом существенных состояний, достижимым из i, является класс, содержащий i. Поэтому доказательство теоремы в этом случае проводится аналогично доказательству на первом этапе. Пусть i — несущественное состояние, и $S_1^i,\ldots,S_{r(i)}^i$ — все классы существенных состояний, достижимых из i, так что $\sum\limits_{k=\overline{1,r(i)}}p(i,S_k^i)=1$ (напомним, что $p(i,S_k^i)$ — вероятность достижения цепью подкласса S_k^i из начального состояния i). Пусть $i_k\in S_k^i, k=\overline{1,r(i)}$ — произвольные состояния достижимых классов. Преобразуем правую часть (9). В силу замечания к теореме 5 выполняются равенства

$$\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}=\sum_{k=1}^{r(i)}p(i,S_k^i)\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{i_ki_k},$$

$$\big(\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}\big)^2=\sum_{k=1}^{r(i)}p(i,S_k^i)\big(\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{i_ki_k}\big)^2,$$

а в силу леммы 4

$$\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big(I-\mathcal{P}+\varPi\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{ii}=\big[\big(\varPi\big(\mathcal{P}(B)\big(I-\mathcal{P}+\varPi\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big)^*\big]_{ii}=$$
$$=\sum_{j=1}^{N}\varPi_{ij}\big[\big(\mathcal{P}(B)\big(I-\mathcal{P}+\varPi\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{jj}=\sum_{k=1}^{r(i)}\sum_{j\in S_k^i}p(i,S_k^i)\varPi_{i_kj}\big[\big(\mathcal{P}(B)\times$$
$$\times\big(I-\mathcal{P}+\varPi\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{jj}=\sum_{k=1}^{r(i)}\sum_{j=1}^{N}p(i,S_k^i)\varPi_{i_kj}\big[\big(\mathcal{P}(B)\big(I-\mathcal{P}+\varPi\big)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{jj}=$$

$$= \sum_{k=1}^{r(i)} p(i, S_k^i)\big[\big(\varPi\mathcal{P}(B)(I-\mathcal{P}+\varPi)^{-1}\mathcal{P}(B)\big)^*\big]_{i_k i_k},$$

поскольку $\varPi_{jj} = \varPi_{i_k j} = 0$ при $j \in S_k^i$ и $\varPi_{i_k j} = 0$ при $j \notin S_k^i$.

Таким образом, в силу (9) имеем

$$\sigma_i^2(B) = \sum_{k=1}^{r(i)} p(i, S_k^i)\sigma_{i_k}^2(B) = \sum_{k=1}^{r(i)} p(i, S_k^i)\sigma_{i_k}^2\big(B\cap(S_k^i)^2\big). \tag{28}$$

Для доказательства необходимости предположим $\sigma_i^2(B) > 0$, что в силу последнего равенства влечет неравенство $\sigma_{i_v}^2\big(B\cap(S_v^i)^2\big) > 0$ при некотором v ($1 \leqslant v \leqslant r(i)$). Отсюда следует (см. 1-й этап доказательства), что $\mathcal{P}\big(B\cap(S_v^i)^2\big) \neq \mathcal{P}\big((S_v^i)^2\big)$ и $\mathcal{P}\big(B\cap(S_v^i)^2\big) \neq O$ или, что эквивалентно, $[\big(\varPi\mathcal{P}\big(B\cap(S_v^i)^2\big)\big)^*]_{i_v i_v} \in (0,1)$. А так как в силу замечания к теореме 5 справедливы равенства

$$[\big(\varPi\mathcal{P}\big(B\cap(S_v^i)^2\big)\big)^*]_{i_v i_v} = [\big(\varPi\mathcal{P}\big(B\cap(S_m^i)^2\big)\big)^*]_{i_m i_m}, \quad m = \overline{1, r(i)},$$

то и $\mathcal{P}\big(B\cap(S_m^i)^2\big) \neq \mathcal{P}\big((S_m^i)^2\big)$, и $\mathcal{P}\big(B\cap(S_m^i)^2\big) \neq O$ для $m = \overline{1, r(i)}$. Необходимость условий установлена. Отметим, что при доказательстве необходимости мы также показали, что неравенство $\sigma_i^2(B) > 0$ влечет неравенства $\sigma_{i_k}^2(B) > 0$ для $k = \overline{1, r(i)}$.

Для доказательства достаточности допустим, что для некоторого класса S_m^i, $m \in \in \overline{1, r(i)}$ выполняется $\mathcal{P}\big(B\cap(S_m^i)^2\big) \neq \mathcal{P}\big((S_m^i)^2\big)$ и $\mathcal{P}\big(B\cap(S_m^i)^2\big) \neq O$. Тогда (см. 1-й этап доказательства) $\sigma_{i_m}^2(B) > 0$, что в силу (28) влечет неравенство $\sigma_i^2(B) > 0$. Теорема доказана. □

Теорема 7. *Пусть i — несущественное состояние правильной цепи $\varkappa$, удовлетворяющее (8), и $\sigma_i^2(B) > 0$; $S_1^i, \dots, S_{r(i)}^i$ — все классы существенных состояний, достижимых из состояния i, т. е. $p(i, S_m^i) > 0$, $m = \overline{1, r(i)}$). Тогда*

$$P_i\bigg(\frac{m(B,n) - n[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}}{\sigma_i(B)\sqrt{n}} < x\bigg) \to \sum_{m=1}^{r(i)} p(i, S_m^i)\Phi\bigg(\frac{\sigma_i(B)}{\sigma_{m,i}(B)}x\bigg)$$

при $n \to \infty$, где $\sigma_{m,i}^2(B)$ — общее значение величин $\sigma_j^2(B)$, $j \in S_m^i$, и $\Phi(x)$ — стандартная нормальная функция распределения.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$m_i(B,n) = \frac{m(B,n) - n[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii}}{\sigma_i(B)\sqrt{n}},$$

c — произвольная положительная целочисленная константа, $S_+(i) = \bigcup_{m=1}^{r(i)} S_m^i$ — множество существенных состояний, достижимых из состояния i. Тогда

$$\begin{aligned} P_i(m_i(B,n) < x) \;=\; & P_i(m_i(B,n) < x, s(B\setminus(H\times D)) > c) \;+ \\ & + \sum_{k=1}^{c}\sum_{j\in S_+(i)} P_i\big(m_i(B,n) < x, s(B\setminus(H\times D)) = k, \varkappa_k = j\big). \end{aligned} \tag{29}$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (29). При $n > c \geq k,\ j \in S_+(i)$

$$P_i(m_i(B,n) < x, s(B \setminus (H \times D)) = k, \varkappa_k = j) = \int_{-\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}}^{\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}} P_i(m_i(B,k)\sqrt{kn^{-1}} \in dy,$$
$$s(B \setminus (H \times D)) = k, \varkappa_k = j)P_j(m_i(B,n-k)\sqrt{(n-k)n^{-1}} < x - y), \tag{30}$$

поскольку выполняется

$$\left|m_i(B,k)\sqrt{kn^{-1}}\right| \leqslant \frac{k}{\sigma_i(B)\sqrt{n}} \leqslant \frac{\sqrt{cn}}{\sigma_i(B)\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}\,.$$

Из результатов работы [4] вытекает, что для существенного состояния j при $n \to \infty$ $P_j(m_j(B,n) < x) \to \Phi(x)$. В силу замечания к теореме 5 выполняется равенство $[\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{ii} = [\big(\varPi\mathcal{P}(B)\big)^*]_{jj}$ для $j \in S_+(i)$. Поэтому

$$P_j\big(m_i(B,n-k)\sqrt{(n-k)n^{-1}} < x\big) =$$
$$= P_j\big(m_j(B,n-k)\sqrt{(n-k)n^{-1}} \cdot \sigma_j(B)\sigma_i^{-1}(B) < x\big) \to \Phi(\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B) \cdot x)$$

при $n \to \infty$. Так как функция $\Phi(x)$ непрерывна, то эта сходимость равномерна на любом компакте. Поэтому

$$P_j\big(m_i(B,n-k)\sqrt{(n-k)n^{-1}} < x - y\big) \to \Phi\big((x-y) \cdot \sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B)\big)$$

при $n \to \infty$ равномерно для всех $y : |\ y\ | \leqslant \sqrt{c} \cdot \big(\sigma_i(B)\big)^{-1}$. Тогда для правой части (30) получим при $n \to \infty$

$$\int_{-\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}}^{\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}} P_i(m_i(B,k)\sqrt{kn^{-1}} \in dy, s(B \setminus (H \times D)) = k, \varkappa_k = j) \times$$
$$\times \{P_j(m_i(B,n-k)\sqrt{(n-k)n^{-1}} < x - y) - \Phi((x-y)\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B))\} +$$
$$+ \int_{-\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}}^{\frac{\sqrt{c}}{\sigma_i(B)}} P_i(m_i(B,k)\sqrt{kn^{-1}}) \in dy, s(B \setminus (H \times D)) = k, \varkappa_k = j) \times$$
$$\times \Phi((x-y)\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B)) \to P_i(s(B\backslash(H \times D)) = k, \varkappa_k = j)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B))\,.$$

Отсюда, переходя в крайних частях (30) к пределу при $n \to \infty$, получим

$$\lim_{n\to\infty} P_i(m_i(B,n) < x, s(B \setminus (H \times D)) = k, \varkappa_k = j) =$$
$$= P_i(s(B\backslash(H \times D)) = k, \varkappa_k = j)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B)) \tag{31}$$

для $1 \leqslant k \leqslant c,\ j \in S_+(i)$.

Отсюда в силу (29) вытекает

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P_i(m_i(B,n) < x) \leqslant P_i(s(B \setminus (H \times D)) > c) +$$

$$+\sum_{k=1}^{c}\sum_{j\in S_+(i)} P_i(s(B\setminus(H\times D))=k, \varkappa_k=j)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B)).$$

Величина $s(B\setminus(H\times D))$ P_i-п. н. конечна. Поэтому, переходя в крайних частях последнего неравенства к пределу при $c\to\infty$, получим

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} P_i(m_i(B,n)<x)\leqslant \sum_{j\in S_+(i)} P_i(\varkappa_{s(B\setminus(H\times D))}=j)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_j^{-1}(B))=$$

$$=\sum_{m=1}^{r(i)} p(i,S_m^i)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_{m,\ i}^{-1}(B))\,.$$

Из соотношений (29), (31) также следует, что

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} P_i(m_i(B,n)<x)\geqslant \sum_{m=1}^{r(i)} p(i,S_m^i)\Phi(x\sigma_i(B)\sigma_{m,\ i}^{-1}(B))\,.$$

Теорема доказана. □

Замечание. Если $\sigma_{m,\ i}^2(B)$, $m=\overline{1,r(i)}$ равны между собой, то их общее значение равно $\sigma_i^2(B)$ (см. (28)), и, следовательно, $P_i\Big(\frac{m(B,n)-n[\left(\varPi\mathcal{P}(B)\right)^*]_{ii}}{\sigma_i(B)\sqrt{n}}<x\Big)\to\Phi(x)$ при $n\to\infty$.

Автор признателен рецензенту за сделанные замечания к работе.

Список литературы

1. *Колмогоров А. Н.* Локальная предельная теорема для классических цепей Маркова // Изв. АН СССР. Серия матем. 1949. Т. 13, № 4. С. 281–300.

2. *Романовский В. И.* Дискретные цепи Маркова. М.; Л: Гостехиздат, 1949.

3. *Нагаев С. В.* Некоторые предельные теоремы для однородных цепей Маркова // Теор. вер. и ее примен. 1957. Т. 2, № 4. С. 389–416.

4. *Волков И. С.* О распределении сумм случайных величин, заданных на однородной цепи Маркова с конечным числом состояний // Теор. вер. и ее примен. 1958. Т. 3, № 4. С. 413–429.

5. *Keilson J., Wishart D. M. G.* A Central Limit Theorem for Processes Defined on a Finite Markov Chain // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1964. Vol. 60. P. 547–567.

6. *Keilson J., Wishart D. M. G.* Addenda to Processes Defined on a Finite Markov Chain // Proc. Cambridge Philos. Soc. 1967. Vol. 63. P. 187–193.

7. *Чжун К. Л.* Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964.

8. *Кемени Дж. Г., Снелл Дж. Л.* Конечные цепи Маркова. М.: Наука, 1970.

9. *Смирнов Н. В., Сарманов О. В., Захаров В. К.* Локальная предельная теорема для чисел переходов в цепи Маркова и ее применения // ДАН СССР. 1966. Т. 167, № 6. С. 1238–1241.

10. *Захаров В. К., Сарманов О. В.* О законе распределения числа серий в однородной цепи Маркова // ДАН СССР. 1968. Т. 179, № 3. С. 526–528.

11. *Савельев Л. Я., Балакин С. В.* Совместное распределение числа единиц и числа 1-серий в двоичных марковских последовательностях // Дискретная математика. 2004. Т. 16, № 3. С. 43–62.

12. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1986.

13. *Lugavov V. S.* On Functionals on the Markov Chain Transitions // IV International Conference. Novosibirsk, 2006. С. 22–23.

14. *Лугавов В. С., Рогозин Б. А.* Теория восстановления и факторизационные тождества для блужданий на цепи Маркова. Деп. в ВИНИТИ 06.07.88, № 5425-В88.

15. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. М.: Наука, 1966.

Материал поступил в редколлегию 13.11.2011

Адрес автора

ЛУГАВОВ Вячеслав Семенович

Курганский государственный университет

ул. Гоголя, 25, Курган, 640669, Россия

e-mail: lugavov@kgsu.ru