УДК 512.54

Г. А. Носков

ОБРАЗ ГРУППЫ АВТОМОРФИЗМОВ ГРАФ-ГРУППЫ ПРИ ГОМОМОРФИЗМЕ АБЕЛЕАНИЗАЦИИ*

Рассматриваются граф-группы, т. е. группы, задаваемые генетическим кодом, содержащим только соотношения перестановочности для некоторых пар порождающих. Описывается образ группы автоморфизмов граф-группы при отображении абелеанизации.

Ключевые слова: граф-группа, орграф зацеплений, алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа, разложение Леви, унипотентный радикал, редуктивная группа, арифметическая группа, свойство Каждана (T), свойство Серра (FA), группа автоморфизмов.

Введение

Граф-группа задается генетическим кодом, содержащим только соотношения перестановочности порождающих. Граф-группы известны также под другими названиями: полусвободные группы, прямоугольные группы Артина, группы следов, локально свободные группы, свободные частично коммутативные группы. Они имеют хорошие алгоритмические свойства и действуют на кубических комплексах неположительной кривизны. Граф-группы появляются в нескольких ветвях математики и возникают в разных математических контекстах. Мы отсылаем к следующим работам: о свойствах конечности для групп [1], о границах CAT(0) пространств [2], о конфигурационных пространствах в робототехнике [3; 4], о теории следов в компьютер-сайенс [5]. Общий обзор литературы о граф-группах содержится в [6].

Элегантное описание граф-группы дается посредством конечного симплициального графа Γ. Если V есть множество вершин графа Γ, то группа G_Γ задается генетическим кодом

$$G_\Gamma = \langle V \mid vw = wv, \text{ если } v \text{ и } w \text{ инцидентны в } \Gamma\rangle.$$

Отображение $\Gamma \to G_\Gamma$ есть ковариантный функтор из категории графов в категорию групп. Этот функтор сохраняет вложения (что на самом деле верно для всех групп Артина, см. [7]). Другими словами, для любого полного подграфа Γ' графа Γ группа $G_{\Gamma'}$ канонически вложима в G_Γ.

Двумя экстремальными симплициальными структурами графа на множестве V являются *пустой граф* (= граф без ребер) и *полный граф* (его ребрами являются все 2-элементные подмножества в V). В первом случае G_Γ есть свободная группа F_n ранга $n = |V|$; во втором случае G_Γ — свободная абелева группа ранга $|V|$. В общем случае граф-группу полезно представлять себе как смесь этих двух типов.

* Работа была поддержана грантом SFB 701 университета Билефельд (Германия) и грантом РФФИ № 080100067.

Группы автоморфизмов свободных групп и свободных абелевых групп широко изучены. Что касается граф-групп, то до недавнего времени кроме работ Г. Серватиуса [8] и М. Лоуренса [9] о порождающих множествах мало что было известно. В статьях [10; 11] авторы начали систематическое исследование проблемы.

В настоящей работе мы изучаем образ естественного гомоморфизма абелеанизации

$$\alpha : \mathrm{Aut}\,(G_\Gamma) \to \mathrm{Aut}\left(G_\Gamma^{ab}\right) = GL\,(\mathbb{Z}V)\,,$$

где $\mathbb{Z}V$ обозначает свободную абелеву группу с базой V. Результат Нильсена (1924 г.) утверждает, что α является эпиморфизмом в случае свободной группы G_Γ. Наш первый результат дает следующее обобщение.

Теорема 1. *Для любого конечного графа* Γ *образ абелеанизации*

$$\alpha : \mathrm{Aut}\,(G_\Gamma) \to GL\,(\mathbb{Z}V)$$

является арифметической подгруппой группы $GL\,(\mathbb{Q}V)$.

Результат можно рассматривать как дополнение к работе [10], в которой введен канонический «стабилизатор» S_Γ в $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$, и доказана его арифметичность. Более точно,

$$S_\Gamma = \{\phi \in \mathrm{Aut}(G_\Gamma) : \phi G_U = G_U \text{ для всех замкнутых } U\}.$$

Здесь по определению подмножество U множества V *замкнуто*, если $U = st\,(st\,(U))$ (определение *звезды* $st\,(U)$ см. ниже).

Арифметические представления группы автоморфизмов свободной группы другого типа построены в [12]. Пусть G — конечная группа, и $\beta : F_n \to G$ есть сюръективный гомоморфизм свободной группы F_n на G. Обозначим через R ядро β. Определим

$$A(G, \beta) := \{\phi \in \mathrm{Aut}(F_n) : \phi\,(R) = R, \ \phi \text{ индуцирует тождество на } F_n/R\}.$$

Эта подгруппа имеет конечный индекс в $\mathrm{Aut}(F_n)$. Более того, $A(G, \alpha)$ действует естественно на модуле соотношений $\bar{Q} := R/\,[R, R]$, и это действие приводит к представлению

$$\pi : A(G, \beta) \to GL\left(\bar{Q}\right).$$

Теорема [12]. *Для любого натурального* $n \geq 4$ *и любого приводимого эпиморфизма* $\beta : F_n \to G$ *на конечную группу* G *группа* $\mathrm{Im}\,\pi$ *является арифметической подгруппой в* $GL\left(\bar{Q}\right)$.

(Эпиморфизм $\beta : F_n \to G$ называется *приводимым*, если имеется база $x_1, \ldots, x_n$ группы F_n, такая, что $\beta(x_n) = 1$.)

На самом деле наша теорема 1 будет выведена из результата о линейных группах, порожденных трансвекциями. Именно используя результаты о порождении $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$, мы покажем, что $\alpha\,(\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma))$ почти порождается множеством трансвекций определенного типа — это множество полностью определяется некоторым направленным «графом зацеплений» Δ, который легко описывается в терминах Γ. Для точной формулировки результата напомним, что для любой вершины v в Γ ее *линк* v определяется как

$$lk(v) = \{x \in V : (v, x) \in \Delta\},$$

и *звезда* v есть $st(v) = lk(v) \cup \{v\}$. *Звезда* подмножества $U \leq V$ есть пересечение звезд всех вершин U. По определению *орграф зацеплений* Δ графа Γ имеет то же множество вершин V, что и Γ, и $(u, v) \in V \times V$ есть ориентированное ребро (= *дуга*) в Δ, если $u \neq v$, и $\mathrm{lk}\,(u) \subseteq \mathrm{st}\,(v)$ в Γ.

Объясняя конструкцию линейной группы по орграфу Δ, мы будем считать для удобства, что $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Дуге $(i, j) \in \Delta$ сопоставим целочисленную матрицу размером $n \times n$ (= *трансвекцию*)

$$t_{ij}\,(a) = e + ae_{ij},$$

где e есть единичная матрица, $a \in \Lambda, 1 \leq i \neq j \leq n$, и e_{ij} есть матрица размером $n \times n$, которая имеет 1 на (i, j)-позиции и 0 на остальных. Обозначим через T_Δ подгруппу группы $GL_n\,(\mathbb{Z})$, порожденную множеством трансвекций $t_{ij} = t_{ij}\,(1)\ \ (i, j \in \Delta)$. Таким образом, мы определили отображение

$$\{\text{Орграфы на } \{1, 2, \dots, n\}\} \to \{\text{Группы, порожденные трансвекциями в } GL_n\,(\mathbb{Z})\}\,.$$

Из описания порождающих группы $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$, данного М. Лоуренсом [9], следует, что $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ по существу порождается трансвекциями из T_Δ. Более точно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Для конечного графа Γ группа $\alpha\,(\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma))$ содержит T_Δ в качестве подгруппы конечного индекса.*

Следующий результат показывает арифметичность группы, порожденной трансвекциями.

Теорема 3. *Для любого направленного графа Δ группа T_Δ есть арифметическая подгруппа в $GL\,(\mathbb{Q}V)$, где $V = V(\Delta)$, и $\mathbb{Q}V$ обозначает вещественное векторное пространство с базой V.*

Две сформулированные теоремы легко влекут теорему 1.

Обычный способ доказательства арифметичности основан на знаменитой теореме арифметичности Г. А. Маргулиса. Мы не смогли реализовать этот подход. Вместо этого мы непосредственно описываем замыкание G_Δ группы T_Δ в «полиномиальной топологии» (= топологии Зарисского) и затем показываем, что его целочисленная часть $G_\Delta\,(\mathbb{Z})$ соизмерима с T_Δ, доказывая таким образом арифметичность.

Группу G_Δ будем называть Δ-группой (над полем $\mathbb{Q}$). Она определяется системой линейных уравнений. Вначале возьмем так называемое *транзитивное замыкание* $\bar{\Delta}$ графа Δ, добавляя для каждой пары различных $u, v \in V$ дугу $(u, v) \in V \times V$ всякий раз, когда в Δ существует направленный путь из u в v. Легко видеть, что $T_\Delta = T_{\overline{\Delta}}$, так что мы можем предполагать далее, что Δ *транзитивен*, т. е. $(u, v) \in \Delta$ тогда и только тогда, когда в Δ имеется направленный путь из u в v.

С орграфом Δ ассоциируется множество M_Δ всех вещественных матриц $a = (a_{uv})$ с множеством индексов $V \times V$ таких, что $a_{uv} = 0,$ если $u \neq v,$ и $(u, v) \notin \Delta$. Оказывается, что M_Δ есть подкольцо матричного кольца $Mat_n\,(\mathbb{Q})$. Затем мы определяем *Δ-группу* $G_\Delta(\mathbb{Q})$ как мультипликативную группу всех обратимых матриц в $M_\Delta : G_\Delta = M_\Delta^\times$.

По самому определению G_Δ есть линейная вещественная алгебраическая $\mathbb{Q}$-определенная группа. Таким образом, для доказательства арифметичности T_Γ остается доказать, что она имеет конечный индекс в группе целых точек $G_\Delta(\mathbb{Z})$. Доказательство проходит в три шага. Сначала мы рассмотрим два случая, когда G_Δ либо разрешима, либо редуктивна. Для общего случая мы используем полупрямое «разложение Леви» группы G_Δ.

Свойства Δ-групп.

Следующие результаты показывают, как теоретико-групповые свойства Δ-групп выражаются в терминах «теоретико-графовых» свойств орграфа Δ.

Теорема 4. *Для любого транзитивного орграфа Δ следующие условия эквивалентны:*

1) *орграф Δ ацикличен;*
2) *группа G_Δ треугольна;*
3) *группа целых точек $G_\Delta(\mathbb{Z})$ почти нильпотентна;*
4) *группа G_Δ почти разрешима.*

Теорема 5. *Для любого транзитивного орграфа Δ группа G_Δ тогда и только тогда редуктивна, когда Δ симметричен (т. е. каждая дуга имеет обратную).*

Мы получим последний результат как следствие структурной теоремы для Δ-групп, а именно разложение Леви группы G_Δ в терминах Δ (см. п. 2.3).

Применения к свойству Каждана (T) и свойству Серра (FA). До сих пор неизвестно, обладает ли группа $\mathrm{Aut}(F_n)$ свойством (T) при $n > 3$. Мы даем отрицательный ответ на этот вопрос в классе граф-групп.

Теорема 6. *Существует граф Γ с шестью вершинами такой, что* $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ *имеет положительное виртуальное первое число Бетти, т. е. имеет подгруппу конечного индекса, допускающую гомоморфизм на $\mathbb{Z}$. В частности,* $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ *не обладает свойством (FA), а значит, не обладает и свойством (T).*

Обозначения и соглашения. На протяжении статьи все графы будут конечными. Γ (возможно, с индексами) всегда будет обозначать симплициальный граф, в то время как Δ — орграф. Все вновь вводимые понятия выделяются курсивом.

Работа была стимулирована беседами с проф. Э. Данкеном и проф. В. Н. Ремесленниковым.

1. Орграфы

Настоящий параграф содержит некоторые элементарные факты из теории орграфов, которые оказалось проще доказать непосредственно, чем найти в литературе. Напомним, что *орграф* Δ состоит из множества *вершин* $V = V(\Delta)$ и множества $E = E(\Delta) \subseteq \subseteq V \times V$ упорядоченных пар различных вершин, называемых *дугами.* Таким образом, дуга $e = uv \in V \times V, u \neq v$, имеет *начало* $\iota e = u$ и *конец* $\tau e = v$. Можно сказать, что дуга e *идет* из ιe в τe, *выходит* из u и *входит* в v. Если $uv, vu \in E$, то дуга uv называется *обратной* к vu. (Направленный) *путь* есть такая последовательность $e_1 \cdots e_n$

дуг, что конец e_i есть начало e_{i+1} для всех i. Путь можно определить также как последовательность вершин, удовлетворяющих определенным условиям. Путь $v_0 v_1 \cdots v_n$ такой, что $v_n = v_0$, называется *n-циклом*, при этом n называется его *длиной. Источником* называется вершина без входящих дуг, в то время как *сток* есть вершина без выходящих дуг. Таким образом, изолированная вершина является источником и стоком одновременно. Подграф Δ_0 орграфа Δ называется *индуцированным*, если для любой пары вершин x и y из Δ_0 дуга (x, y) принадлежит Δ_0 в том и только том случае, когда она принадлежит Δ.

Лемма 1. *В любом конечном ациклическом орграфе имеются по крайней мере один источник и один сток.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим противное, т. е. что каждая вершина имеет входящую дугу. Стартуя из любой вершины v, мы можем построить сколь угодно длинный путь, беря входящую в v дугу e, затем дугу, входящую в ιe, и т. д. Ввиду конечности графа построенный путь будет содержать цикл — противоречие. Существование стока доказывается аналогично. $\square$

Орграф Δ *транзитивен*, если для любой пары различных вершин u, v из существования пути из u в v следует существование дуги с этим же свойством. Мы понимаем, что гораздо чаще в литературе под транзитивностью понимается транзитивность относительно группы автоморфизмов графа. В нашей статье такое понятие не будет использоваться. Очевидно, всякий граф Δ допускает единственный объемлющий транзитивный граф Δ' (*транзитивное замыкание*), получаемый из Δ добавлением для любых различных u, v дуги $(u, v) \in V \times V$ всякий раз, когда имеется путь в Δ из u в v.

Лемма 2. *Транзитивный орграф Δ ацикличен тогда и только тогда, когда он не содержит 2-циклов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что Δ не содержит 2-циклов, но существует цикл $v_0 v_1 \cdots v_n$ длиной $n \geq 3$. Упорядоченная пара (v_n, v_0) есть дуга ввиду цикличности. Из транзитивности следует существование дуг $(v_0, v_2), (v_0, v_3), \ldots (v_0, v_n)$. Таким образом, мы нашли 2-цикл $(v_n, v_0)(v_0, v_n)$ — противоречие. $\square$

1.1. *Флаги в ациклических графах*

Определение 1. *Флагом (длиной n)* в орграфе Δ называется такая цепочка полных подграфов $\Delta = \Delta_n > \Delta_{n-1} > \cdots > \Delta_1$, что Δ_1 есть пустой граф, и все дуги из Δ_{i+1} входят в Δ_i при $1 \leq i \leq n-1$. *Длина* $l(\Delta)$ есть длина кратчайшего флага в Δ. *Диаметр* $d(\Delta)$ есть наибольшая длина пути в Δ.

Лемма 3. *В каждом конечном ациклическом орграфе Δ имеется по крайней мере один флаг.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Delta_n = \Delta$. По лемме 1, Δ_n имеет по крайней мере один источник, скажем, v_n. Обозначим через Δ_{n-1} индуцированный подграф на множестве $V - \{v_n\} = V_{n-1}$. Тогда Δ_{n-1} есть снова конечный ациклический орграф, и мы можем продолжить конструкцию по индукции. $\square$

Лемма 4. *Для любого конечного ациклического орграфа* Δ *выполняется равенство* $l(\Delta) = d(\Delta) + 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проведем индукцию по числу вершин. Индуктивный шаг очевиден, если имеется изолированная вершина, поэтому предполагаем, что изолированных вершин нет. Обозначим через V' множество всех конечных вершин всех дуг графа Δ и через Δ' индуцированный подграф на V'. Ввиду леммы 3 в Δ имеется источник, и по определению он не принадлежит Δ'. Более того, все дуги Δ заканчиваются в Δ'. Для завершения доказательства достаточно показать, что $l(\Delta) = l(\Delta') + 1$ и $d(\Delta) = d(\Delta') + 1$. Чтобы убедиться в первом равенстве, заметим, что всякий флаг в Δ' можно расширить до флага в Δ, ставя первым членом Δ. Следовательно, $l(\Delta) \leq l(\Delta') + 1$. Далее, если $\Delta = \Delta_k > \Delta_{k-1} > \cdots > \Delta_1$ есть флаг в Δ, то $\Delta_{k-1} \geq \Delta'$, и, значит, мы имеем флаг $\Delta' \geq \Delta_{k-2} \cap \Delta' \geq \cdots \geq \Delta_0 \cap \Delta'$ в Δ' длиной $k-1$, следовательно, $l(\Delta') \leq l(\Delta) - 1$. Для доказательства второго равенства заметим, что если $e_1 e_2 \cdots e_m$ есть путь в Δ, то $e_2 \cdots e_m$ — путь в Δ', следовательно, $d(\Delta') \leq d(\Delta) - 1$. Кроме того, если $e_2 \cdots e_m$ есть путь в Δ', то, по определению Δ', начальная вершина e_2 является конечной вершиной некоторой дуги e_1, следовательно, мы имеем путь $e_1 e_2 \cdots e_m$ в Δ длиной m. Мы заключаем, что $d(\Delta) \leq d(\Delta') + 1$. □

1.2. *Симметрические графы*

Назовем орграф Δ *симметрическим*, если вместе с любой дугой (i, j) он содержит обратную дугу (j, i). Например, всякий полный орграф симметричен, равно как и дизъюнктное объединение таковых.

Лемма 5. *Транзитивный орграф симметричен в том и только том случае, когда он является дизъюнктным объединением полных орграфов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть Δ — транзитивный симметрический флаг. Определим отношение $\sim$ на V, полагая $u \sim v$, если имеется дуга из u в v. Отношение $\sim$ является эквивалентностью, и каждый класс эквивалентности есть полный орграф. Обратно, если Δ — объединение полных орграфов, то, очевидно, Δ транзитивен и симметричен.

□

1.3. *Разложение общего орграфа*

Дуга орграфа Δ будет называться *2-дугой*, если она имеет обратную дугу. Соответственно дуга, не имеющая обратной, будет именоваться *1-дугой.* Разложим Δ в дизъюнктное объединение подграфов на множестве $V(\Delta)$, а именно:

$$\Delta_1 = \{1 - \text{ дуги в } \Delta\}, \; \Delta_2 = \{2 - \text{ дуги в } \Delta\}.$$

Будем называть Δ_1, Δ_2 *асимметрической* и *симметрической* компонентами соответственно (см. рис. 1 и 2).

Лемма 6. *Если* Δ *— транзитивный орграф, то* Δ_1 *— транзитивный ациклический граф, а* Δ_2 *— транзитивный симметрический граф.*

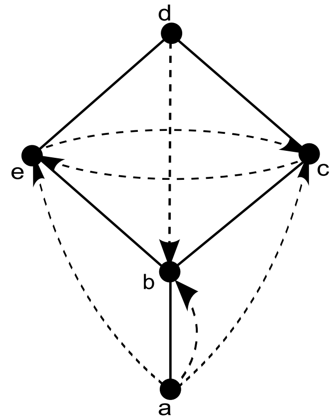

Рис. 1. Граф Γ (сплошная линия) и его орграф зацеплений Δ (штриховая линия)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Δ_1 *ацикличен.* Действительно, если $v_1 v_2 \cdots v_m$ есть цикл в Δ_1, то ввиду транзитивности Δ содержит полный граф на множестве $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ (рассуждаем, как в лемме 2), следовательно, $(v_i, v_j) \in \Delta_1$ для любого $i \neq j$ — в частности, все эти дуги есть 2-дуги в противоречии с определением Δ_1.

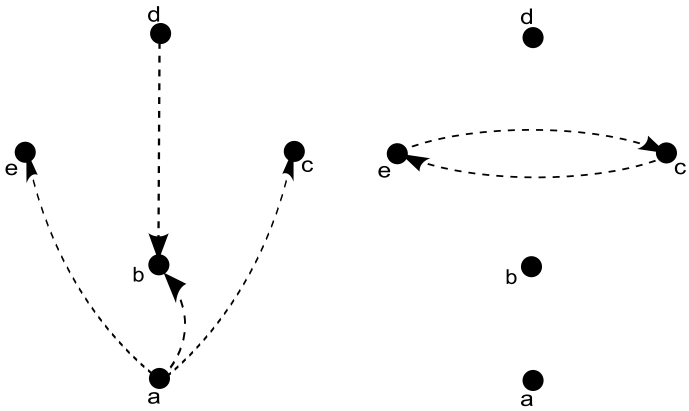

Рис. 2. Орграфы Δ_1 и Δ_2 для орграфа Δ из рис. 1

Δ_1 *транзитивен.* Рассмотрим произвольный путь $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$ в Δ_1. Тогда $(v_1, v_m) \in \Delta$ по предположению о транзитивности. Осталось убедиться, что (v_1, v_m) есть 1-дуга. Предположим противное, т. е. $(v_m, v_1) \in \Delta$, тогда по транзитивности индуктивно получаем, что $(v_m, v_2) \in \Delta, (v_m, v_3) \in \Delta, \ldots, (v_m, v_{m-1}) \in \Delta$ — последнее включение влечет, что (v_{m-1}, v_m) есть 2-дуга в противоречии с выбором $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$.

Δ_2 *симметричен.* Это справедливо по определению.

Δ_2 *транзитивен.* Пусть $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ — путь из 2-дуг в Δ_2, тогда $(v_1, v_2, \ldots, v_m)$ и $(v_m, v_{m-1}, \ldots, v_1)$ есть пути в Δ, следовательно, ввиду транзитивности (v_1, v_m), $(v_m, v_1) \in \Delta_2$, что требовалось. □

1.4. *Орграф зацеплений симплициального графа*

Пусть Γ — симплициальный граф с множеством вершин V. Напомним, что для любой вершины v в Γ определены *линк* $\mathrm{lk}(v) = \{x \in V : (v, x) \in E\}$ и *звезда* $\mathrm{st}(v) = \mathrm{lk}(v) \cup \{v\}$. Более интуитивно, линк и звезда есть единичная *сфера* и единичный *шар* с центром v соответственно. С графом Γ ассоциируется *орграф зацеплений* Δ на V, определяемый следующим образом: $(u,v) \in V \times V$ есть дуга в Δ, если $u \neq v$ и $\mathrm{lk}\,(u) \subseteq \mathrm{st}\,(v)$.

2. Линейные Δ-группы

Пусть Δ — транзитивный орграф на V. С Δ ассоциируется множество M_Δ всех вещественных матриц $a = (a_{uv})\,, u, v \in V$ таких, что

$$a_{uv} = 0, \text{ если} u \neq v \text{ и } (u,v) \notin \Delta.$$

Заметим, что любое упорядочение базы V позволяет канонически отождествить M_Δ с подмножеством полной матричной алгебры $Mat_n\,(\mathbb{Q})\,, n = |V|$.

Лемма 7. *M_Δ является ассоциативной $\mathbb{Q}$-подалгеброй в $Mat_n\,(\mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что M_Δ есть подпространство в $Mat_n\,(\mathbb{Q})$. Предположим, что $a, b \in M_\Delta$ и $u \neq v$, $(u,v) \notin \Delta$. Тогда

$$(ab)_{uv} = \sum_w a_{uw} b_{wv}.$$

Для любого $w \in V$ по крайней мере одна из пар (u,w), (w,v) не принадлежит Δ, так как иначе, по условию транзитивности $(u,v) \in \Delta$, в противоречии с предположением. Поэтому $a_{uw}b_{wv} = 0$ для каждого w, и, значит, $(ab)_{uv} = 0$. $\square$

Пусть k — поле. По определению, *алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа* — это группа матриц из $GL_n(k)$, выделяемая полиномиальными уравнениями с коэффициентами в $\mathbb{Q}$. Иначе можно сказать, что это $\mathbb{Q}$-*порция*, т. е. пересечение с $Mat_n\,(\mathbb{Q})$ некоторой алгебраической группы, определенной над $\mathbb{Q}$, см. [14]. Мы используем в $\mathbb{Q}^n$ топологию, объявив алгебраические $\mathbb{Q}$-множества — и только их — замкнутыми. Она называется *полиномиальной топологией.*

Лемма 8. *G_Δ есть связная алгебраическая $\mathbb{Q}$-подгруппа в $GL_n\,(\mathbb{Q})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В самом деле, G_Δ есть подгруппа в $GL_n\,(\mathbb{Q})$, определяемая системой линейных уравнений

$$\{X_{uv} = 0 : u \neq v, (u,v) \notin \Delta\}\,. \qquad \square$$

2.1. *Характеризация G_Δ с ациклическим Δ*

Назовем группу $G \leq GL(\mathbb{Z}V)$ *треугольной*, если на V существует такой полный порядок $<$, что для любого $g \in G$ выполняется $g_{ij} = 0$ при $i < j$. В настоящем параграфе мы докажем теорему 4, характеризующую G_Δ, для которой Δ ацикличен. Напомним, что теорема утверждает эквивалентность следующих условий:

1) орграф Δ ацикличен;

2) группа G_Δ треугольная;

3) группа целых точек $G_\Delta\,(\mathbb{Z})$ почти нильпотентна;

4) группа G_Δ почти разрешима.

1) $\Longrightarrow$ 2). Ввиду леммы 3 из п. 1.1 имеется такой флаг $V = V_m > V_{m-1} > \cdots$ $\cdots > V_1$, что $|V_i| = i$, и все дуги, начинающиеся в V_i, заканчиваются в $V_{i-1} (i \geq 2)$. Таким

образом, $V_{i-1} = V_i - \{v_i\}$ для некоторой вершины v_i, и все дуги, начинающиеся в v_i, заканчиваются в V_{i-1}. В частности, если $i > j$, то $v_i, v_j \notin \Delta$, и, значит, $a_{v_i v_j} = 0$ для любого $A = (a_{uv}) \in M_\Delta$. Следовательно, G_Δ треугольная.

2) $\Longrightarrow$ 3). Целочисленные матрицы из G_Δ имеют ± 1 на диагонали, следовательно, $G_\Delta(\mathbb{Z})$ содержит подгруппу конечного индекса, состоящую из унитреугольных матриц, т.е. $G_\Delta(\mathbb{Z})$ почти нильпотентна, [15].

2) $\Longrightarrow$ 4). Это очевидно, так как $G_\Delta(\mathbb{Z})$ есть подгруппа в G_Δ.

(4) $\vee$ 3)) $\Longrightarrow$ 1).

Предположим, что Δ содержит цикл. Из транзитивности следует, что он содержит пару взаимно-обратных дуг, скажем, uv, vu. Группа $F = gp\langle t_{uv}, t_{vu}\rangle$ изоморфна подгруппе $SL_2(\mathbb{Z})$, порожденной матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Известно, что такие матрицы порождают $SL_2(\mathbb{Z})$. Более того, их квадраты, т.е.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

свободно порождают свободную неабелеву группу (А. Пуанкаре, И.Н. Санов), (см. [15. Теорема 14.2.1]). Таким образом, G_Δ не может быть почти разрешимой группой, и $G_\Delta(\mathbb{Z})$ не может быть почти нильпотентной группой.

Теорема 7. *Если конечный транзитивный орграф Δ ацикличен, то унипотентный радикал группы G_Δ есть $U_\Delta = \left(1 + M_\Delta^0\right)^\times$ с алгеброй Ли M_Δ^0, где M_Δ^0 есть подалгебра в M_Δ, состоящая из всех матриц с нулевой главной диагональю. Подгруппа U_Δ порождается 1-параметрическими подгруппами $t_{uv}(\mathbb{Q})$ $(uv \in \Delta)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Напомним, что U_Δ есть максимальная замкнутая, связная, унипотентная нормальная подгруппа в G_Δ. Действительно, в базе, соответствующей сточному флагу, алгебра M_Δ состоит из верхнетреугольных матриц, так что множество ее унипотентных матриц состоит из тех, что имеют единичную главную диагональ. Легко видеть, что M_Δ^0 есть алгебра Ли группы U_Δ. По поводу второго утверждения заметим, что матрицы $e_{uv}, (u, v) \in \Delta$ составляют базу алгебры Ли M_Δ^0, следовательно, их экспоненциалы порождают группу U_Δ. $\square$

2.2. *Характеризация G_Δ с симметрическим Δ*

Теорема 8. *Для любого конечного транзитивного симметрического орграфа Δ имеет место разложение $G_\Delta = \prod GL(\mathbb{Q}V_i)$, где $\Delta = \cup\Delta_i$ есть разложение Δ в дизъюнктное объединение полных графов, и $V_i = V(\Delta_i)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Простейший случай возникает, когда Δ полный, тогда M_Δ есть полная матричная алгебра, и $G_\Delta = GL(\mathbb{Q}V)$. Предположим, что Δ симметрический, и $\Delta = \cup\Delta_i$ есть разложение Δ в дизъюнктное объединение полных орграфов. Тогда $M_\Delta = \oplus M_{\Delta_i}$ и $G_\Delta = \prod GL(\mathbb{Q}V_i)$, где $V_i = V(\Delta_i)$. $\square$

2.3. *Структура G_Δ в общем случае*

Все определяемые ниже понятия относятся к $\mathbb{Q}$-группам, и мы опускаем приставку $\mathbb{Q}$. *Радикал* $R(G)$ алгебраической группы G есть максимальная замкнутая связная разрешимая нормальная подгруппа группы G. Группа G *полупроста*, если $R(G)$ тривиален. *Унипотентный радикал* $U(G)$ группы G есть максимальная замкнутая связная унипотентная нормальная подгруппа в G. Группа G *редуктивна*, если ее радикал $U(G)$ тривиален. В случае, когда G — связная линейная алгебраическая группа, радикал которой унипотентен, Борель и Титс определили *фактор Леви* группы G как связную редуктивную подгруппу L группы G такую, что $G = L \ltimes U$ (полупрямое прозведение в смысле теории алгебраических групп). Это отличается от обычного понимания разложения Леви, но ведет к эквивалентным результатам в случае нулевой характеристики.

Теорема 9. *Пусть $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ есть разложение транзитивного орграфа Δ, данное в п. 1.3. Группа G_{Δ_2} есть редуктивная алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа, и G_Δ есть полупрямое произведение $G_\Delta = G_{\Delta_2} \ltimes U_{\Delta_1}$. Полупрямое разложение определено над $\mathbb{Q}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. *Нормальность* U_{Δ_1}. Так как U_{Δ_1} порождена трансвекциями вида $t_{uv}(a)$ $(a \in \mathbb{Q}, (u,v) \in \Delta)$, то достаточно показать, что сопряжение элементом $g \in G_{\Delta_2}$ любой из этих трансвекций принадлежит U_{Δ_1}. Группа $GL_n(\mathbb{Q})$ порождена диагональными матрицами и подгруппой $SL_n(\mathbb{Q})$. Сопряжение диагональной матрицей оставляет инвариантной каждую 1-параметрическую подгруппу трансвекций $t_{uv}(\mathbb{Q})$. Группа $SL_n(\mathbb{Q})$ порождается трансвекциями. Из этих замечаний следует, что достаточно показать, что $t_{ij}(a)\,t_{kl}(b)\,t_{ij}(-a) \in G_{\Delta_1}$ всякий раз, когда $(k,l) \in \Delta_1$ и $(i,j) \in \Delta_2$. Мы используем формулу сопряжения

$$t_{ij}(a)\,t_{kl}(b)\,t_{ij}(-a) = \begin{cases} t_{kl}(b), & \text{если} \quad i \neq l, j \neq k \\ t_{il}(ab)\,t_{kl}(b), & \text{если} \quad i \neq l, j = k \\ t_{kj}(-ab)\,t_{kl}(b), & \text{если} \quad i = l, j \neq k \end{cases}.$$

Первый случай тривиален. Во втором случае достаточно показать, что $(i,l) \in \Delta_1$, т. е. (i,l) является 1-дугой. Если бы она была 2-дугой, то по транзитивности (k,l) была бы также 2-дугой, — противоречие. Подобные рассуждения применяются и в третьем случае.

Пересечение тривиально. В самом деле, группа $H = G_{\Delta_2} \cap U_{\Delta_1}$ есть нормальная подгруппа в редуктивной группе G_{Δ_2}, которая является прямым произведением конечного числа копий общих линейных групп над $\mathbb{Q}$. Следовательно, H либо содержит некоторую $GL_n(\mathbb{Q}), n \geq 2$, либо является диагональной подгруппой в G_{Δ_2}. Первый случай невозможен, так как H нильпотентна. Во втором случае $H = 1$, так как она унипотентна и диагональна одновременно.

Полупрямое разложение определено над $\mathbb{Q}$. Действительно, G_{Δ_2}-компонента элемента $g \in G_\Delta$ получается занулением g_{ij} таких, что $ij \in \Delta_1$, следовательно, проекция на G_{Δ_2} определена над $\mathbb{Q}$. Отсюда следует, что отображение проекции на G_{Δ_1} также определено над $\mathbb{Q}$. □

3. Арифметичность T_Δ

В настоящем параграфе мы докажем теорему 3 об арифметичности. Напомним, она утверждает, что для всякого транзитивного орграфа Δ группа T_Δ является арифметической подгруппой в $GL_n(\mathbb{Q}), n = |V|$. Мы обозначаем через T_Δ подгруппу в $GL_n(\mathbb{Z})$, порожденную множеством трансвекций $\{t_{ij} = t_{ij}(1) : ij \in \Delta\}$. Теорема 3 будет доказана из следующего результата.

Теорема 10. *Для любого орграфа Δ группа T_Δ имеет конечный индекс в $G_\Delta(\mathbb{Z})$.*

Неформально теорема утверждает, что арифметическая группа $G_\Delta(\mathbb{Z})$ «почти» порождается трансвекциями.

3.1. *Свойство арифметичности*

Основными источниками являются книги [16; 17]. Пусть G — алгебраическая $\mathbb{Q}$-группа в $GL_n(\mathbb{Q})$, и $G(\mathbb{Z}) = G \cap GL_n(\mathbb{Z})$ — группа целых точек. Тогда подгруппа Δ группы G называется *арифметической подгруппой*, если она соизмерима с $G(\mathbb{Z})$, т. е. пересечение $\Delta\cap$ $G(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс как в Δ, так и в $G(\mathbb{Z})$. Подгруппа $A \subseteq G \cap GL_n(\mathbb{Q})$ называется *арифметической подгруппой* группы G, если она соизмерима с $G \cap GL_n(\mathbb{Z})$. Абстрактная группа *арифметична*, если она изоморфна арифметической подгруппе алгебраической $\mathbb{Q}$-группы.

3.2. *Порождение* $G_\Delta(\mathbb{Z})$

В настоящем параграфе Δ обозначает транзитивный орграф на множестве $V = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Пусть Λ — коммутативное кольцо (с единицей). Мы обозначаем через $e_{ij}(1 \leq i, j \leq n)$ $n \times n$-матрицу, имеющую 1 на (i, j)-месте и 0 на других местах. Обозначим через e единичную $n \times n$-матрицу. Для $a \in \Lambda, 1 \leq i \neq j \leq n$, матрица $t_{ij}(a) = e + ae_{ij}$ будет называться *трансвекцией*. Если A — произвольная $n \times n$-матрица, то произведение $t_{ij}(c)A$ получается из A прибавлением j-й строки, умноженной на c, к i-й строке. Аналогично произведение $At_{ij}(c)$ получается из A прибавлением к j-му столбцу i-го столбца, умноженного на c. Трансвекции удовлетворяют соотношениям

1) $t_{ij}(a + b) = t_{ij}(a)\, t_{ij}(b)$,

2) $$\left[t_{ij}(a), t_{kl}(b)\right] = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \neq l, j \neq k \\ t_{il}(ab), & \text{если} \quad i \neq l, j = k \\ t_{kj}(-ab), & \text{если} \quad i = l, j \neq k \end{cases},$$

где $a, b \in \Lambda$, и используется обозначение $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Под Δ-*трансвекцией* (над Λ) мы имеем в виду трансвекцию вида $t_{ij}(a), (i, j) \in \Delta$, $a \in \Lambda$. Из определения группы G_Δ видно, что любая Δ-трансвекция над $\mathbb{Q}$ принадлежит G_Δ. Аналогично всякая Δ-трансвекция над $\mathbb{Z}$ принадлежит $G_\Delta(\mathbb{Z})$. Обозначим через $T_\Delta(\Lambda)$ группу, порожденную всеми Δ-трансвекциями над Λ. Мы пишем просто T_Δ в случае, когда $\Lambda = \mathbb{Z}$. Основной вопрос, который здесь возникает, — когда $G_\Delta(\mathbb{Z})$

порождается всеми Δ-трансвекциями? Этот вопрос для общего кольца Λ весьма сложен и ведет к важным проблемам в алгебраической K-теории (см. работы А. А. Суслина, Н. А. Вавилова и др.) В нашем случае, когда $\Lambda = \mathbb{Z}$, мы получим ответ элементарными средствами.

3.2.1. *Порождение в ациклическом случае*

Для орграфа Δ обозначим через U_Δ унипотентный радикал группы G_Δ.

Лемма 9. *Для любого ациклического транзитивного орграфа Δ группа $U_\Delta(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в $G_\Delta(\mathbb{Z})$, и $U_\Delta(\mathbb{Z})$ порождается Δ-трансвекциями, т. е. $U_\Delta(\mathbb{Z}) = T_\Delta(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Благодаря теореме 4 мы можем считать, что G_Δ есть верхнетреугольная группа. Гомоморфизм из G_Δ на диагональную подгруппу отображает $G_\Delta(\mathbb{Z})$ на конечную 2-группу, следовательно, ядро $U_\Delta(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в $G_\Delta(\mathbb{Z})$. Предположим теперь, что $A \in U_\Delta(\mathbb{Z})$. Если $i < n$ и $a_{in} \neq 0$, то $(i, n) \in \Delta$, поэтому $t_{in} \in T_\Delta(\mathbb{Z})$. Следовательно, умножение $t_{in}(-a_{in})A$ прибавляет n-ю строку, умноженную на $-a_{in}$, к i-й строке матрицы A, что приводит к аннулированию in-коэффициента. Прибавляя кратные последней строки к другим строкам, мы можем занулить все коэффициенты последнего столбца, кроме $a_{nn} = 1$. Затем, прибавляя кратные $(n-1)$-й строки к другим строкам, мы можем занулить все коэффициенты $(n-1)$-го столбца, кроме $a_{n-1,n-1}$. Снова это можно проделать, используя только Δ-трансвекции. Продолжая по индукции, мы можем строчными преобразованиями привести A к единичному виду, что означает представимость A в виде произведения Δ-трансвекций. □

3.2.2. *Порождение в симметрическом случае*

Лемма 10. *Для любого симметрического транзитивного орграфа Δ группа $T_\Delta(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в $G_\Delta(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из разложения $G_\Delta = \prod GL_{n_i}(\mathbb{Q})$, даваемого теоремой 5, следует, что $G_\Delta(\mathbb{Z}) = \prod GL_{n_i}(\mathbb{Z})$. Для любого натурального n группа $SL_n(\mathbb{Z})$ имеет индекс ≤ 2 в $GL_n(\mathbb{Z})$. Хорошо известен факт, что группа $SL_n(\mathbb{Z})$ порождается трансвекциями [15], и результат следует из этих замечаний. □

3.2.3. *Порождение в общем случае*

Предложение 1. *Пусть $G = H \ltimes N$ — полупрямое произведение алгебраических групп, определенное над $\mathbb{Q}$. Тогда подгруппа $H(\mathbb{Z})\, N(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в $G(\mathbb{Z})$, следовательно, арифметична в G. Если $G_1 \trianglelefteq H(\mathbb{Z})$, $G_2 \trianglelefteq N(\mathbb{Z})$ — нормальные подгруппы конечного индекса, и G_2 нормальна в G, то $G_1 G_2$ имеет конечный индекс в $G(\mathbb{Z})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение есть следствие 2 в п. 4.1 книги [16]. Второе утверждение легко следует из первого. □

3.3. *Доказательства теорем 10 и 3*

Так как $G_\Delta = G_{\Delta_2} \ltimes U_{\Delta_1}$, то, по предложению 1, $G_{\Delta_2}(\mathbb{Z}) \ltimes U_{\Delta_1}(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в арифметической группе $G_\Delta(\mathbb{Z})$, следовательно, сама арифметична. Снова по предложению 1, $T_{\Delta_2}(\mathbb{Z}) \ltimes T_{\Delta_1}(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс $G_\Delta(\mathbb{Z})$, и, следовательно, $T_\Delta(\mathbb{Z})$ имеет конечный индекс в $G_\Delta(\mathbb{Z})$.

4. Порождающие группы автоморфизмов граф-группы

Граф-группа G_Γ определяется конечным симплициальным графом Γ. Если V есть множество вершин Γ, то группа G_Γ определяется генетическим кодом

$$G_\Gamma = \langle V \mid vw = wv, \text{ если } v \text{ и } w \text{ соединены ребром в } \Gamma \rangle.$$

Множество порождающих для $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ были найдены М. Лоуренсом [9], продолжившим работу Г. Серватиуса [8]. Имеются четыре типа порождающих.

Граф-автоморфизмы. Если $\phi \in \mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ переставляет вершины графа Γ, то ϕ называется *граф-автоморфизмом.*

Инверсии. Если $\phi \in \mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ обращает вершину и фиксирует остальные, то ϕ есть *инверсия.*

Базисные сопряжения. Напомним, что каждый элемент $g \in G_\Gamma$ дает автоморфизм сопряжения $\hat{g}$ группы G_Γ, который переводит x в $g^{-1}xg$ и, следовательно, фиксирует каждый класс сопряженности в G_Γ (как множество!). Сопряжения образуют подгруппу *внутренних автоморфизмов* $\mathrm{Inn}(G_\Gamma)$ в $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$. Более общо, автоморфизм G_Γ называется *базисным сопряжением*, если он отображает каждую вершину Γ в ее сопряженную (эквивалентно фиксирует класс сопряженности каждой вершины как множество). Все базисные сопряжения составляют подгруппу базисных сопряжений $\mathrm{BC}(G_\Gamma)$ в $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$. Порождающие $\mathrm{BC}(G_\Gamma)$ были описаны М. Лоуренсом в [9] следующим образом. Для $v \in \Gamma$ пусть C есть связная компонента $\Gamma - st(v)$. *Элементарное базисное сопряжение* $\hat{v}_C$ получается сопряжением всех вершин C посредством v и фиксацией оставшихся вершин. Теорема 2.2 в [9] утверждает, что $\mathrm{BC}(G_\Gamma)$ порождается элементарными базисными сопряжениями. Для фиксированной v базисные сопряжения $\hat{v}_C$, ассоциированные с различными связными компонентами, перестановочны. Произведение $\prod_C \hat{v}_C$ по всем связным компонентам $\Gamma - st(v)$ есть сопряжение посредством v. Таким образом, группа $\mathrm{BC}(G_\Gamma)$ содержит $\mathrm{Inn}(G_\Gamma)$.

Трансвекции. *Трансвекция* возникает для каждой пары различных вершин u, v таких, что $\mathrm{lk}(u) \subseteq \mathrm{st}(v)$ (заметим, что $\mathrm{lk}(u)$ может быть пустым). В этом случае существует автоморфизм группы G_Γ(*трансвекция*) τ_{uv}, посылающий $u \to uv$ и фиксирующий остальные порождающие. Действительно, чтобы быть автоморфизмом, τ_{uv} должен сохранять перестановочность любых двух перестановочных порождающих x, y. Перестановочность x, y эквивалентна включению $y \in \mathrm{lk}(x)$. Если оба x, y отличны от u, то τ_{uv} фиксирует как x, так и y, и утверждение очевидно. Если, скажем, $x = u$, то $y \in \mathrm{lk}\,(u) \subseteq \mathrm{st}\,(v)$. Следовательно, $[y, v] = 1$, и $\tau_{uv}x = uv$ перестановочен с $\tau_{uv}y = y$, как и требовалось.

5. Гомоморфизм абелеанизации $\mathbf{Aut}(G_\Gamma) \to GL(G_\Gamma^{ab})$

Пусть Γ — граф с конечным множеством вершин V. Обозначим через $\mathbb{Z}V$ свободную абелеву группу с базой V, записанную аддитивно. Ядро естественного эпиморфизма $G_\Gamma \to \mathbb{Z}V$ совпадает с коммутантом $[G_\Gamma, G_\Gamma]$ группы G_Γ. Значит, мы можем (канонически) отождествить абелеанизацию $G_\Gamma^{ab} = G_\Gamma/[G_\Gamma, G_\Gamma]$ с $\mathbb{Z}V$. Действие $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ на абелеанизации индуцирует гомоморфизм $\mathrm{Aut}(G_\Gamma) \to GL\,(\mathbb{Z}V)$. Очевидно, базисные сопряжения индуцируют тождественный автоморфизм на $\mathbb{Z}V$. Остающиеся три типа автоморфизмов G_Γ индуцируют автоморфизмы $\mathbb{Z}V$, которые мы будем называть теми же именами. Более точно, имеются следующие автоморфизмы $\mathbb{Z}V$.

Графические автоморфизмы. Каждый графический автоморфизм ϕ группы Γ индуцирует подстановку $\bar\phi \in GL\,(\mathbb{Z}V)$, которая переставляет базу V группы $\mathbb{Z}V$.

Инверсии. Если $\phi \in GL\,(\mathbb{Z}V)$ обращает базисный вектор v и фиксирует все остальные, то мы называем $\bar\phi$ *инверсией.*

Трансвекции. С каждой трансвекцией $\tau_{vw} \in \mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ ассоциируется автоморфизм $t_{vw} \in GL(\mathbb{Z}V)$, посылающий w в $w + v$ и фиксирующий остальные базисные векторы.

Лемма 11. *Образ* $\alpha : \mathrm{Aut}(G_\Gamma) \to GL\,(\mathbb{Z}V)$ *порождается граф-автоморфизмами, инверсиями и трансвекциями.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый тип порождающих $\mathrm{Aut}(G_\Gamma)$ отображается на матрицу в $GL\,(\mathbb{Z}V)$ соответствующего типа. Базисные сопряжения индуцируют тождественный автоморфизм на $\mathbb{Z}V$, следовательно, базисные сопряжения исчезают при абелеанизации.

6. Арифметичность группы $\alpha(\mathbf{Aut}(G_\Gamma))$

Пусть Γ — симплициальный граф с конечным множеством вершин V. Напомним (см. п. 1.4), что *орграф зацеплений* Δ графа Γ есть орграф (= упорядоченный граф) на V такой, что $(u, v) \in V \times V$ есть дуга (= упорядоченное ребро) в Δ, если $u \neq v$ и $\mathrm{lk}\,(u) \subseteq \mathrm{st}\,(v)$ в Γ.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО (теорема 2). Докажем, что для любого графа Γ группа $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$ содержит T_Δ в качестве подгруппы конечного индекса. (Здесь Δ — орграф зацеплений графа Γ). Мы знаем, что $\alpha\,(\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma))$ порождена граф-автоморфизмами, инверсиями и трансвекциями t_{uv} для $uv \in \Delta$. Обозначим через S_Δ подгруппу, порожденную граф-автоморфизмами и инверсиями. Легко видеть, что S_Δ конечна. Покажем, что S_Δ нормализует T_Δ. Пусть π — подстановка базиса V, тогда мы имеем

$\pi t_{uv}\pi^{-1} = t_{\pi(uv)}$, где $\pi(uv)$ обозначает пару $(\pi(u), \pi(v))$ для краткости. Если π — граф-автоморфизм, то $\pi(uv) \in \Delta$, следовательно, π оставляет T_Δ инвариантной. Наконец, сопряжение инверсией либо фиксирует трансвекцию, либо обращает ее. Мы доказали, что $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma)) = S_\Delta T_\Delta$, причем S_Δ конечна и нормализует T_Δ.

Арифметичность $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$. По теореме 3, группа T_Δ арифметична и, по предыдущему параграфу, имеет конечный индекс в $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$. Следовательно, $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$ также арифметична.

7. Ступень нильпотентности группы T_Δ

Теорема 11. *Следующие условия для группы T_Δ эквивалентны:*

1) T_Δ *почти абелева;*

2) T_Δ *абелева;*

3) T_Δ *свободная абелева ранга $|E\Delta|$;*

4) Δ *не содержит путей длиной 2.*

Группа $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$ *почти абелева в том и только том случае, когда граф зацеплений* Δ *графа* Γ *не содержит путей длиной* 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы будем систематически использовать соотношения коммутации, см. п. 3.2.

1) $\Longrightarrow$ 2). Для любых $ij, kl \in \Delta$ некоторые степени t_{ij}^N, t_{kl}^N перестановочны, значит, t_{ij}, t_{kl} также перестановочны, поэтому T_Δ абелева. Если $e_1, \ldots, e_m$ — дуги Δ, то любое слово $t_{e_1}^{k_1} \cdots t_{e_m}^{k_m}$ есть матрица с коэффициентами $k_1, \ldots, k_m$ на местах $e_1, \ldots, e_m$ соответственно, значит, $T_\Delta \simeq \mathbb{Z}^m$.

3) $\Longrightarrow$ 4). Предположим, имеется путь $(i,j)(j,k)$ длиной 2. Если $k \neq i$, то $[t_{ij}, t_{jk}] = t_{ik} \neq 1$, следовательно, T_Δ неабелева. Если $k = i$, то подгруппа, порожденная t_{ij}, t_{jk}, изоморфна подгруппе $SL_2(\mathbb{Z})$, порожденной матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

поэтому также не является абелевой.

4) $\Longrightarrow$ 2). Если $(i,j)(k,l) \in \Delta$, то $k \neq j$ и $l \neq i$, тогда t_{ij}, t_{jk} перестановочны. Утверждение об $\alpha(\mathrm{Aut}(G_\Gamma))$ немедленно следует из аналогичного утверждения для T_Δ, так как они соизмеримы. $\square$

Теорема 12. *Для всякого ациклического графа Δ группа T_Δ нильпотентна, и ее ступень нильпотентности равна $d(\Delta) = l(\Delta) - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для флага $\Delta = \Delta_k > \Delta_{k-1} > \cdots > \Delta_1$ кратчайшей длины $k = l(\Delta)$ мы построим флаг подпространств $\mathbb{Q}\Delta = \mathbb{Q}\Delta_k > \mathbb{Q}\Delta_{k-1} > \cdots > \mathbb{Q}\Delta_1 > \mathbb{Q}\Delta_0 = \{0\}$. Мы утверждаем, что T_Δ действует тождественно на факторах этого флага. В самом деле, t_{ij} отображает e_i в $e_i + e_j$ и фиксирует остальные базисные векторы. Включение $ij \in \Delta$ влечет, что если $e_i \in V_l$, то $e_j \in V_{l-1}$, так что t_{ij} действует в факторе Δ_l/Δ_{l-1}. Отсюда следует теперь, что T_Δ имеет степень нильпотентности $\leq k-1$ (см. лемму 16.3.1

в [15]). Для доказательства обратного неравенства заметим, что если $v_1 v_2 \cdots v_k$ есть длиннейший путь в Δ, тогда

$$\left[\left[\left[t_{v_1 v_2}, t_{v_2 v_3}\right], t_{v_3 v_4}\right], \cdots, t_{v_{k-1} v_k}\right] = t_{v_1 v_k} \neq 1,$$

следовательно, ступень нильпотентности группы T_Δ не меньше $k-1$. □

Возникает естественный вопрос: для каждого ли натурального k существует граф Γ, для которого T_Δ имеет ступень нильпотентности k? Рис. 3 представляет пример графа Γ с орграфом зацеплений Δ диаметром 2, значит, T_Δ в этом примере имеет ступень нильпотентности 2.

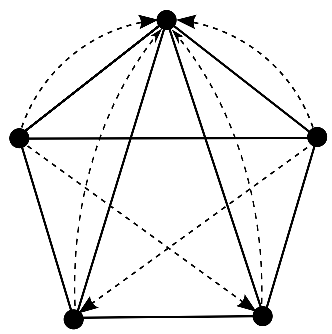

Рис. 3. Граф Γ с орграфом зацеплений Δ диаметром 2

8. Свойство Каждана (T) и свойство Серра (FA)

Группа G обладает *свойством Каждана (T)*, если всякое ее действие аффинными изометриями на гильбертовом пространстве имеет неподвижную точку. Д. Каждан доказал, что $GL_n(\mathbb{Z})$ обладает свойством (T) при $n \geq 3$. До сих пор неизвестно, обладает ли $\mathrm{Aut}(F_n)$ свойством (T) при $n \geq 4$. Если окажется, что $\mathrm{Aut}(F_n)$ имеет свойство (T), то рассуждения А. Любоцкого и И. Пака дают концептуальное объяснение априорно беспричинной эффективности некоторых алгоритмов в компьютер-сайенс, например алгоритма замены произведений Лидхем–Грина. По определению группа G обладает *свойством Серра (FA)*, если всякое ее симплициальное действие без инверсий (т. е. без обращения ребер) на симплициальном дереве T имеет неподвижную точку. Если условие неподвижной точки выполнено для всех изометрических действий группы G на $\mathbb{R}$-деревьях, то будем говорить, что для G выполняется *свойство Серра* $(FA)_\mathbb{R}$. Всякая (T)-группа обладает свойством $(FA)_\mathbb{R}$ (а значит, и (FA)), см., например, [19].

Группа $GL_n(\mathbb{Z})$ $(n \geq 3)$ имеет свойство $(FA)_\mathbb{R}$, равно как и группы $\mathrm{Aut}(F_n)$ и $Out(F_n)$ [18]. С другой стороны, Дж. Маккул показал, что $\mathrm{Aut}(F_3)$ обладает подгруппой конечного индекса с положительным первым числом Бетти, т. е. подгруппой конечного индекса, допускающей эпиморфизм на $\mathbb{Z}$ [20]. В частности, эта подгруппа действует сдвигами на прямой и поэтому не имеет свойства (FA). Отсюда вытекает (так как свойство (T) переносится на подгруппы конечного индекса), что $\mathrm{Aut}(F_3)$ не обладает свойством (T). Неизвество, имеет ли $\mathrm{Aut}(F_n)$ при $n > 3$ подгруппу конечного индекса с положительным первым числом Бетти. Также при $n > 3$ неизвестно, является ли

$\mathrm{Aut}(F_n)$ (T)-группой. Мы даем отрицательный ответ на эти вопросы в классе граф-групп.

Теорема 13. *Существует граф Γ на шести вершинах такой, что группа $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ имеет положительное первое число Бетти, т. е. имеет подгруппу конечного индекса, допускающую эпиморфизм на $\mathbb{Z}$. Следовательно, G_Γ не обладает свойством (T).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим граф Γ (рис. 4).

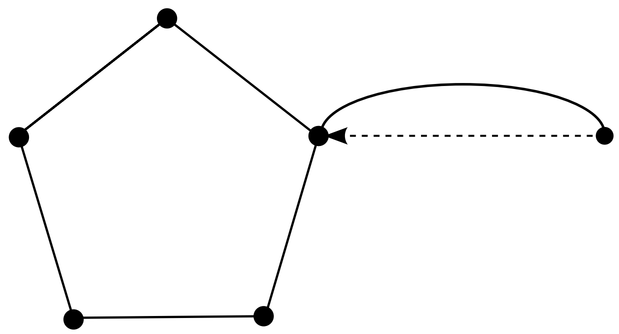

Рис. 4. Граф Γ имеет сплошные ребра, а Δ — штриховые. Диаметр Δ равен 1

Орграф зацеплений Δ ациклический и имеет диаметр 1. Следовательно, по теореме 11, T_Δ — свободная абелева группа ранга 1. Значит, $\alpha\,(\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma))$ есть конечное расширение $\mathbb{Z}$. Таким образом, $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ не удовлетворяет (FA), значит, не удовлетворяет и (T). $\square$

9. Сравнение с работой [10]

Связь работы [10] с нашей до сих пор не ясна. Заметим, что если Γ — пустой граф, то $\mathrm{st}\,(U) = U$ для любого 1-элементного множества, и, значит, 1-элементное множество замкнуто в смысле [10]. Следовательно, группа S_Γ [10] состоит из инверсий и потому конечна. В то же время $G_\Gamma = F_n$ есть свободная группа, и поэтому, по теореме Нильсена, образ $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ совпадает со всей группой $GL_n\,(\mathbb{Z})$. Это показывает, что арифметические группы в нашей работе и в работе [10] могут быть существенно различными. Тем не менее есть основания ожидать, что группа S_Γ отображается инъективно при абелеанизации. Другой интересный вопрос — когда абелеанизация $\mathrm{Aut}(G_\Gamma) \to GL\left(G_\Gamma^{ab}\right)$ расщепляется? Известно, что это не так в случае свободной группы G_Γ (см., например, [21]).

10. Вопросы и проблемы

Здесь собраны некоторые вопросы и проблемы о граф-группах. Многие из них навеяны работой [22].

1. Обозначим через $I\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ группу автоморфизмов группы G_Γ, тождественных по модулю коммутанта. Проблема: установить свойства конечности для группы $I\,\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$, в частности определить, будет ли группа $I\,\mathrm{Aut}\,(F_n)$ конечно определенной при $n > 3$.

2. Верно ли, что $I\,\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ не имеет кручения? Верно ли, что $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ почти без кручения? Ответ на второй вопрос положителен для 2-мерных групп (Р. Чарни – К. Вогтман).
3. Группы $\mathrm{Aut}(F_n), Out\,(F_n)$ и $GL_n(\mathbb{Z})$ конечно порождены. Для $SL_n(\mathbb{Z})$ определены соотношения Стейнберга, включающие коммутаторы элементарных матриц. Для группы специальных автоморфизмов $S\,\mathrm{Aut}(F_n)$ С. Герстен представил генетический код в терминах соответствующих коммутаторных соотношений нильсеновских порождающих. Существует также код $\mathrm{Aut}(F_n)$, происходящий из действия $\mathrm{Aut}(F_n)$ на подкомплексе *Auterspace*, порожденном графами степени не более 2. Проблема: выписать код группы $I\,\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$.
4. Известно, что группа $\mathrm{Aut}\,(F_n)$ линейна при $n \leq 2$ и нелинейна при $n \geq 3$ (Э. Форманек – К. Прочези). Проблема: описать линейные $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$.
5. Связанный с предыдущим вопрос: в каких случаях $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ содержит «ядовитую» подгруппу в смысле Форманека – Прочези?
6. Известно, что G_Γ линейна (Л. Ванвик). Когда она арифметична?
7. Верно ли, что $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ почти аппроксимируется конечно порожденными нильпотентными группами без кручения?
8. Дать оценки для порядков конечных подгрупп группы $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$. При $n > 2$ максимальный порядок конечной подгруппы $\mathrm{Aut}\,(F_n)$ равен $2^n n!$. При $n > 3$ существует единственная, с точностью до сопряжения, подгруппа максимального порядка, порожденная подстановками и инверсиями системы свободных порождающих. Известно, что для достаточно больших значений n максимальное значение порядков конечных подгрупп есть снова $2^n n!$ и что максимальные подгруппы порождены подстановками и инверсиями стандартных порождающих группы $\mathbb{Z}^n$.
9. Обладает ли $\mathrm{Aut}\,(F_n)$ свойством (T) при $n > 3$? Когда $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ обладает свойством (T)?
10. Свойство (T) влечет свойство Серра $(FA)_\mathbb{R}$: каждое изометрическое действие группы на $\mathbb{R}$-дереве имеет неподвижную точку. (Заметим, что $(FA)_\mathbb{R}$ влечет обычное свойство (FA): каждое действие на симплициальном дереве без инверсий имеет неподвижную точку). При $n \geq 3$ группа $GL_n(\mathbb{Z})$ имеет свойство (FA), равно как и $\mathrm{Aut}(F_n)$, и $Out(F_n)$. Мы не знаем ответа на следующий вопрос Серра: обладают ли подгруппы конечного индекса $SL_n\left(\mathbb{Z}\left[\frac{1}{N}\right]\right), n \geq 3, N \geq 1$, и в $SL_2\left(\mathbb{Z}\left[\sqrt{d}\right]\right)$($d > 0$ целое и не квадрат) свойством (FA)? Также мы не знаем, эквивалентны ли свойства (FA) и $(FA)_\mathbb{R}$.
11. Имеет ли $\mathrm{Aut}(F_n)(n > 3)$ виртуально положительное первое число Бетти? Обладает ли $\mathrm{Aut}(F_n)(n > 3)$ свойством (T)?
12. Влечет ли виртуальный эпиморфизм $\mathrm{Aut}(F_n)$ на $GL_m(\mathbb{Z})$ неравенство $m \geq n-1$? Если $m < n-1$, и $H \subset \mathrm{Aut}(F_n)$ есть подгруппа конечного индекса, то верно ли, что всякий гомоморфизм $H \to GL_m(\mathbb{Z})$ имеет конечный образ? Если $m < n-1$, и $H \subset \mathrm{Aut}(F_n)$ есть подгруппа конечного индекса, то всякий ли гомоморфизм $H \to \mathrm{Aut}(F_m)$ имеет конечный образ?
13. Классифицировать те $\phi \in \mathrm{Aut}(F_n)$, для которых $F_n \rtimes \mathbb{Z}$ автоматна, и те, для которых

она обладает свойством CAT(0).

14. Проблема изоморфизма для групп вида $F_n \rtimes \mathbb{Z}$.
15. Проблема сопряженности в $Out(F_n)$.
16. Вычислить размерности стабилизации рациональных гомологий $\mathrm{Aut}(F_n)$. То же для $Out(F_n)$.
17. Каковы функции Дэна для $\mathrm{Aut}(F_n)$ и $Out(F_n)$ при $n > 3$? Каковы высшие изопериметрические функции $GL_n(Z), \mathrm{Aut}(F_n)$ и $Out(F_n)$?
18. Автоматна ли $\mathrm{Aut}(F_n)$ при $n > 3$? Группа $GL_n(\mathbb{Z})(n > 2)$ не автоматна, даже не причесываема. Когда группа $AutG_\Gamma$ причесываема? Привести пример G_Γ, не содержащей $GL_n(\mathbb{Z})(n > 2)$ и не причесываемой.
19. Проблема вхождения для $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$-орбит в G_Γ (В. Н. Ремесленников и Э. Данкен).
20. Являются ли граф-группы финитно аппроксимируемыми относительно сопряженности? Равносильно, замкнуты ли классы сопряженности в граф-группах относительно проконечной топологии?
21. Верно ли, что если $G_{\Gamma'}$ и G_Γ соизмеримы, то они изоморфны?
22. Верно ли, что граф-группа однозначно определена с точностью до изоморфизма конечными гомоморфными образами в классе конечно порожденных финитно аппроксимируемых групп? Ответ до сих пор неизвестен даже для свободных групп.
23. Верно ли, что если отображение абелеанизации для $\mathrm{Aut}\,(G_\Gamma)$ имеет конечный образ, то группа $Out\,(G_\Gamma)$ конечна?

Список литературы

1. *Bestvina M., Brady N.* Morse Theory and FinitenessProperties for Groups // Invent. Math. 1997. Vol. 129. P. 445–470.

2. *Croke C., Kleiner B.* Spaces with Nonpositive Curvature and Their Ideal Boundaries // Topology. 2000. Vol. 39. P. 549–556.

3. *Abrams A.* Configuration Spaces of Colored Graphs. Dedicated to John Stallings on the Occasion of His 65$^{\text{th}}$ Birthday // Geom. Dedicata. 2002. Vol. 92. P. 185–194.

4. *Ghrist R., Peterson V.* The Geometry and Topology of Reconfiguration // Adv. in Applied Mathematics. 2007. Vol. 38. P. 302–323.

5. *Diekert V.* Partial Commutation and Traces. Handbook of Formal Languages. Heidelberg: Springer, 1997. Vol. 3: Beyond Words. P. 457–533.

6. *Charney R.* An Introduction to Right-Angled Artin Groups // Geometriae Dedicata. 2007. Vol. 125. P. 141–158.

7. *Van der Lek H.* The Homotopy Type of Complex Hyperplane Complements. Nijmegen, 1993.

8. *Servatius H.* Automorphisms of Graph Groups // J. Algebra. 1989. Vol. 126. P. 34–60.

9. *Laurence M. R.* A Generating Set for the Automorphism Group of a Graph Group // J. London Math. Soc. 1995. Vol. 52. No. 2. P. 318–334.

10. *Duncan A. J., Kazachkov I. V., Remeslennikov V. N.* Automorphisms of Partially Commutative Groups I: Linear Subgroups // Groups, Geometry, and Dynamics. 2010. Vol. 4. P. 739–757.

11. *Charney R., Vogtmann K.* Automorphisms of Higher-Dimensional Right-Angled Artin Group. Preprint, arXiv:0709.2700v2 [math.GR], 3 Jul 2008.

12. *Grunewald F., Lubotzky A.* Linear Representations of the Automorphism Group of a Free Group // Geometric and Functional Analysis. 2009. Vol. 18. P. 1564–1608.

13. *Трейер А. В.* Группы автоморфизмов частично коммутативных 2-ступенно нильпотентных групп: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Омск, 2008.

14. *Мерзляков Ю. И.* Рациональные группы. М.: Наука, 1987.

15. *Каргополов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. 3-е изд. М.: Наука, 1982.

16. *Platonov V., Rapinchuk A.* Algebraic Groups and Number Theory. Boston: Academic Press, 1994.

17. *Humphreys J. E.* Arithmetic Groups // Lecture Notes in Math. Springer-Verlag, 1980. Vol. 789.

18. *Culler M., Vogtmann K.* A Group-Theoretic Criterion for Property FA // Proc. Amer. Math. Soc. 1996. Vol. 124. P. 677–683.

19. *Носков Г. А.* Свойства $\mathcal{T}$, $\mathcal{FA}$, аменабельность и разрывность для групп, действующих на $\mathbb{R}$-деревьях // Алгебра и анализ. 1993. Т. 5. С. 238–251.

20. *McCool J.* A Faithful Polynomial Representation of $Out(F_3)$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1989. Vol. 106. P. 207–213.

21. *Lyndon R. C., Schupp P. E.* Combinatorial Group Theory. Berlin; Heidelberg; N.Y.: Springer Ergebinsberichte 89, 1977.

22. *Bridson M. R., Vogtmann K.* Automorphism Groups of Free Groups, Surface Groups and Free Abelian Groups // Problems on Mapping Class Groups: Proc. of Symposia in Pure Mathematics 74 / Ed. by B. Farb. Providence, RI, 2006. P. 301–316.

Материал поступил в редколлегию 26.12.2009

Адрес автора

НОСКОВ Геннадий Андреевич

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН

ул. Певцова 13, Омск, 644109, Россия

e-mail: g.noskov@googlemail.com