

А. А. АКИМОВА, С. В. МАТВЕЕВ

## КЛАССИФИКАЦИЯ УЗЛОВ МАЛОЙ СЛОЖНОСТИ В УТОЛЩЕННОМ ТОРЕ\*

В статье построена таблица узлов в утолщенном торе  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых имеют  $\leq 4$  перекрестков. Узлы строятся с помощью трехступенчатого перебора (сначала — регулярных графов степени 4, потом — отвечающих им проекций, затем — диаграмм). Ряд известных и новых приемов позволил удержать этот перебор в разумных пределах и предложить строгое теоретическое доказательство полноты таблицы. Различность полученных узлов доказывалась с помощью полезного инварианта узлов в утолщенном торе — аналога полинома Кауффмана.

*Ключевые слова:* узел, утолщенный тор, таблица узлов.

### Введение

В последнее время усилился интерес к узлам в многообразиях типа  $F \times I$ , где  $F$  — замкнутая ориентируемая поверхность. Это можно объяснить тем, что на них обобщаются многие инварианты узлов в  $S^3$ , а теории узлов в  $S^3$  и в утолщенной сфере  $S^2 \times I$  совпадают. Поскольку тор  $T = S^1 \times S^1$  — самая простая замкнутая ориентируемая поверхность после сферы, то теория узлов в  $T \times I$  является естественным продолжением теории узлов в  $S^3$ . Узлы в  $T \times I$  можно задавать диаграммами, аналогичными сферическим диаграммам классических узлов. При этом роль преобразований Райдемайстера сохраняется: они реализуют изотопии узлов. Первые таблицы узлов составил П. Тайт в 1876 г. [1]. Затем они постоянно расширялись [2; 3]. В настоящее время табулированы все узлы в  $S^3$ , минимальные диаграммы которых имеют не более 16 перекрестков [4]. Из немногих работ по табулированию узлов в других многообразиях упомянем работы [5; 6] по узлам в проективном пространстве и работы [7; 8] по классификации тэнглов.

Настоящая статья посвящена составлению таблицы узлов в утолщенном торе  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых имеют не более четырех перекрестков. Узлы строятся с помощью трехступенчатого перебора (сначала — регулярных графов степени 4, потом — отвечающих им проекций, затем — диаграмм). Ряд известных и новых приемов позволил удержать этот перебор в разумных пределах и предложить строгое теоретическое доказательство полноты таблицы. Различность полученных узлов доказывалась с помощью полезного инварианта узлов в утолщенном торе — аналога полинома Кауффмана [9], см. также [8].

---

\* Исследования поддержаны грантом РФФИ 12-01-00748, грантом НШ-1414.2012.1 по государственной поддержке ведущих научных школ, а также целевой программой УрО и СО РАН (совместный проект 12-С-1-1018/1).

## 1. Основной результат

**Определение 1.** Узлом в  $T \times I$ , где  $T = S^1 \times S^1$  — двумерный тор, и  $I$  — отрезок, называется произвольная простая замкнутая кривая  $K \subset T \times I$ . Два узла  $K, K' \subset T \times I$  эквивалентны, если пара  $(T \times I, K)$  гомеоморфна паре  $(T \times I, K')$ .

Как и в классическом случае, узлы в  $T \times I$  можно задавать проекциями и диаграммами. Проекция узла  $K \subset T \times I$  представляет собой регулярный граф  $G \subset T$  степени 4, для которого прохождение вершин по правилу «прямо вперед» определяет полный обход, отвечающий узлу. Диаграмма узла  $K$  получается из этого графа указанием (путем разрывов обхода), какой из проходящих через каждую вершину участков узла расположен выше, какой — ниже другого в смысле величины координаты  $t \in I$ . Две проекции считаются эквивалентными, если одна получается из другой гомеоморфизмом тора на себя. Эквивалентность диаграмм имеет тот же смысл, но дополнительно разрешается одновременно изменять типы всех перекрестков (проходы на переходы и наоборот). Здесь уместно уточнить, что данный граф  $G \subset T$  может служить проекцией нескольких узлов, и данный узел может иметь много проекций.

**Определение 2.** Диаграмма узла  $K$  называется минимальной, если ее сложность (число перекрестков) не превосходит сложности любой диаграммы любого узла, эквивалентного узлу  $K$ . Проекция  $G \subset T$  называется минимальной, если минимальна хотя бы одна из отвечающих ей диаграмм.

Будем называть узел  $K \subset T \times I$  локальным, если он содержится в некотором шаре  $V \subset T \times I$ , и составным, если существует такой шар  $V \subset T \times I$ , что пересечения  $K \cap V$  и  $K \cap V'$ , где  $V' = (T \times I) \setminus \text{Int } V$ , являются нетривиальными дугами (т. е. дугами, не параллельными краю шара  $V$ ). Такие узлы мы не будем включать в таблицу, поскольку локальные узлы отвечают узлам в сфере, а составные получаются добавлением локальных узлов к уже табулированным узлам. Поэтому наша таблица будет состоять только из примарных узлов, т. е. из узлов, отличных от локальных и составных.

Здесь уместно отметить, что классификация узлов в  $S^3$  с точностью до гомеоморфизма мало отличается от классификации с точностью до изотопии. Если не различать узел и его зеркальный образ, то обе классификации совпадают. Для узлов в утолщенном торе это не так. Например, все нетривиальные вложенные кривые на торе задают узлы, которые эквивалентны с точностью до гомеоморфизма, хотя среди них имеется бесконечное множество неизотопных. Следующая теорема является основным результатом статьи.

**Теорема 1.** *Существует ровно 64 различных примарных узла в  $T \times I$ , минимальные диаграммы которых имеют не более четырех перекрестков. Эти диаграммы изображены в таблице на рис. 1.*

Доказательство теоремы 1 состоит из четырех частей. Сначала мы перебираем все абстрактные регулярные графы с  $\leq 4$  вершинами, потом — все минимальные проекции с  $\leq 4$  перекрестками, затем — отвечающие им минимальные диаграммы. При этом замеченные дубликаты отбрасываются. На последнем этапе мы доказываем, что отвеча-

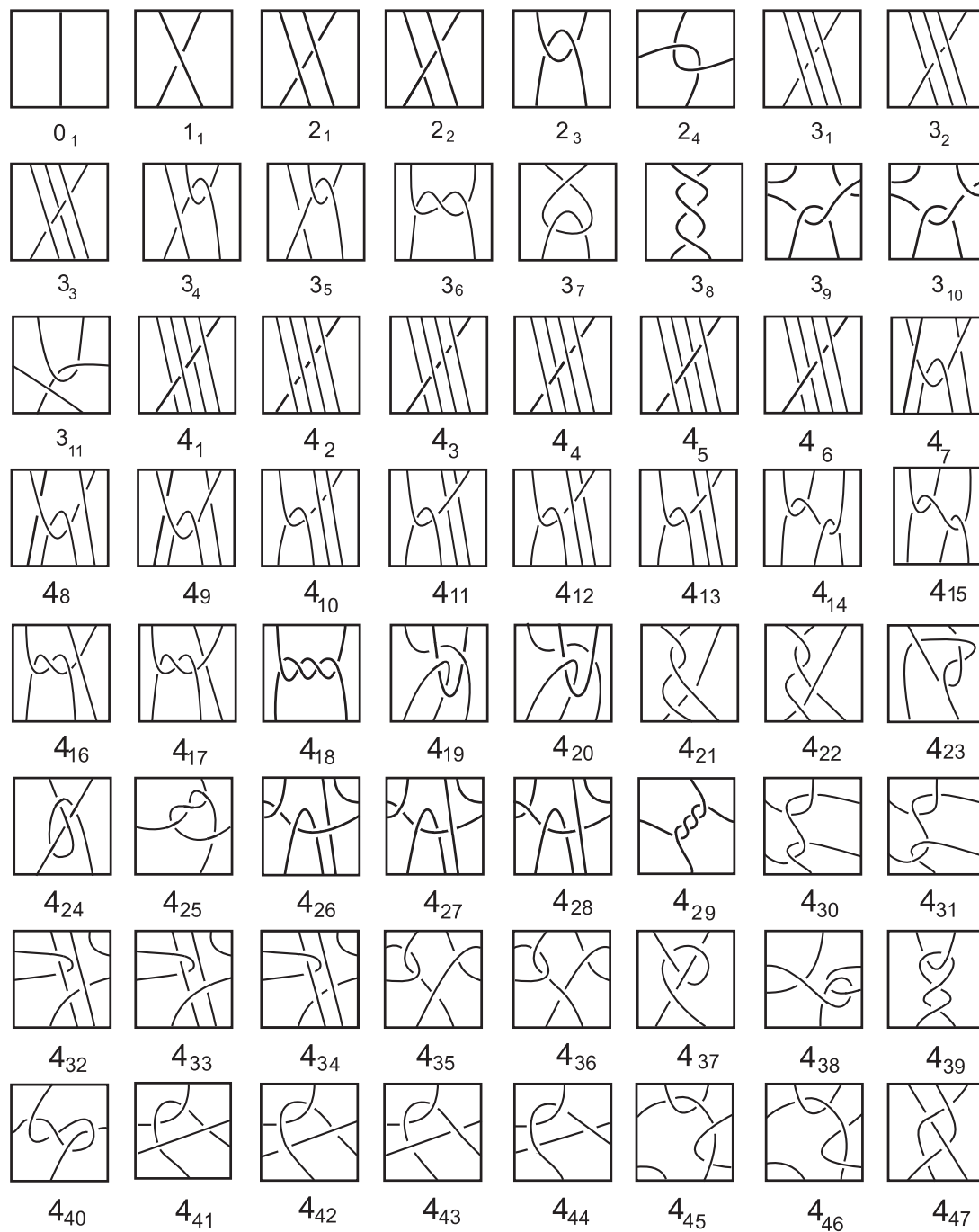


Рис. 1. Минимальные диаграммы примарных узлов в  $T \times I$ , имеющие не более четырех перекрестков

ющие этим диаграммам узлы в  $T \times I$  различны. Для этого мы используем обобщенные полиномы Кауффмана.

## 2. Перечисление графов и проекций

**Лемма 1.** *Любой регулярный граф  $G$  с  $n \leq 4$  вершинами имеет либо петлю, либо кратное ребро.*

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассуждая от противного, допустим, что петель и кратных ребер нет. Тогда число ребер  $N$  графа  $G$  не превосходит числа  $C_n^2 = n(n-1)/2$ . С другой стороны, так как граф регулярен, то  $N = 2n$ . Это противоречит условию  $n \leq 4$ .  $\square$

Отметим, что минимальная проекция не может иметь тривиальной (т. е. ограничивающей диск) петли. Если бы такая петля была, то ее можно было бы убрать с помощью применения к соответствующей диаграмме первого преобразования Райдемайстера (разворачивания петли). Отметим также, что минимальная проекция узла в  $T \times I$  не может иметь более двух петель, так как наличие трех и более нетривиальных петель делает проекцию несвязной.

**Лемма 2.** *Существуют ровно 15 регулярных графов, имеющих не более четырех вершин и не более двух петель (в число регулярных графов мы включаем окружность, на которой нет вершин, рис. 2).*

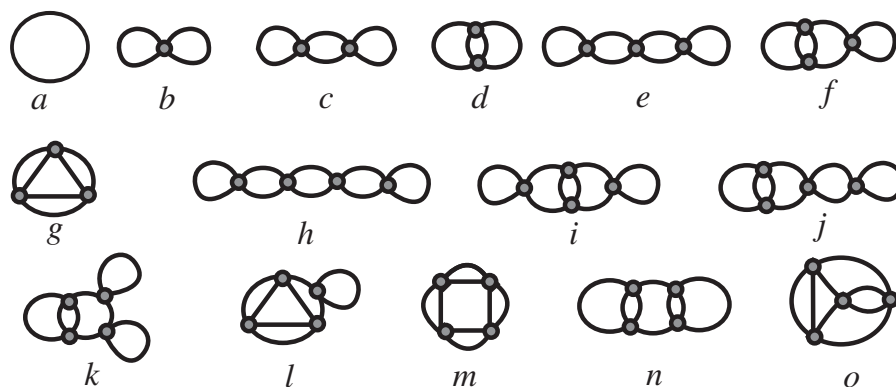


Рис. 2. Регулярные графы с  $\leq 4$  вершинами, имеющие не более двух петель

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Из леммы 1 следует, что все регулярные графы с  $n \leq 4$  вершинами получаются из окружности применением  $n$  операций следующих двух типов: добавление петли и отождествление точки на петле с точкой на другом ребре графа. Остается последовательно перебрать все графы, которые можно получить из окружности применением одной, двух, трех или четырех таких операций, попутно отбрасывая дубликаты, а в конце отбросить все графы с 3 и более петлями.  $\square$

**Определение 3.** Пусть проекция  $G \subset T$  узла  $K \subset T \times I$  и диск  $D \subset T$  таковы, что  $G$  пересекает  $D$  по двум непересекающимся собственным дугам  $l_1, l_2 \subset D$ . Тогда операция добавления тривиального двуугольника (или двуугольной грани) состоит в замене дуг

$l_1, l_2 \subset D$  на две новые дуги  $l'_1, l'_2 \subset D$ , которые имеют те же концы и трансверсально пересекаются в двух точках.

Для того чтобы выполнить такую операцию, достаточно выбрать простую дугу  $\alpha \subset T$ , соединяющую две отличные от вершин точки проекции, а в качестве диска  $D$  взять регулярную окрестность этой дуги (рис. 3). Обратная операция, т. е. замена дуг  $l'_1, l'_2 \subset D$  на дуги  $l_1, l_2 \subset D$ , называется устранением тривиального двуугольника.

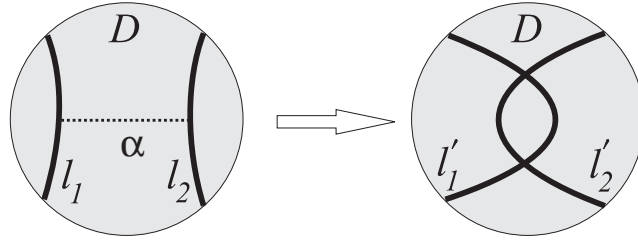


Рис. 3. Операция добавления двуугольника

**Теорема 2.** *Существуют ровно 36 различных проекций узлов в  $T \times I$ , которые имеют  $\leq 4$  перекрестков и не имеют тривиальных петель (рис. 4).*

**Замечание 1.** Как будет показано позднее (в конце доказательства теоремы 1), все эти проекции минимальны.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Очевидно, что графу  $a$  на рис. 2 отвечает только одна проекция нетривиального узла (с точностью до эквивалентности). Она обозначена  $\mathbf{0}_1$ . Заметим, что все вершины графов  $b, c, e$  и  $h$  являются разбивающими. Поэтому подходящее разрезание по вершинам проекции, отвечающей такому графу, дает  $n + 1$  окружность, где  $n$  — число его вершин. Окружности, соответствующие петлям графа, нетривиальны и поэтому параллельны на торе. Оставшиеся окружности могут быть как тривиальными, так и нет. Перебирая все комбинации их типов, мы приходим к проекции  $\mathbf{1}_1$  для  $n = 1$ , проекциям  $\mathbf{2}_1, \mathbf{2}_2$  для  $n = 2$ , проекциям  $\mathbf{3}_1\text{--}\mathbf{3}_3$  для  $n = 3$ . При  $n = 4$  получаем еще шесть проекций  $\mathbf{4}_1\text{--}\mathbf{4}_6$ .

Рассмотрим граф  $d$ . Его можно представить как объединение двух окружностей с двумя общими точками. В одной из этих точек окружности пересекаются трансверсально (по отношению к тому, как они расположены на  $T$ ), в другой — нет, так как в случае двух трансверсальных точек получается зацепление из двух компонент. Разрезав граф по нетрансверсальной точке, получим две окружности с оставшейся трансверсальной точкой пересечения, которые можно воспринимать как пару меридиан-параллель. Дополнение к такой паре на торе является диском. Поэтому обратную операцию, т. е. склеивание точки на меридиане и точки на параллели, можно выполнить только одним способом. Получится проекция  $\mathbf{2}_3$ .

Докажем, что минимальных проекций, отвечающих графам  $f, i, j, k$ , нет. Действительно, каждая проекция такого типа представляет собой проекцию  $\mathbf{2}_3$  с приклеенными к ней одной или двумя петлями. Так как дополнение проекции  $\mathbf{2}_3$  является диском, то эти петли тривиальны, но тогда рассматриваемая проекция не может быть минимальной.

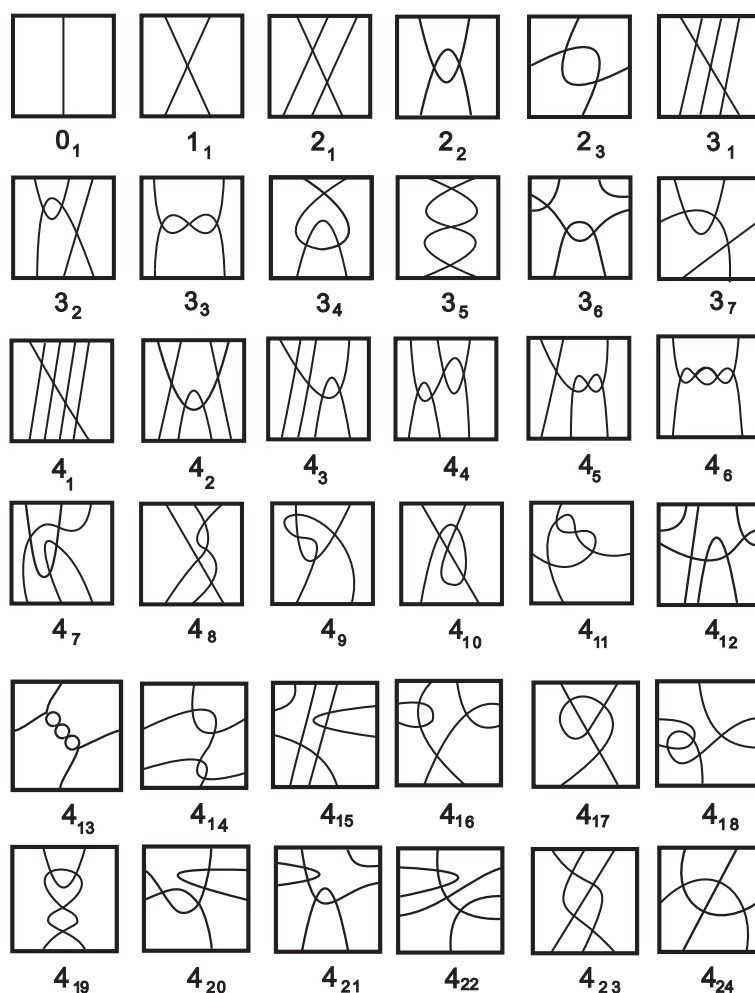


Рис. 4. Проекция узлов на торе  $T$ , который представлен в виде квадрата с отождествленными противоположными сторонами

Перечислим проекции, отвечающие графу  $g$ . Он состоит из трех окружностей, склеенных циклически по трем вершинам. Если хотя бы в одной из этих вершин окружности пересекаются трансверсально, то, как и выше, они составляют пару меридиан-параллель, дополнение которой является диском. Третью окружность можно расположить в этом диске единственным способом, дающим проекцию  $3_7$ .

Допустим, что во всех вершинах окружности касаются друг друга, т. е. пересекаются не трансверсально. Каждая из них может быть либо тривиальной, либо нет. Перебор всех возможностей показывает, что проекция узла (а не зацепления) получается только тогда, когда число тривиальных окружностей нечетно (т. е. равно 3 или 1). Более того, в первом случае граф  $G$  не должен содержаться в диске, т. е. должен идти вдоль какой-нибудь нетривиальной простой замкнутой кривой на торе. Это дает проекцию  $3_5$ . Во втором случае соединение нетривиальных окружностей можно выполнить двумя способами: чтобы они касались друг друга либо теми же сторонами, что и тривиальной окружности, либо противоположными. В результате получаются проекции  $3_4$  и  $3_6$ .

Теперь мы займемся проекциями типа  $l$ , получающимися из проекции типа  $g$  добавлением петли. Поскольку дополнения проекций **3<sub>6</sub>** и **3<sub>7</sub>** состоят из дисков, то к ним нетривиальные петли добавить нельзя. К каждой из проекций **3<sub>4</sub>**, **3<sub>5</sub>** нетривиальную петлю добавить можно, причем ровно одним способом. Это дает проекции **4<sub>7</sub>** и **4<sub>8</sub>**. Кроме того, еще две проекции **4<sub>9</sub>** и **4<sub>10</sub>** типа  $l$ , которые могут служить проекциями примарных узлов, получаются добавлением нетривиальных петель к единственной проекции типа  $g$ , являющейся проекцией составного узла (нетривиальной окружности на торе с завязанным на ней локальным трилистником).

Для построения проекций типа  $m$  мы используем тот же прием, что и для графа  $g$ . Отвечающая графу  $m$  проекция состоит из 4 окружностей, образующих замкнутую цепочку. Если хотя бы в одной вершине проекции эти окружности пересекаются трансверсально, то они образуют пару меридиан-параллель, и добавление оставшихся двух окружностей можно выполнить только одним способом. Получается проекция **4<sub>11</sub>**. Допустим, что во всех вершинах окружности касаются. Каждая из них может быть тривиальной или нет, причем, как и в случае графа  $g$ , число тривиальных окружностей должно быть нечетно (1 или 3). В случае одной тривиальной окружности получается проекция **4<sub>12</sub>**, в случае трех — проекция **4<sub>13</sub>**.

Рассмотрим проекцию  $G$  типа  $n$ . Она содержит две вершины, соединенные тремя ребрами. Удалим из этих трех ребер два ребра, оставив третье. Мы получим проекцию  $G'$  типа  $2_3$ . Ее дополнение состоит из двух дисков. Чтобы вернуться к  $G$ , нужно добавить к  $G'$  два ребра так, чтобы они имели общие концы на одном из ребер  $e$  проекции  $G'$ . Одно из них должно подходить к  $e$  с одной стороны, другое — с разных, так как в противном случае получится проекция либо зацепления, либо составного узла. Это можно сделать только одним способом, приводящим к проекции **4<sub>14</sub>**.

Перейдем теперь к последнему графу  $o$ . Пусть проекция  $G$  имеет такой тип. Допустим, что одна из ее граней является двуугольником. Устраним этот двуугольник с помощью операции, изображенной на рис. 3, см. определение 2. Мы получим проекцию, которая имеет две вершины и поэтому отвечает одному из графов  $c$  или  $d$ . Таким образом,  $G$  получается из проекции одного из указанных типов операцией добавления двуугольника. Суть дальнейшего доказательства состоит в том, что нужно перебрать все проекции типов  $c$  и  $d$  и проанализировать, когда и вдоль каких дуг к ним можно добавить двуугольник так, чтобы получить примарную проекцию типа  $o$ . При этом в случае проекции типа  $c$  достаточно рассматривать только те пути, которые соединяют петли.

Результаты такого анализа приведены на рис. 5. На нем изображены все проекции типов  $c$  и  $d$  вместе с дугами, дающими примарные проекции типа  $o$ . Для каждого из случаев 1–6 такой путь только один (с точностью до гомеоморфизма тора  $T$ ). В результате добавления двуугольника получаются проекции **4<sub>15</sub>**– **4<sub>20</sub>**. Оставшиеся возможности 7–10 дают две новых проекции типа  $o$ : проекцию **4<sub>21</sub>** в случае 7 и проекцию **4<sub>22</sub>** в случае 8. Случаи 9, 10 дают уже полученные проекции **4<sub>19</sub>** и **4<sub>20</sub>**.

Теперь предположим, что двуугольных граней нет. Тогда двойные ребра определяют нетривиальные непересекающиеся окружности на  $T$ , которые содержат по две вершины

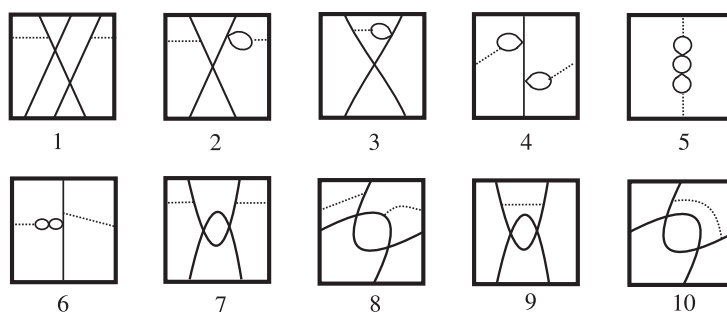


Рис. 5. Получение проекций типа о

каждая и разбивают тор на два кольца. Оставшиеся 4 ребра должны быть расположены в этих кольцах ( $m$  в одном,  $n$  в другом) и соединять каждую вершину одной окружности с каждой вершиной другой. Есть три возможности:  $(m, n) = (0, 4), (1, 3)$  и  $(2, 2)$ . В первом и втором случаях мы получаем проекции  $4_{23}, 4_{24}$ , а в третьем — проекцию зацепления, а не узла.

Докажем, что все проекции на рис. 4 различны. Дополнение к каждой проекции на торе состоит из дисковых и кольцевой (если она есть) граней. Сопоставив каждой грани число ее углов, получим набор чисел. Оказалось, что такие наборы (с учетом типов граней) различают все проекции, указанные в формулировке теоремы. Исключение составляют только проекции  $4_{11}, 4_{21}$ , которым отвечает один и тот же набор  $2, 2, 4, 8$ . Эти проекции различны, так как в первом случае двуугольники имеют общую вершину, а во втором нет.  $\square$

### 3. Доказательство теоремы 1

Восстановим по проекциям, описанным в теореме 2 (см. рис. 5), диаграммы узлов на  $T$ , указав тип каждого перекрестка. Для проекции с  $n$  вершинами это можно сделать  $2^n$ , т. е. в нашем случае  $\leq 16$  способами. Однако перебор можно существенно сократить за счет следующих соображений.

1. При симметрии утолщенного тора, индуцированной симметрией отрезка, типы всех перекрестков диаграммы изменяются на противоположные, а класс эквивалентности узла не меняется. Поэтому для проекции с  $n$  вершинами достаточно рассмотреть  $2^{n-1}$  возможностей.
2. Из четырех возможных разметок вершин двуугольника достаточно рассмотреть только две, когда двуугольник нельзя устранить вторым преобразованием Райдемайстера. Поэтому каждый двуугольник сокращает перебор еще в два раза.
3. Разметку перекрестков на фрагменте, показанном на рис. 6, можно выполнить только двумя способами (иначе полученная диаграмма будет не минимальной). Эти способы показаны на рисунке.
4. Допустим, что проекция имеет треугольную грань, причем вершины этой грани размечены так, что можно выполнить третье преобразование Райдемайстера, дающее диаграмму с ранее полученной проекцией. Тогда указанную разметку можно не рассматривать.



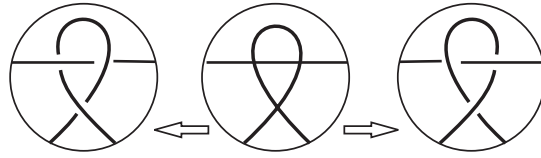


Рис. 6. Две допустимые разметки центрального фрагмента

Указанных соображений оказалось достаточно для устранения всех дубликатов. Единственным исключением служит диаграмма на рис. 7 слева, которая преобразуется в ранее полученную диаграмму  $4_{31}$ , показанную справа.

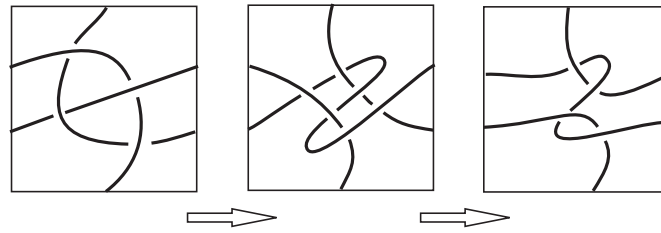


Рис. 7. Двухступенчатое преобразование одной диаграммы в другую

Различность всех узлов, приведенных в таблице на рис. 1, доказывается с помощью вычисления их обобщенных полиномов Кауффмана [9; 10]. В отличие от обычной нормализованной скобки Кауффмана от одной переменной мы используем две переменные  $a$  и  $x$ , которые нужны для учета числа тривиальных и числа нетривиальных окружностей в  $T$ , полученных после разрешения всех перекрестков диаграммы узла. Дополнительно мы применяем нестандартную нормировку, полагая, что полином тривиального узла равен  $-a^2 - a^{-2}$ , а не 1, как обычно. Причина в том, что довольно часто разрешение перекрестков не дает ни одной тривиальной окружности. В таких случаях полученные полиномы пришлось бы делить на  $(-a^2 - a^{-2})$ . Точная формула такова:

$$X(K) = (-a)^{-3w(K)} \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\gamma(s)} x^{\delta(s)},$$

где  $\alpha(s)$  и  $\beta(s)$  — числа маркеров  $A$  и  $B$  в состоянии  $s$ , а  $\gamma(s)$  и  $\delta(s)$  — числа тривиальных и нетривиальных окружностей в торе, полученных в результате разрешения всех перекрестков, которое соответствует состоянию  $s$ . Разумеется, сумма берется по всем возможным состояниям, а  $w(K)$  обозначает число скручивания диаграммы. Следующая таблица была получена путем прямого вычисления полиномов. Все полиномы оказались различными. Отсюда следует, что все узлы, приведенные в таблице на рис. 1, различны. Попутно мы получаем доказательство минимальности всех 36 проекций, приведенных в теореме 2.  $\square$

$0_1: x$

$1_1: a^2 + a^6 - a^2 x^2$

$2_1: (-2a^4 - a^8)x + a^4 x^3$

- $2_2: (-1 - a^{-4} - a^4)x + x^3$   
 $2_3: -a^6 - a^{10} + (-a^2 + a^6)x^2$   
 $2_4: (a^4 + a^6 - a^{10})x$   
 $3_1: -a^6 - a^{10} + (3a^6 + a^{10})x^2 - a^6x^4$   
 $3_2: -a^{-2} - a^2 + (a^{-2} + 2a^2 + a^6)x^2 - a^2x^4$   
 $3_3: -a^6 - a^{10} + (a^{-2} + a^2 + 2a^6)x^2 - a^2x^4$   
 $3_4: (-a^4 + a^8 + a^{12})x + (a^4 - a^8)x^3$   
 $3_5: (-a^{-4} + a^4 + a^8)x + (1 - a^4)x^3$   
 $3_6: a^{10} + a^{14} + (-a^2 + a^6 - a^{10})x^2$   
 $3_7: -a^2 - a^{14} + (-a^{10} + a^{14})x^2$   
 $3_8: a^6 + a^{18} - a^6x^2$   
 $3_9: 2a^6 + a^{10} - a^{14} + (-a^6 - a^{10} + a^{14})x^2$   
 $3_{10}: a^{-2} + 2a^2 - a^{10} + (-2a^2 + a^6)x^2$   
 $3_{11}: (1 + a^{-2} - a^2 - a^4 + a^8)x$   
 $4_1: (1 + a^{-8} + a^{-4} + a^4 + a^8)x + (-1 - 2a^{-4} - 2a^4)x^3 + x^5$   
 $4_2: (3a^8 + 2a^{12})x + (-4a^8 - a^{12})x^3 + a^8x^5$   
 $4_3: (2 + 2a^4 + a^8)x + (-1 - 3a^4 - a^8)x^3 + a^4x^5$   
 $4_4: (1 + a^4 + 2a^8 + a^{12})x + (-1 - 2a^4 - 2a^8)x^3 + a^4x^5$   
 $4_5: (2 + 2a^4 + a^8)x + (-2 - a^{-4} - 2a^4)x^3 + x^5$   
 $4_6: (3 + a^{-4} + a^4)x + (-3 - a^{-4} - a^4)x^3 + x^5$   
 $4_7: -a^{-10} - a^{-6} + (2a^{-6} - a^2 - a^6)x^2 + (-a^{-2} + a^2)x^4$   
 $4_8: -a^6 - a^{10} + (2a^6 - a^{10} - a^{14})x^2 + (-a^6 + a^{10})x^4$   
 $4_9: -a^{-2} - a^2 + (a^{-2} + a^2 - a^6 - a^{10})x^2 + (-a^2 + a^6)x^4$   
 $4_{10}: a^{10} + a^{14} + (2a^6 - 2a^{10} - a^{14})x^2 + (-a^6 + a^{10})x^4$   
 $4_{11}: a^2 + a^6 + (a^{-6} + a^{-2} - 2a^2 - a^6)x^2 + (-a^{-2} + a^2)x^4$   
 $4_{12}: a^2 + a^6 + (a^{-2} - a^6 - a^{10})x^2 + (-a^2 + a^6)x^4$   
 $4_{13}: a^{10} + a^{14} + (a^{-2} - 2a^{10})x^2 + (-a^2 + a^6)x^4$   
 $4_{14}: (-1 + a^{-8} + a^8)x + (2 - a^{-4} - a^4)x^3$   
 $4_{15}: (2a^8 - a^{16})x + (a^4 - 2a^8 + a^{12})x^3$   
 $4_{16}: (-a^4 - a^{12} - a^{16})x + (a^4 - a^8 + a^{12})x^3$   
 $4_{17}: (-a^{-4} - a^8 - a^{12})x + (1 - a^4 + a^8)x^3$   
 $4_{18}: -a^{14} - a^{18} + (-a^2 + a^6 - a^{10} + a^{14})x^2$   
 $4_{19}: (a^4 - a^8 + a^{20})x + (a^{12} - a^{16})x^3$   
 $4_{20}: (-a^8 + 2a^{12})x + (a^8 - a^{12})x^3$   
 $4_{21}: (-2a^8 - a^{16})x + a^8x^3$   
 $4_{22}: (-1 - a^4 - a^8 + a^{12} - a^{16})x + a^4x^3$

$$\begin{aligned}
4_{23}: & -a^{10} - a^{22} + (-a^6 + a^{10} - a^{14} + a^{18})x^2 \\
4_{24}: & a^{-2} + a^{10} + (-a^2 + a^6 - 2a^{10} + a^{14})x^2 \\
4_{25}: & (a^4 + a^6 - a^8 - a^{10} + a^{12} + a^{14} - a^{18})x \\
4_{26}: & (a^8 - 2a^{14} + 2a^{18})x + (a^{14} - a^{18})x^3 \\
4_{27}: & (-a^2 + a^4 + a^{14})x + (a^6 - a^{10})x^3 \\
4_{28}: & (1 - a^{-6} - a^{-2} + a^2 + a^6)x + (a^{-2} - a^2)x^3 \\
4_{29}: & (a^8 + a^{10} - a^{14} + a^{18} - a^{22})x \\
4_{30}: & (a^8 + 2a^{10} + a^{12} - 2a^{14} - 2a^{16} + a^{20})x \\
4_{31}: & (3 - a^{-6} - a^{-4} + a^{-2} + a^2 - a^4 - a^6)x \\
4_{32}: & (-1 - a^4 + a^6 - a^8 - a^{10})x + a^4x^3 \\
4_{33}: & (-1 - a^{-4} + a^{-2} - a^2 - 2a^4 + a^8)x + x^3 \\
4_{34}: & (-3a^8 + a^{12} + a^{14} - a^{16} - a^{18})x + a^8x^3 \\
4_{35}: & 2 - a^8 + a^{12} + (-1 + a^8 - a^{12})x^2 \\
4_{36}: & -1 + a^{-8} + a^{-4} + a^8 + (2 - 2a^{-4} - a^4)x^2 \\
4_{37}: & -a^{-10} + a^{-6} + a^{-2} + a^6 + (-a^{-2} + a^2 - a^6)x^2 \\
4_{38}: & (2 + a^{-8} - a^{-4} + a^2 - a^4 - a^6)x \\
4_{39}: & -a^{-10} - a^{-2} - a^2 + a^6 + (a^2 - a^6)x^2 \\
4_{40}: & (a^4 - a^8 + 2a^{12} + a^{14} - a^{16} - a^{18})x \\
4_{41}: & (2a^4 + a^6 - a^8 - 2a^{10} + a^{14})x \\
4_{42}: & (a^8 + a^{10} + a^{12} - a^{14} - a^{16})x \\
4_{43}: & (2 - a^{-6} + a^{-2} - a^4)x \\
4_{44}: & (-a^2 + a^4 + 2a^6 + a^8 - a^{10} - a^{12})x \\
4_{45}: & -a^2 + a^6 + a^{10} - 2a^{14} - a^{18} + (-2a^{10} + 2a^{14})x^2 \\
4_{46}: & a^{-6} - 2a^{-2} - 2a^2 + a^6 + (-a^{-6} + a^{-2} + a^2 - a^6)x^2 \\
4_{47}: & (-1 + a^{-8} - 2a^{-4} - 2a^4 + a^8)x + x^3
\end{aligned}$$

### Заклучение

1. Степени переменной  $x$  в каждом полиноме имеют одну и ту же четность, которая зависит только от того, тривиален или нет отвечающий узлу элемент группы  $H_1(T; \mathbb{Z}_2)$ . Эта четность совпадает с четностью наибольшего общего делителя чисел точек пересечения узла со смежными сторонами квадрата.
2. Таблица содержит ровно 10 гомологически тривиальных узлов:  $2_3, 3_7, 4_7 - 4_9, 4_{18}, 4_{23}, 4_{39}, 4_{45}, 4_{46}$ .
3. Таблица содержит ровно 23 альтернированные диаграммы:  $1_1, 2_2, 2_3, 3_3, 3_5 - 3_8, 3_{10}, 4_1, 4_7, 4_{13}, 4_{14}, 4_{17} - 4_{19}, 4_{22} - 4_{24}, 4_{36}, 4_{37}, 4_{39}, 4_{45}$ . Как и следовало ожидать, соответствующие узлы имеют ровно по одной минимальной диаграмме.

4. Половина из 36 проекций из теоремы 2 задают ровно по одному табличному узлу. Максимальное число узлов (оно равно 6) задает проекция  $4_1$ , а среднее число узлов на одну проекцию не превосходит 2.

### Список литературы

1. *Tait P. G.* On Knots I, II, III // Cambridge University Press. 1898–1900. Including Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 1877. Vol. 28. P. 35–79.
2. *Alexander J. W., Briggs G. B.* On Types of Knotted Curves // Ann. Math. 1927. Vol. 28. P. 562–586.
3. *Rolfsen D.* Knots and Links. Berkeley: Publish of Perish, 1976 (reprinted in 2003).
4. *Hoste J., Thistlethwaite M., Weeks J.* The First 1,701,935 Knots // Springer. 1998. Vol 20. No. 4. P. 33–48.
5. *Дроботухина Ю. В.* Аналог полинома Джонса для зацеплений в  $RP^3$  и обобщение теоремы Кауффмана–Мурасуги // Алгебра и анализ. 1991. Т. 2, № 3. С. 613–630.
6. *Drobotukhina Yu. V.* Classification of Links in  $\mathbb{R}P^3$  with at Most Six Crossings // Advances in Soviet Mathematics. 1994. Vol. 18. No. 1. P. 87–121.
7. *Bogdanov A., Meshkov V., Omelchenko A., Petrov M.* Classification of  $k$ -Tangle Projections Using the Cascade Representation // J. of Knot Theory and Its Ramifications. 2011. Vol. 21. No. 7. [17 pages] DOI: 10.1142/S0218216512500691.
8. *Grishanov S., Meshkov V., Omelchenko A.* Kauffman-Type Polynomial Invariants for Doubly Periodic Structures // J. of Knot Theory and Its Ramifications. 2007. Vol. 16. No. 6. P. 779–788.
9. *Kauffman L.* State Models and the Jones Polynomial // Topology. 1987. Vol. 26. No. 3. P. 395–407.
10. *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.

Материал поступил в редколлегию 17.04.2012

### Адрес авторов

АКИМОВА Алена Андреевна

Южно-Уральский государственный университет

пр. Ленина, 76, Челябинск, 454080, Россия

e-mail: akimova\_susu@mail.ru

МАТВЕЕВ Сергей Владимирович

Челябинский государственный университет

ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск, 454001, Россия

Институт математики и механики Уральского отделения РАН

ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990, Россия,

e-mail: matveev@csu.ru