УДК 517.588.88

Д. В. Батенков, В. П. Голубятников, И. Н. Иомдин

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ С НЕПОЛНЫМИ ДАННЫМИ*/

Рассматриваются нелинейные задачи реконструкции многомерных объектов по неполным наборам дистанционных измерений, представленных в виде интегральных преобразований. С помощью системы уравнений Прони для D-финитных объектов получены конструктивные решения таких обратных задач.

Ключевые слова: интегральные преобразования, моменты, невидимые множества, полуалгебраические области, система Прони, D-финитные функции.

Введение

Мы продолжаем изучение обратных нелинейных задач реконструкции многомерных объектов по неполным наборам дистанционных измерений, представленных в виде интегральных преобразований (см. [1–4]). В этой работе мы рассматриваем в качестве таких данных конечные наборы моментов

$$m_{\alpha,\beta} = \iint_{R^2} \chi_G(x,y) \cdot x^{\alpha} y^{\beta}\, dxdy,$$

вычисленных для искомой плоской области $G \subset \mathbb{R}^2$ с характеристической функцией $\chi_G(x,y)$, и изучаем вопросы строения областей и функций, «невидимых» для некоторых наборов их моментов. Мы предполагаем, что область G принадлежит конечномерному семейству областей G_λ, запараметризованных конечным набором дискретных либо непрерывных параметров λ, и что граница ∂G состоит из конечного числа кривых, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами.

Аналогичные обратные задачи в последнее время рассматривались и для других «измерительных данных», в частности томографических (см. [5–10] и цитируемую там литературу). Наш подход основан на разработанном в [1] методе реконструкции кусочно-гладкой функции одной переменной.

1. Одномерный случай

Проблемы реконструкции одномерных объектов рассматривались для многих конечномерных их семейств, в частности для линейных комбинаций сдвигов функций из известного их набора, для кусочно-D-финитных функций, которые мы рассматриваем ниже, и др. (см. [1; 4; 11; 12] и цитируемую там литературу).

* Работа поддержана ISF, Grants No. 639/09, Minerva Foundation, РФФИ (проект 12-01-00074) и междисциплинарным грантом СО РАН № 80.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2012. Т. 12, вып. 3. С. 46–60

1.1. *Восстановление кусочно-D-финитных объектов*

Пусть функция $g(x)$ с носителем на $[a, b] \subset \mathbb{R}^1$ удовлетворяет условию: *существует конечный набор из* $\mathcal{K}+2$ *точек* $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{\mathcal{K}+1} = b$ *таких, что на каждом отрезке* $[\xi_n, \xi_{n+1}]$, *где* $n = 0, 1, \ldots \mathcal{K}$, *функция* $g(x)$ *непрерывна и удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению*

$$D_n g(x) = \sum_{j=0}^{N} p_{n,j}(x) \left(\frac{d^j g}{dx^j} \right) = 0 \tag{1}$$

с полиномиальными коэффициентами $p_{n,j}(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_{n,j}} a_{n,i,j} x^i$, *где* $p_{N,j} \neq 0$ *на* $[a, b]$.

В точках ξ_n эта функция $g(x)$ может иметь разрывы. Такие функции описываются конечными наборами параметров и потому называются D-финитными. В частном случае кусочно-полиномиальных функций можно считать, что дифференциальные операторы D_n совпадают при всех n и равны $D = \frac{d^{N+1}}{dx^{N+1}}$, где N — максимальная степень полиномиальных частей кусочно-полиномиальной функции g. Для простоты изложения в дальнейшем будем предполагать, что все эти операторы D_n совпадают.

Как было показано в [1], набор дискретных параметров $\mathcal{K}$, N, $\{k_{n,j}\}$ и достаточно большой набор моментов

$$m_\alpha = \int_a^b g(x) \cdot x^\alpha dx, \quad \alpha = 0, 1, 2, \ldots, \mu$$

однозначным образом определяет D-финитную функцию $g(x)$ вместе со всеми ее точками возможных разрывов $\xi_0, \ldots \xi_{\mathcal{K}+1}$ и со всеми коэффициентами дифференциального оператора D.

В случае кусочно-полиномиальной функции необходимое количество моментов μ зависит только от количества скачков $\mathcal{K}$ и от определенной выше максимальной степени N (см. [1]):

$$\mu = \mu(\mathcal{K}, N) = \max\bigl\{2(N+1)\mathcal{K} - 2, (\mathcal{K}+1)(N+1)\bigr\}.$$

Аналогичное, но несколько более громоздкое выражение для μ может быть выписано и в кусочно-алгебраическом случае.

Отметим, что для произвольных D-финитных функций величина μ может зависеть и от других параметров.

Пусть $L_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$ — n-й полином Лежандра. Как известно, все такие полиномы попарно ортогональны на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяют уравнению Лежандра второго порядка

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - x^2) \frac{d}{dx} L_n(x) \right] + n(n+1) L_n(x) = 0.$$

Поскольку полиномы $L_j(x)$, $j \leq n$ образуют базис в пространстве всех полиномов степени не больше n, многочлен $L_n(x)$ ортогонален всем многочленам $1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}$, и, следовательно, все его моменты $m_j(L_n) = \int_{-1}^{1} x^j L_n(x) dx$ обращаются в ноль при $j = 0, 1, \ldots, n-1$. Отсюда следует, что D-финитная функция $L_n(x)$ на отрезке $[-1, 1]$

может быть определена как минимум по ее $n+1$ моменту, и, значит, величина μ зависит не только от порядка дифференциального оператора Лежандра, но и от параметра n.

Пусть не равная тождественно нулю на отрезке $[a,b]$ функция $g(x)$ удовлетворяет уравнению $Dg=0$. В работе [1] для восстановления такой функции по ее моментам m_α была построена процедура, состоящая из решения некоторых линейных систем уравнений, имеющих специальный вид нелинейных алгебраических систем, коэффициенты которых выражаются через моменты m_α. На последнем шаге этой процедуры требуется также нахождение базиса в пространстве решений линейного дифференциального уравнения $Dg=0$.

В дальнейшем эту процедуру восстановления мы будем называть *Процедурой* 1.

1.2. *Системы Прони*

Системы Прони появляются при решении следующих обратных задач.

Пусть $F(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \delta(x-x_i)$, и «измерения» имеют вид $m_n = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) x^n dx$ или же $m_n = \int \sum_{j=1}^{N} a_i \delta(x-x_j) x^n dx = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j^n$. Считая a_i и x_i неизвестными, мы получаем систему уравнений:

$$m_n = \sum_{j=1}^{N} a_j x_j^n, \quad n = 0, 1 \dots . \tag{2}$$

Эта бесконечная система уравнений называется *системой Прони*. Впервые она появилась в работах Р. де Прони (1795) [13] и использовалась в дальнейшем во многих теоретических и прикладных исследованиях (см., например, [11; 12]), где приводится краткий список соответствующих публикаций и описывается один из методов решения этой системы. В этом методе используются $2N$ уравнений вида (2), и сначала с его помощью определятся количество ненулевых коэффициентов a_j. Далее неизвестные a_j и x_j определяются с помощью корней многочленов, коэффициенты которых выражаются через решения линейных систем типа Ганкеля, в которых коэффициенты, в свою очередь, выражаются через моменты m_n.

В дальнейшем эту процедуру восстановления мы будем называть *Процедурой* 2.

2. Основной результат

Определение 1. Компактная область $G \subset \mathbb{R}^2$ называется D-финитной, если ее граница ∂G представима в виде объединения $\varkappa$ дуг S_j, удовлетворяющих следующему условию: *существует линейный дифференциальный оператор D вида* (1)*, у которого старший коэффициент не обращается в нуль в проекции G_x области G на ось Ox, и такой, что каждая дуга S_j является графиком функции $y=\psi_j(x)$, удовлетворяющей уравнению $D\psi_j = 0$.*

Область G при этом не обязана быть односвязной. В случае, когда каждая дуга S_j является графиком алгебраической функции $y=\psi_j(x)$, у которой все ветви регулярны на проекции G_x, область G является D-финитной.

Для формулировки основной теоремы обозначим через $[a, b]$ проекцию области G на ось Ox, и пусть $a = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_{\mathcal{K}+1} = b$ — проекции концов дуг S_j, образующих границу этой области. Очевидно, $\mathcal{K} \le \varkappa$, и максимальное число пересечений ∂G с вертикальной прямой не превосходит $\varkappa - 1$.

Представим оператор D из определения 1 в виде

$$Dg(x) = \sum_{j=0}^{N} p_j(x) \frac{d^j g}{dx^j}(x), \tag{3}$$

где $p_j(x) = \sum\limits_{i=0}^{k_j} a_{i,j} x^i$.

Теорема 1. *Любая D-финитная область, определяемая дискретными параметрами $\varkappa$, N, k_j однозначно восстанавливается по набору моментов*

$$m_{\alpha,\beta} = \iint_{R^2} \chi_G(x, y) \cdot x^\alpha y^\beta dxdy, \quad 0 \le \alpha \le M(\varkappa, N, k_j), \quad 0 \le \beta \le 2(\varkappa - 1).$$

Процедура восстановления состоит из двух шагов. На первом шаге решаются некоторые линейная система и нелинейная алгебраическая система уравнений, коэффициенты которых выражаются через моменты $m_{\alpha,\beta}$. Далее решается уравнение $Du = 0$ (см. формулу (3)), в котором коэффициенты определяются на первом шаге.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через Δ_j отрезок $[\xi_j, \xi_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, \mathcal{K}$. Область G над каждым таким отрезком Δ_j представима в виде объединения $s_j \le \frac{1}{2}(\varkappa - 1)$ полосок $\underline{\varphi}_{j,l} \le y \le \overline{\varphi}_{j,l}$, $l = 1, \ldots, s_j$, и тогда

$$m_{\alpha,\beta} = \int_a^b x^\alpha \Psi_\beta(x)\, dx = \sum_{j=0}^{\mathcal{K}} \int_{\Delta_j} x^\alpha \Psi_{\beta,j}(x)\, dx, \tag{4}$$

где при $x \in \Delta_j$

$$\Psi_{\beta,j}(x) = \int_{\underline{\varphi}_{j,1}(x)}^{\overline{\varphi}_{j,s_j}(x)} y^\beta \chi_G(x, y)\, dy = \frac{1}{\beta + 1} \sum_{l=1}^{s_j} \left(\overline{\varphi}_{j,l}^{\beta+1}(x) - \underline{\varphi}_{j,l}^{\beta+1}(x) \right). \tag{5}$$

Отсюда сразу следует, что при всех $\beta \ge 0$ функции Ψ_β кусочно-D-финитны. Действительно, на каждом отрезке Δ_j, $j = 0, \ldots, \mathcal{K}$, функция $\Psi_\beta = \Psi_{\beta,j}$ является линейной комбинацией β-х степеней функций $\underline{\varphi}_{j,l}, \overline{\varphi}_{j,l}$, $l = 1, \ldots, s_j$, которые по предположению удовлетворяют уравнению $D\psi = 0$. Значит, каждая функция $\Psi_{\beta,j}$ удовлетворяет некоторому линейному дифференциальному уравнению с полиномиальными коэффициентами: $D_\beta \Psi_\beta = 0$. Оператор D_β зависит только от D и не имеет особенностей на отрезке $[a, b]$, если оператор D не имеет таких особенностей.

С помощью (4) нетрудно найти моменты функции Ψ_β одной переменной:

$$m_\alpha(\Psi_\beta) = \int_a^b x^\alpha \Psi_\beta(x)\, dx = m_{\alpha,\beta},$$

и далее применить описанную выше процедуру 1 для восстановления функции Ψ_β по ее моментам $m_{\alpha,\beta}$, где $\alpha = 0, 1, \ldots$, и $\mu_\beta \le M(\varkappa, N, k_j)$ при всех $\beta = 0, 1, \ldots, 2(\varkappa - 1)$. На каждом интервале Δ_j функция $\Psi_\beta(x) = \Psi_{\beta,j}(x)$ представляется в виде линейной комбинации базиса в пространстве решений уравнения $D_\beta u = 0$.

Рассмотрим далее при каждом фиксированном $x \in \Delta_j$ уравнения (5) при различных значениях β как систему уравнений с неизвестными $\underline{\phi}_{j,l}(x), \overline{\phi}_{j,l}(x)$ и известными левыми частями $\Psi_{\beta,j}(x)$. Эта система является системой Прони, в которой коэффициенты a_j равны ± 1, и их сумма равна нулю. Таким образом, значения функций $\underline{\phi}_{j,l}(x), \overline{\phi}_{j,l}(x)$ при каждом $x \in \Delta_j$ можно найти из уравнений (4) с помощью процедуры 2, а эти функции при $j = 0, \ldots, \mathcal{K}$, $\ l = 1, \ldots, s_j$ однозначно определяют область G. Теорема доказана. □

Как было сказано выше, в случае кусочно-алгебраической границы имеются оценки количества моментов, необходимого для восстановления области. Мы будем рассматривать здесь случай кусочно-полиномиальных границ, для которого такие оценки имеют более простую форму и более точны.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *каждая граничная дуга* S_j *является графиком полиномиальной функции* $y = \psi_j(x)$ *степени не больше* N. *Тогда область* G *однозначно определяется набором моментов*

$$\{m_{\alpha,\beta} :\ 0 \le \beta \le 2(\varkappa - 1),\ 0 \le \alpha \le M(N, \varkappa, \beta)\},$$

где

$$M(N, \varkappa, \beta) = \max\Big\{2(\beta N + 1)\varkappa - 2,\ (\varkappa + 1)(\beta N + 1)\Big\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построенные в доказательстве теоремы 1 функции Ψ_β в условиях теоремы 2 кусочно-полиномиальны, и их степени не превосходят βN. Таким образом, теорема 2 вытекает из соответствующего результата [1], приведенного выше.

3. Примеры

Начнем с рассмотрения области, ограниченной частью эллиптической кривой

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d \equiv f(x). \tag{6}$$

Будем предполагать, что корни x_1, x_2, x_3 уравнения $f(x) = 0$ вещественны, $x_1 < x_2$, и что на интервале (x_1, x_2) функция $f(x)$ положительна. Таким образом, уравнение $y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ определяет компактную область $G \subset \mathbb{R}^2$.

Рассмотрим конечный набор соответствующих моментов

$$m_{\alpha,\beta} = \iint_G x^\alpha \cdot y^\beta dx dy.$$

Поскольку область G симметрична относительно оси Ox, при нечетных β мы имеем $m_{\alpha,\beta} = 0$ и

$$m_{\alpha,2\beta} = \frac{2}{2\beta + 1} \int_{x_1}^{x_2} x^\alpha \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{\beta + 1/2}\, dx. \tag{7}$$

Для упрощения вычислений введем обозначение

$$M_{\alpha,2\beta} = \frac{2\beta+1}{2} \cdot m_{\alpha,2\beta},$$

и будем называть эту величину «моментом». Из уравнения (7) немедленно следует что

$$M_{\alpha,2\beta+2} = a \cdot M_{\alpha+3,2\beta} + b \cdot M_{\alpha+2,2\beta} + c \cdot M_{\alpha+1,2\beta} + d \cdot M_{\alpha,2\beta}.$$

Будем восстанавливать кривую (6) по конечному (минимально возможному) набору моментов $M_{\alpha,2\beta}$. Имеем

$$\begin{aligned} M_{0,2} &= a \cdot M_{3,0} + b \cdot M_{2,0} + c \cdot M_{1,0} + d \cdot M_{0,0}; \\ M_{1,2} &= a \cdot M_{4,0} + b \cdot M_{3,0} + c \cdot M_{2,0} + d \cdot M_{1,0}. \end{aligned} \tag{8}$$

Таким образом, можно получить систему соотношений с неизвестными коэффициентами a, b, c, d, а также способ проверки совместимости «измерительных данных» $\{M_{\alpha,\beta}\}$.

Опишем еще два способа получения таких соотношений.

1. Рассмотрим момент

$$M_{\alpha,2} = \int_{x_1}^{x_2} x^{\alpha} \cdot (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{3/2}\, dx.$$

Поскольку $f(x_1) = f(x_2) = 0$, интегрируя по частям

$$du = x^{\alpha} dx, \quad v = (ax^3 + bx^2 + cx + d)^{3/2},$$

получаем

$$M_{\alpha,2} = -\frac{3}{2(\alpha+1)} \cdot (3a \cdot M_{\alpha+3,0} + 2b \cdot M_{\alpha+2,0} + c \cdot M_{\alpha+1,0}).$$

В случаях $\alpha = 1$ и $\alpha = 0$ имеем

$$-\frac{4}{3} \cdot M_{1,2} = 3a \cdot M_{4,0} + 2b \cdot M_{3,0} + c \cdot M_{2,0} \tag{9}$$

и

$$-\frac{2}{3} \cdot M_{0,2} = 3a \cdot M_{3,0} + 2b \cdot M_{2,0} + c \cdot M_{1,0}. \tag{10}$$

2. Поскольку $f(x_1) = f(x_2) = 0$, простая замена переменных показывает, что

$$\int_{x_1}^{x_2} (3ax^2 + 2bx + c) \cdot (ax^3 + 2bx^2 + cx + d)\, dx = 0,$$

и, значит,

$$0 = 3a \cdot M_{2,0} + 2b \cdot M_{1,0} + c \cdot M_{0,0}. \tag{11}$$

Покажем, что определитель системы линейных уравнений (9), (10), (11) с неизвестными a, b, c не равен нулю. Пусть $L_{2,f}[x_1, x_2]$ — гильбертово пространство, состоящее из определенных на отрезке $[x_1, x_2]$ соответствующих функций и со скалярным произведением

$$\langle F(x), H(x) \rangle := \int_{x_1}^{x_2} F(x) \cdot H(x) \sqrt{f(x)}\, dx.$$

В этих обозначениях имеем

$$M_{0,0} = \langle x^0, x^0\rangle, \quad M_{1,0} = \langle x^1, x^0\rangle,$$
$$M_{2,0} = \langle x^2, x^0\rangle = \langle x^1, x^1\rangle,$$
$$M_{3,0} = \langle x^2, x^1\rangle, \quad M_{4,0} = \langle x^2, x^2\rangle.$$

Значит, определитель системы (9)–(11) равен

$$6\cdot\begin{pmatrix} M_{4,0} & M_{3,0} & M_{2,0} \\ M_{3,0} & M_{2,0} & M_{1,0} \\ M_{2,0} & M_{1,0} & M_{0,0}\end{pmatrix} = 6\cdot\begin{pmatrix} \langle x^2, x^2\rangle & \langle x^2, x^1\rangle & \langle x^2, x^0\rangle \\ \langle x^2, x^1\rangle & \langle x^1, x^1\rangle & \langle x^1, x^0\rangle \\ \langle x^2, x^0\rangle & \langle x^1, x^0\rangle & \langle x^0, x^0\rangle\end{pmatrix},$$

что с точностью до множителя 6 совпадает с определителем матрицы Грама набора из трех функций x^2, x^1, x^0, линейно независимых в пространстве $L_{2,f}[x_1, x_2]$. Хорошо известно, что этот определитель строго положителен, значит, система линейных уравнений (9), (10), (11) имеет единственное решение a, b, c. Неизвестный коэффициент d однозначно определяется из уравнения (8), так как $M_{0,0} > 0$.

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3 [3]. *Эллиптическая кривая* (6) *однозначно восстанавливается по* 7 *моментам* $m_{0,0}$, $m_{1,0}$, $m_{2,0}$, $m_{3,0}$, $m_{4,0}$, $m_{0,2}$ *и* $m_{1,2}$.

Отметим, что такая «переопределенность» позволяет находить (нелинейные) соотношения между перечисленными в этой теореме моментами.

Аналогичные вычисления иллюстрируют теоремы 1 и 2 в простом случае ($\mathcal{K} = 3$, $N = 2$) (см. [2]), в котором решается обратная задача нахождения треугольника $T \subset \mathbb{R}^2$ с невертикальными ребрами по заданным моментам

$$m_{0,0}, \quad m_{1,0}, \quad m_{2,0}, \quad m_{3,0}, \quad m_{0,1}, \quad m_{1,1}. \tag{12}$$

Пусть уравнения неизвестных сторон треугольника T имеют вид

$$y = g_{00} + xg_{01}, \quad y = g_{10} + xg_{11}, \quad y = g_{20} + xg_{21}.$$

С помощью принципа Кавальери сведем задачу реконструкции T к поискам треугольника T' с горизонтальным основанием и с боковыми сторонами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где $b_1 = g_{00} - g_{20}$, $b_2 = g_{10} - g_{20}$, $k_1 = g_{01} - g_{21}$, $k_2 = g_{11} - g_{21}$. Горизонтальное основание треугольника T' является проекцией третьей стороны треугольника T на ось Ox.

Начнем с поисков четырех неизвестных величин $g_{j0} - g_{20}$, $g_{j1} - g_{21}$, $j = 0, 1$, при известных $m_{0,0}$, $m_{1,0}$, $m_{2,0}$, $m_{3,0}$. Будем обозначать через ξ_1, ξ_2, ξ_3 Ox-координаты также неизвестных вершин T и T' — особенностей кусочно-полиномиальных границ этих треугольников.

Прямые вычисления показывают, что $\dfrac{m_{1,0}}{m_{0,0}} = \dfrac{(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)}{3}$;

$$\frac{6\cdot m_{2,0}}{m_{0,0}} = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_1\xi_2 + \xi_2\xi_3 + \xi_1\xi_3);$$

$$\frac{10 \cdot m_{3,0}}{m_{0,0}} = (\xi_1^3 + \xi_2^3 + \xi_3^3 + \xi_1^2\xi_2 + \xi_1\xi_2^2 + \xi_2^2\xi_3 + \xi_2\xi_3^2 + \xi_1\xi_2\xi_3 + \xi_1^2\xi_3 + \xi_1\xi_3^2).$$

Значит, по моментам $m_{i,0}$, $i = 0, 1, 2, 3$ определяются симметричные функции $\xi_1 + \xi_2 + \xi_3$ и т. п., и, следовательно, неизвестные ξ_1, ξ_2, ξ_3, и $k_1 = g_{01} - g_{21}$ (возможно, комплексные) могут быть найдены с помощью теоремы Виета. Несложно вычисляются и коэффициенты b_1, b_2 и k_2. Таким образом, треугольник T' однозначно определяется набором моментов $m_{0,0}$, $m_{1,0}$, $m_{2,0}$, $m_{3,0}$.

Для реконструкции треугольника T введем обозначения:

$$S_{021} = g_{01} + g_{21} = k_1 + 2g_{21}, \quad S_{020} = g_{00} + g_{20} = b_1 + 2g_{20},$$
$$S_{121} = g_{11} + g_{21} = k_2 + 2g_{21}, \quad S_{120} = g_{10} + g_{20} = b_2 + 2g_{20}.$$

Тогда

$$2m_{0,1} = \int_{x_1}^{x_2} (xk_1 + b_1)(xS_{021} + S_{020})\,dx + \int_{x_2}^{x_3} (xk_2 + b_2)(xS_{121} + S_{120})\,dx,$$
$$2m_{1,1} = \int_{x_1}^{x_2} (xk_1 + b_1)(xS_{021} + S_{020}) \cdot x\,dx + \int_{x_2}^{x_3} (xk_2 + b_2)(xS_{121} + S_{120}) \cdot x\,dx\,.$$

Это порождает систему двух линейных уравнений относительно неизвестных g_{20} и g_{21} — коэффициентов уравнения основания искомого треугольника T. Определитель этой системы находится из соотношения

$$18 \cdot \det(a_{ij}) = -m_{0,0}^2 \cdot [(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_1 - \xi_3)^2],$$

обращается в нуль только в вырожденном случае $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3$, и поэтому треугольник T однозначно восстанавливается по нетривиальному набору моментов (12).

4. Невидимые множества и функции

Рассмотрим пространство $\mathcal{P}_n$ вещественных многочленов $P(x_1, \ldots, x_n)$ и фиксируем в нем семейство $S \subset \mathcal{P}_n$. Будем говорить, что определенная на $\mathbb{R}^n$ функция f является S-невидимой, если $\int_{\mathbb{R}^n} P(x)f(x)\,dx = 0$ для каждого $P \in S$. Область $G \subset \mathbb{R}^n$ называется S-невидимой, если ее характеристическая функция S-невидима. Очевидным образом такие определения могут быть сформулированы и для подмножеств с бо́льшими коразмерностями, и для распределений.

Приведем некоторые примеры невидимых множеств и функций с целью найти взаимосвязи между несколькими на первый взгляд несвязанными проблемами. Основные свойства невидимых объектов, которые нас здесь интересуют, — это их «жесткость» и симметрия.

4.1. *Случай семейства из ядра фиксированного дифференциального оператора*

Пусть $\mathcal{D}$ — фиксированный дифференциальный оператор от n переменных. Обозначим через $S \subset \mathcal{P}_n$ множество всех многочленов $P \in S$, для которых $\mathcal{D}P = 0$.

4.1.1. *Области с нулевой квадратурой*

Рассмотрим случай $\mathcal{D} = \Delta$, когда оператор $\mathcal{D}$ является Лапласианом, и обозначим через S_h соответствующее пространство гармонических полиномов:

$$S_h = \{P \in \mathcal{P}_n,\ \Delta P = 0\}.$$

Область $G \subset \mathbb{R}^n$ будет называться областью с нулевой квадратурой, если $\int_G h\, dx = 0$ для любой гармонической интегрируемой функции h. В случае $h = P \in S_h$ формулируется аналогичное определение S_h-невидимых множеств. Класс таких областей рассматривался во многих публикациях и использовался в обратных задачах теории потенциала, в задачах фильтрации несжимаемой жидкости и в других приложениях (см., например, [14; 15] и цитируемую там литературу).

В качестве примеров областей с нулевой квадратурой можно указать полупространства, внешности эллипсоидов, цилиндров, параболоидов и полос. Известно, что в плоском случае каждая область с нулевой квадратурой принадлежит указанным выше классам областей [16]. Полное описание областей с нулевой квадратурой в евклидовых пространствах бо́льших размерностей остается открытой проблемой.

4.1.2. *Множества, невидимые для решений волновых уравнений*

Рассмотрим двумерный волновой оператор $\mathcal{D} = W = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$. В этом случае множество S_W состоит из многочленов P, имеющих вид $P(x,y) = Q(x) + R(y)$. Функция $f(x,y)$ является S_W-невидимой тогда и только тогда, когда $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)(Q(x) + R(y)) = 0$ для любых многочленов $Q(x), R(y)$, что эквивалентно обращению в нуль всех моментов

$$\int_{\mathbb{R}^2} x^k f(x,y)\, dxdy = \int x^k\, dx \int f(x,y)\, dy \quad \text{и}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} y^l f(x,y)\, dxdy = \int y^l\, dy \int f(x,y)\, dx,$$

а это эквивалентно тождественному равенству нулю функций

$$F(x) = \int f(x,y)\, dy = 0 \quad \text{и} \quad H(y) = \int f(x,y)\, dx = 0.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Утверждение 1. *Функция $f(x,y)$ является S_W-невидимой тогда и только тогда, когда $F(x) = \int f(x,y)\, dy = 0$ при всех x, и $H(y) = \int f(x,y)\, dx = 0$ при всех y. В частности, это имеет место для функций, представленных в виде конечных или бесконечных сумм произведений $\phi(x)\psi(y)$, для которых $\int \phi(x)\, dx = 0$ и $\int \psi(y)\, dy = 0$.*

4.1.3. *Гипотезы В. Жао об обращении в нуль*

В недавних работах [17; 18] В. Жао сформулировал ряд гипотез, связывающих невидимые множества, ядра некоторых дифференциальных операторов и известную проблему якобиана [19].

Для дифференциального оператора $\mathcal{D}$ (в частности, для оператора Лапласа) им были рассмотрены многочлены P, удовлетворяющие условию: $\mathcal{D}^l P^l = 0$, $l = 1, \ldots$ Как было установлено в [17], следующая гипотеза эквивалентна положительному решению проблемы якобиана.

Гипотеза A. *Если для однородного многочлена P степени четыре $\Delta^l P^l = 0$, где $l = 1, 2, \ldots$, то $\Delta^l P^{l+1} = 0$ при $l \gg 1$.*

В той же работе [17] было показано, что $\mathcal{D}^l P^l = 0$ эквивалентно нильпотентности матрицы Гессе $H(P) = (\frac{\partial^2 P}{\partial x_i \partial x_j})$. В работе [18] были установлены тесные связи гипотезы A и следующей гипотезы.

Гипотеза B. *Для компактной области $G \subset \mathbb{R}^n$, положительной меры μ на G и многочлена P если все моменты $\int_G P^k d\mu$ обращаются в ноль, то для любого многочлена q моменты $\int_G P^k q \, d\mu$ обращаются в ноль при $k \gg 1$.*

4.2. *Множества, невидимые для степеней фиксированного многочлена*

Рассмотрим задачу об обращающихся в нуль моментах $\int_G P^k d\mu$, т. е. описание условий невидимости (G, μ) для всех степеней многочлена P. Такие вопросы возникают во многих разделах анализа, алгебры, теории дифференциальных уравнений и в задачах обработки изображений. Некоторые из этих связей будут описаны ниже.

4.2.1. *Одномерный случай*

В случае функций одной переменной наша задача состоит в отыскании многочленов (многочленов Лорана и т. п.) $P(x)$ и $q(x)$, для которых

$$m_k = \int_a^b P^k(x) q(x) \, dx = 0, \quad k = 0, 1 \ldots \tag{13}$$

Такие задачи возникают при исследовании классической проблемы «Центр – Фокус» для уравнения Абеля (см., например, [20; 21]).

Даже в таком простейшем случае к настоящему времени получены только частичные результаты [22], в которых используются весьма тонкие алгебраические свойства кольца многочленов относительно операции суперпозиции. Для формулировки этих результатов нам понадобится «композиционное условие», сформулированное в [23] и изученное впоследствии в [20–22; 24; 25], а также во многих других публикациях.

Определение 2. Определенные на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ гладкие функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют композиционному условию (CC), если существуют гладкая функция $W(x)$, определенная также на $[a, b]$, и две гладкие функции $\tilde{F}$, $\tilde{G}$ такие, что

$$W(a) = W(b), \quad F(x) = \int_a^x f(x) \, dx, \quad G(x) = \int_a^x g(x) \, dx \,,$$

и выполняются соотношения

$$F(x) \equiv \tilde{F}(W(x)), \quad G(x) \equiv \tilde{G}(W(x)), \quad x \in [a, b] \,.$$

Если f и g являются многочленами и удовлетворяют композиционному условию (CC), то W также является многочленом.

С помощью замены переменных из композиционного условия выводится обращение в нуль всех моментов m_k, определенных в (13). Необходимое и достаточное условие обращения в нуль этих моментов для полиномиальных функций $P(x)$, $q(x)$ формулируется в следующей теореме.

Теорема 4 [22]. *Определенные в* (13) *моменты* m_k, $k = 0, 1, \ldots$ *обращаются в нуль,* (*т. е.* $[a, b]$ *невидим для набора* $P^k q$) *тогда и только тогда, когда* $q(x) = q_1(x) + \cdots + q_l(x)$ *при* $l = 1, 2$ *или* 3, *где* $q_1, \ldots, q_l$ *удовлетворяют на* $[a, b]$ *композиционному условию для функции* $P(x)$ *и* (*возможно, различных*) $W_1, \ldots, W_l$.

4.2.2. *Некоторые многомерные примеры*

Напомним определение многомерного композиционного условия (MCC), сформулированного в [26] и позволяющего получить естественное *достаточное* условие обращения в нуль всех моментов. Как мы увидим ниже, в случае размерностей, больших 1, это условие намного сильнее, чем обращение в нуль моментов $m_k = \int_\Omega F^k(x)g(x)\,dx$, $k = 0, 1, \ldots$ Фактически оно связано с обращением в нуль моментов

$$m_\alpha = \int_\Omega F_1^{\alpha_1}(x) \cdot \ldots \cdot F_n^{\alpha_n}(x)g(x)\,dx$$

при всех неотрицательных мультииндексах $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Пусть область Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ открыта и относительно компактна в $\mathbb{R}^n$. Определим сначала для отображения $W : \Omega \to \mathbb{R}^n$ условие, обобщающее на многомерный случай требование $W(a) = W(b)$.

Определение 3 [26]. Непрерывное отображение $W : \Omega \to \mathbb{R}^n$ «уплощает границу» $\partial\Omega$ области Ω, если топологический индекс $W|_{\partial\Omega}$ равен нулю для любой точки $w \in \mathbb{R}^n \setminus W(\partial\Omega)$.

Наглядный смысл этого определения состоит в том, что образ $W(\partial\Omega)$ «не имеет внутренности в» $\mathbb{R}^n$.

Предложение 1 [26]. *Отображение* $W : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *уплощает границу* $\partial\Omega$ *тогда и только тогда, когда для любой функции* $H(W)$ *интеграл* $\int_\Omega H(W(x))\,dW(x)$ *обращается в нуль.*

Пусть теперь функции $F_1, \ldots, F_s$ дифференцируемы в области Ω и мера μ на Ω имеет плотность $g(x)$: $d\mu(x) = g(x)\,dx$.

Определение 4 [26]. Функции F_l, $l = 1, \ldots, s$ и мера μ на Ω удовлетворяют многомерному композиционному условию, если существует гладкое отображение $W : \Omega \to \mathbb{R}^n$, уплощающее границу $\partial\Omega$, и существуют функции $\tilde{F}_l(w)$, $l = 1, \ldots, s$, и $\tilde{g}(w)$ на $\mathbb{R}^n$ такие, что $F_l(x) = \tilde{F}_l(W(x))$, $l = 1, \ldots, s$, и $d\mu(x) = g(x)dx = \tilde{g}(W(x))\,dW$.

Следующее утверждение вытекает из утверждения 1 и показывает, что MCC является достаточным для обращения моментов в нуль.

Утверждение 2. *Если функция* F *и мера* μ *на* Ω *удовлетворяют* MCC, *то все моменты* $m_k = \int_\Omega F^k(x)g(x)dx$, $k = 0, 1, \ldots$ *обращаются в нуль.*

Рассмотрим пример: пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ определена неравенством $P(x) \leq 1$, где $P(x)$ — многочлен, и $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Для каждого $j = 1, \ldots, n$ определим S_j как набор многочленов $S_j = \{Q^n(P)\frac{\partial P}{\partial x_j}\}$, где Q — произвольный многочлен от одной переменной.

Утверждение 3. *При каждом* $j = 1, \ldots, n$ *функция* $Q(P)$ *и мера* $d\mu = \frac{\partial P}{\partial x_j}\,dx$ *на* Ω *удовлетворяют* МСС, *и, следовательно, область* Ω *невидима для* S_j.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим отображение $W : \Omega \to \mathbb{R}^n$ следующим образом: $W(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, где $y_i = x_i$, $i \neq j$, $y_j = P(x_1, \ldots, x_n)$. Значит, W отображает границу $\partial\Omega$ в гиперплоскость $\{y_j = 1\} \subset \mathbb{R}^n$ и потому уплощает эту границу. Далее $Q(P) = \tilde{Q}(W)$, где $\tilde{Q}(y_1, \ldots, y_n) = Q(y_j)$ и

$$d\mu = \frac{\partial P}{\partial x_j}dx = dx_1 \cdots dx_{j-1} \cdot dP \cdot dx_{j+1} \cdots dx_n = dW.$$

Таким образом, МСС выполнено, откуда и следует утверждение 3.

Опишем теперь ситуацию, в которой МСС является необходимым и достаточным для невидимости. Рассмотрим моменты

$$m_{k,l} = \int_{\Omega} P^k(x,y)Q^l(x,y)r(x,y)\,dxdy, \quad k,l = 0,1,\ldots, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2. \tag{14}$$

Будем предполагать, что в рассматриваемой области P удовлетворяет неравенству $\frac{\partial P}{\partial x} \neq 0$ и что область Ω имеет вид $a \leq P(x,y) \leq b,\ c \leq y \leq d$. Будем также предполагать, что функции P, Q, r из (14) вещественно аналитичны и что функция Q имеет единственное критическое значение на каждой линии уровня функции P внутри области Ω.

Теорема 5 [26]. *При выполнении сформулированных выше условий все моменты* $m_{k,l}$, $k, l = 0, 1, \ldots$ *обращаются в нуль тогда и только тогда, когда функции* P, Q *и мера* $r dx$ *в области* Ω *удовлетворяют* МСС.

Таким образом, область Ω, как и выше, S-невидима для состоящего из всех произведений P^kQ^lr набора функций S тогда и только тогда, когда Ω, P, Q, rdx удовлетворяют МСС.

Заключение

В рассматриваемом нами круге задач остаются открытыми несколько важных вопросов.

1. Во всех рассмотрениях мы предполагали, что особые точки дифференциального оператора D находятся за пределами проекции реконструируемой области. Это условие не удовлетворяется при восстановлении полуалгебраических плоских областей общего вида. Их проекции на ось Ox имеют особенности, которые являются также и особенностями дифференциального оператора D, аннигилирующего соответствующие алгебраические функции. Однако описанная в [1] конструкция позволяет проводить процедуру реконструкции и в таких особых случаях (см. также [27]).

2. Оценки робастности. Важным параметром в построении процедуры реконструкции (ненулевой) D-финитной функции f является максимальное количество μ ее начальных моментов, которые могут обращаться в нуль (см. раздел 2.1). Основной вопрос здесь состоит в нахождении *всех* моментов функции f, по первым ее известным μ моментам. По-видимому, этот круг задач окажется в центре нахождения оценок робастности процедуры реконструкции, поскольку через в терминах этих μ первых моментов функции f можно оценивать ее норму. Эта проблематика связана также и с анализом периодических решений уравнения Абеля (см. [21]).

Список литературы

1. *Batenkov D.* Moment Inversion Problem for Piecewise d-Finite Functions // Inverse Problems. 2009. Vol. 25. Is. 10:105001, October.

2. *Батенков Д. В., Голубятников В. П., Иомдин И. Н.* Об одной нелинейной задаче восстановления области с особенностями на границе по конечному набору моментов // Сборник трудов кафедры математического анализа Горно-Алтайского государственного университета. Горно-Алтайск. 2010. Т. 2. С. 17–23.

3. *Батенков Д. В., Голубятников В. П., Иомдин И. Н.* О восстановлении эллиптической кривой по конечному набору моментов // Материалы школы-конференции по геометрическому анализу. Горно-Алтайск, 2011. С. 14–17.

4. *Batenkov D., Yomdin Y.* Algebraic Fourier Reconstruction of Piecewise Smooth Functions // Mathematics of Computation. 2012. Vol. 81. P. 277–318.

5. *Ayupova N. B., Golubyatnikov V. P., Pickalov V. V., Kazantzev D. I.* Considerations of Iterative Algorithms for Fan-Beam Tomography Scheme // Proc. 4$^{\text{th}}$ World Congress on Industrial Tomography. Aizu, 2005. Vol. 2. P. 687–690.

6. *Golub G. H., Gustafsson B., Milanfar P., Putinar M., Varah J.* Shape Reconstruction from Moments: Theory, Algorithms and Applications // SPIE Proc. Advanced Signal Processing, Algorithms, Architecture and Implementations X / Ed. by F. T. Luk. 2000. Vol. 4116. P. 406–416.

7. *Golubyatnikov V. P.* Uniqueness Questions in Reconstruction of Multidimensional Objects from Tomography-Type Projection Data. Utrecht: VSP, 2000.

8. *Golubyatnikov V. P., Ayupova N. B.* Multidimensional Cone-Beam Tomography Algorithm // The Journal of 3-Dimensional Images. 2000. Vol. 14. No. 2. P. 88–93.

9. *Gustafsson B., He C., Milanfar P., Putinar M.* Reconstructing Planar Domains from their Moments // Inverse Problems. 2000. Vol. 16. No. 4. P. 1053–1070.

10. *Пикалов В. В., Голубятников В. П., Казанцев Д. И.* Обобщения теоремы о центральном сечении на задачу веерной томографии // Вычислительные методы и программирование. 2006. Т. 7. С. 180–184.

11. *Batenkov D., Sarig N., Yomdin Y.* An “Algebraic” Reconstruction of Piecewisw-Smooth Functions from Integral Measurements // Proc. of Sampling Theory and Applications (SAMPTA). 2009, arXiv:09014659.

12. *Sarig N., Yomdin Y.* Signal Acquisition from Measurements via Non-Linear Models // C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada. 2007. Vol. 29. No. 4. P. 97–114.

13. *Prony R.* Essai Experimental et Analytique // J. Ec. Polytech (Paris). 1795. Vol. 2. P. 24–76.

14. *Karp L.* On Null Quadrature Domains // Comput. Methods Funct. Theory. 2008. Vol. 8. No. 1–2. P. 57–72.

15. *Karp L.* Global Solutions to Bubble Growth in Porous Media // J. Math. Anal. Appl. 2011. Vol. 382. No. 1 P. 132–139.

16. *Sakai M.* Null Quadrature Domains // J. Analyse Math. 1981. Vol. 40. P. 144–154.

17. *Zhao W.* A Vanishing Conjecture on Differential Operators with Constant Coefficients // Acta Math. Vietnam. 2007. Vol. 32. No. 2–3. P. 259–286.

18. *Zhao W.* Generalizations of the Image Conjecture and the Mathieu Conjecture // J. Pure Appl. Algebra. 2010. Vol. 214. No. 7. P. 1200–1216.

19. *Bass H., Connel E., Wright D.* The Jacobian Conjecture, Reduction of Degree and Formal Expansion of the Inverse // Bull. Amer. Math. Soc. 1982. Vol. 7. P. 287–330.

20. *Briskin M., Francoise J.-P., Yomdin Y.* Center Conditions, Compositions of Polynomials and Moments on Algebraic Curve // Ergodic Theory Dyn. Syst. 1999. Vol. 19. No. 5. P. 1201–1220.

21. *Briskin M., Roytvarf N., Yomdin Y.* Center Conditions at Infinity for Abel Differential Equation // Annals of Math. 2010. Vol. 172. No. 1. P. 437–483.

22. *Muzychuk M., Pakovich F.* Solution of the Polynomial Moment Problem // Proc. Lond. Math. Soc. 2009. doi: 10.1112/plms/pdp010.

23. *Alwash M. A. M., Lloyd N. G.* Non-Autonomous Equations Related to Polynomial Two-Dimensional Systems // Proc. of the Royal Society of Edinburgh. 1987. Vol. 105A. P. 129–152.

24. *Pakovich F.* On Rational Functions Orthogonal to all Powers of a Given Rational Function on a Curve // Preprint, available on `www.math.bgu.ac.il/~pakovich`.

25. *Pakovich F., Roytvarf N., Yomdin Y.* Cauchy Type Integrals of Algebraic Functions // Isr. J. of Math. 2004. Vol. 144. P. 221–291.

26. *Francoise J.-P., Pakovich F., Yomdin Y., Zhao W.* Moments Vanishing Problem and Positivity: Some Examples // Bull. Sci. Math. France. 2011. Vol. 135. No. 1. P. 10–32.

27. *Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Сообщения по вычислительной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1981. С. 1–64.

Материал поступил в редколлегию 26.01.2012

Адреса авторов

БАТЕНКОВ Дмитрий Владимирович
Вейцмановский институт, отдел математики
Реховот, 76100, Израиль
e-mail: dima.batenkov@weizmann.ac.il

ГОЛУБЯТНИКОВ Владимир Петрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
пр. Акад. Коптюга, 4, Новосибирск, 630090, Россия
e-mail: glbtn@math.nsc.ru

ИОМДИН Иосиф Ноахович
Вейцмановский институт, отдел математики
Реховот, 76100, Израиль
e-mail: Yosef.Yomdin@weizmann.ac.il