УДК 371.30

В. Д. Алешин, А. Ю. Демидко,
Ю. В. Михеев, А. А. Никитин

Государственное научное учреждение
Институт педагогических исследований детей РАО
ул. Приморская, 22, Новосибирск, 630098, Россия
E-mail: edusoft@ngs.ru

ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ И КОММУНИКАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ШКОЛЬНОГО КУРСА СТЕРЕОМЕТРИИ*

Опыт вступительных экзаменов в вузы свидетельствует о том, что для многих абитуриентов «камнем преткновения» являются стереометрические задачи. Даже относительно простые задачи для большинства поступающих оказываются недоступными. Объяснить это можно тем, что зрительное восприятие окружающей действительности по отношению к геометрическим объектам не всегда соответствует тем закономерностям, которыми этот объект обладает. Более того, отображение наших восприятий относительно пространственных фигур в виде чертежа на листе бумаги приводит к тому, что очень многие закономерности представляются в искаженном виде. Например, скрещивающиеся прямые могут выглядеть как пересекающиеся или как параллельные прямые, прямой угол может выглядеть как острый или тупой угол, равные отрезки могут выглядеть как отрезки разной длины, и т. д. В реальной жизни этот недостаток компенсируется тем, что человек в процессе своего развития приучается зрительно распознавать закономерности, присущие геометрическим объектам, но достигается это, скорее всего, за счет наблюдений над объектами, находящимися в движении. Это позволяет рассматривать отдельные детали пространственных фигур с разных точек зрения, сопоставлять с накопленным опытом, а в итоге приходить к некоторым правильным конкретным выводам. С математической точки зрения такими выводами могут быть, например, равенство каких-то отрезков или углов, параллельность или перпендикулярность каких-то прямых, и т. д. В итоге, если при работе над стереометрическими задачами используются плоские чертежи, сделанные на бумаге или на доске, то при этом возникают объективные трудности, связанные с поиском необходимых закономерностей на основе схематического чертежа, который отражает далеко не все особенности пространственных фигур.

В большинстве стереометрических задач при геометрических подходах к решению набольшую трудность представляет начальный этап. Этот этап чаще всего основан на некоторой геометрической конструкции, получающейся путем проведения некоторых дополнительных линий и приводящей к цепочке вычислительных задач, которые позволяют получить ответ на поставленный в задаче вопрос. При этом важно осознавать, что все дополнительные построения выполняются не произвольно, а в соответствии с теми закономерностями, которые изучаются в теоретической части школьного курса стереометрии. Как правило, ученик, накопивший некоторый опыт решения стандартных математических задач, после возникновения нужной геометрической конструкции далее уже не испытывает особых затруднений.

Таким образом, одна из проблем в изучении стереометрии связана с тем, что трехмерные объекты при решении задач приходится изображать на плоском чертеже. Как уже было сказано, на таком чертеже изображения элементов пространственных фигур могут выглядеть искаженно и не соответствовать действительности. Более того, некоторые важные для решения задачи линии или точки могут оказаться на чертеже слишком близкими или совпадающими. Другие важные точки могут попасть за край

* Работа выполнена при финансовой поддержке РГНФ (грант № 07-06-00764а).

ISSN 1818-7889. Вестник НГУ. Серия: Педагогика. 2007. Том 8, выпуск 2

листа бумаги. Кроме того, при работе на бумаге трудно без следа стереть ненужную или неудачно проведенную линию. Наконец , взгляд на плоский чертеж с разных сторон дает примерно одинаковое восприятие.

Электронный учебно-методический комплекс (ЭУМК) «Стереометрия» создавался как вспомогательный инструмент для изучения стереометрии, позволяющий осуществлять пространственные построения на экране компьютера с возможностями перемещений или поворотов изображения, и тем самым облегчающий приобретение навыков решения стереометрических задач на самой трудной начальной стадии решения.

Первый вариант аналогичной компьютерной программы был создан Ю. В. Михеевым на заре компьютеризации для компьютеров Ямаха на языке Basic. Возможности этого компьютера позволяли вставлять в программу только 4–5 задач, причем каждую из задач в запрограммированной форме. Второй вариант программы был создан в 1992 г. Ю. В. Михеевым, А. В. Овчинниковым, Г. Б. Чернецовой. Эта версия программы была написана на языке Си и предназначена для компьютеров IBM PC-386. Задачник программы содержал уже около 200 задач, разбитых на шесть основных разделов: пересечение прямой с многогранником, построение сечений многогранников, угол между плоскостями, угол между прямой и плоскостью, построение перпендикуляра к плоскости, сложные задачи на перпендикулярность, задачи повышенной трудности. К недостаткам этой программы, с современной точки зрения, можно отнести плохо разработанный сервис: отсутствие возможности работы с мышью, неудобное меню, несовместимость с последующими моделями компьютеров, а также технически сложные и ограниченные возможности для пополнения банка задач.

Новая версия ЭУМК «Стереометрия» сначала была написана на языке C++Builder. Затем этот вариант был переведен на язык Java с использованием библиотеки OpenGL, и в настоящее время представляет собой связанную совокупность клиентской и серверной частей. Клиентская часть программы сохраняет все, что было возможно при выполнении старых версий программы. В этой части программы предусмотрен целый ряд существенных дополнительных возможностей, в частности, возможность работы с мышью и более современное меню в стиле Windows. Предусмотрена также возможность экспорта текущего состояния

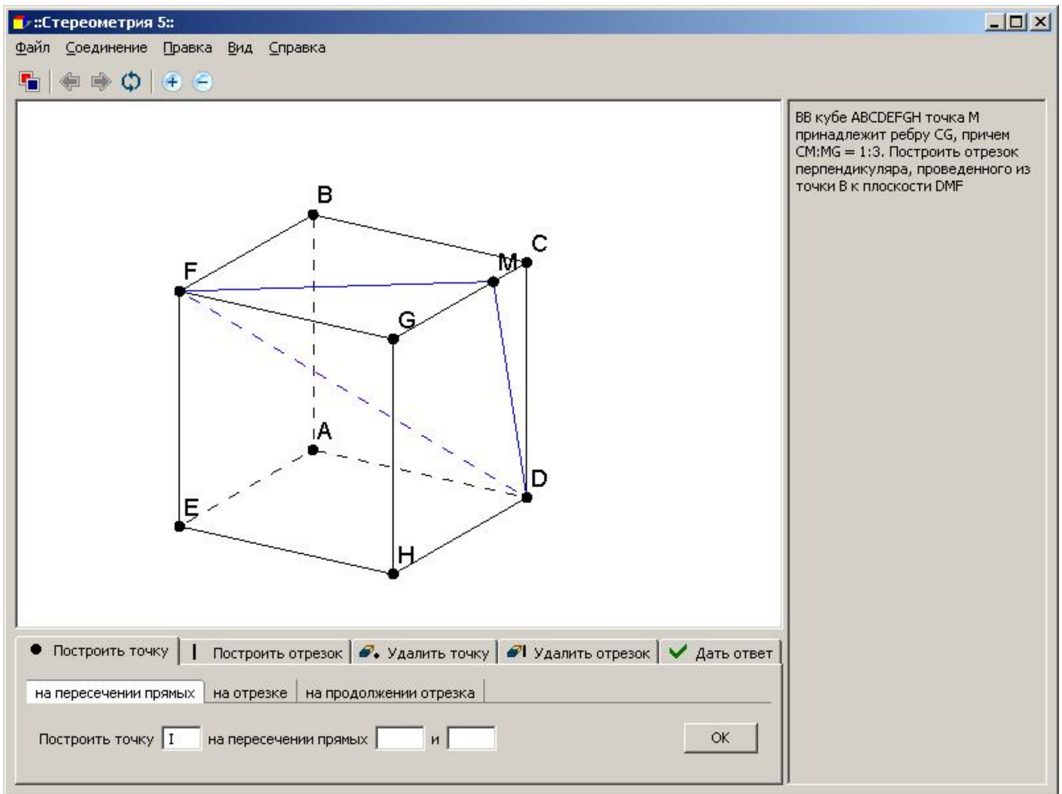


Рис. 1. Рабочий стол ученика

чертежа в графический файл, что удобно для создания иллюстраций к текстам или презентациям. В частности, большинство рисунков настоящей статьи выполнено при помощи экспорта изображения из клиентской части ЭУМК «Стереометрия».

При запуске клиентской части программы на экране компьютера слева вверху расположена строка панели меню, ниже расположена панель для чертежа, справа – панель для текста задачи, слева внизу остается место для появления дополнительных панелей меню (рис. 1). Меню продублировано пиктограммами и горячими клавишами. Выбрав в меню кнопку «Файл», можно либо загрузить локальную задачу, либо задачу с сервера. В первом случае нужно на появившейся вкладке выбрать конкретный раздел задачника и в этом разделе конкретную задачу. Во втором случае нужно выбрать одну из задач из предложенного на сервере списка. После выбора конкретной задачи на экране появляется условие задачи и исходный чертеж и становятся доступными кнопки меню, позволяющие перейти к поиску решения задачи.

Наиболее важной новой чертой программы является генератор задач, который позволяет учителю (или ученику) простыми и наглядными средствами на свой вкус пополнять список задач и добавлять новые разделы. Тем самым число задач, доступных для решения с помощью программы, может постоянно увеличиваться, в зависимости от потребностей пользователя (рис. 2).

При создании новой задачи при помощи генератора задач можно задавать все вершины и ребра вручную, а можно начать построение с автофигуры (куб, призма, треугольная или четырехугольная пирамида) и вручную добавить лишь дополнительно заданные на этой фигуре точки. Цвета построенных отрезков определяются пользователем. Для того чтобы невидимые линии рисовались пунктиром, надо в редакторе задач все грани фигуры задать прозрачными. Можно также облегчить себе работу, если найти среди имеющихся задач похожую, открыть ее, а затем внести необходимые изменения. Очень удобной и полезной оказывается возможность формирования ответа в новой задаче прорешиванием ее при помощи программы, а не с помощью получения ответа на бумаге.

Клиентская часть программы может запускаться либо в автономном, тренировоч-

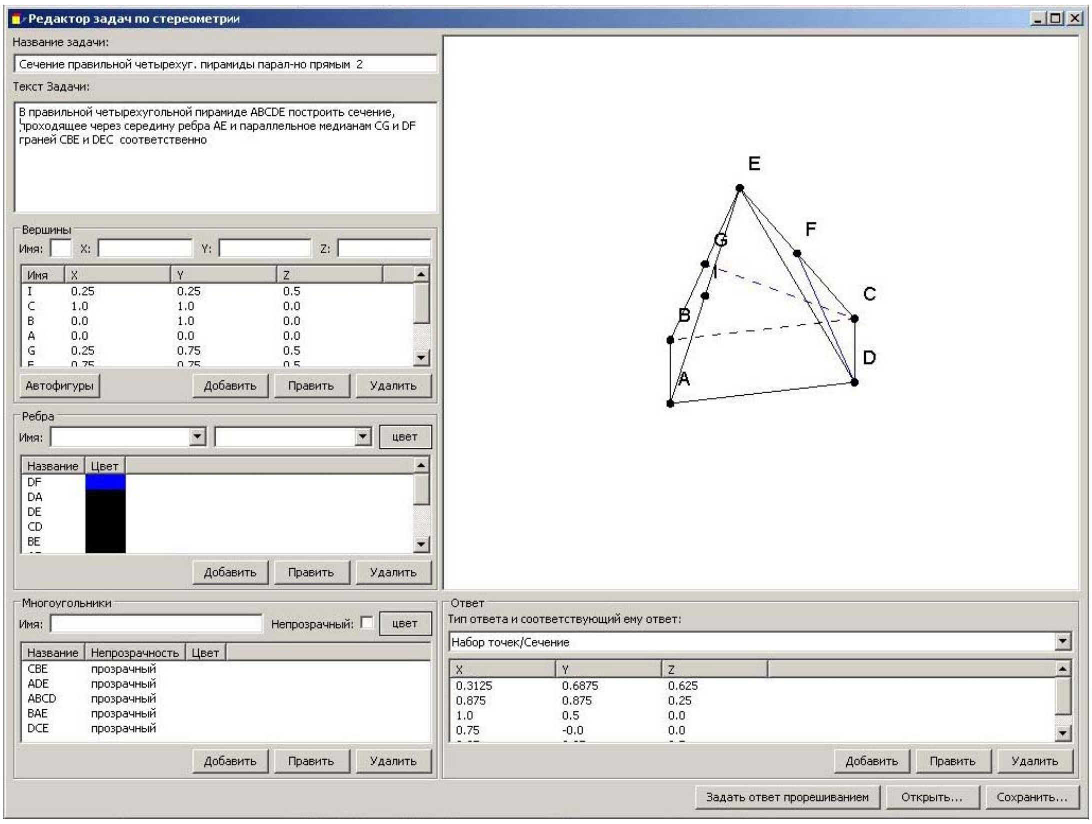


Рис. 2. Редактор задач

ном режиме, либо после подключения к серверу – в режиме контрольной работы. В первом случае ученик решает задачи по своему выбору из комплекта задач, приложенных к клиентской части. Результаты его работы фиксируются в файле log.txt, так чтобы ученик сам мог оценить результаты своей работы.

Во втором случае ученик подключается к серверу и решает задачи из набора, предложенного преподавателем для данной контрольной работы из числа задач, хранящихся на сервере. При этом создается, а затем и сохраняется на сервере, подробный протокол всех действий пользователя в процессе работы над каждой из задач. Обращение к такому протоколу позволяет в любой момент времени оценивать качество выполненной работы с учетом и возможных ошибочных попыток.

Серверная часть программы предназначена для работы преподавателя. Она позволяет сформировать список групп (классов), а в каждой из групп – список клиентов (учеников), которые смогут в дальнейшем подключаться к серверу для выполнения конт-рольных работ (рис. 3).

У серверной части программы может быть сформирована своя база данных задач, лишь частично пересекающаяся с тренировочными задачами, доступными в клиентской версии.

Преподаватель после запуска серверной части программы производит настройку сервера – формирует список задач, предлагаемых ученикам в качестве контрольной работы. Задачи для этого списка могут браться из числа тренировочных задач либо из базы задач, имеющейся только на сервере. После формирования списка задач производится запуск сервера, и он становится доступным для клиентов (учеников).

Результаты работы всех участвующих в контрольной работе учеников наблюдаются преподавателем на сервере. При этом учитель имеет возможность отслеживать не только суммарные итоги работы каждого ученика, но и в реальном режиме времени получать информацию о текущей работе каждого ученика в виде протокола всех действий (как удачных, так и неудачных), которые были предприняты учеником в процессе решения выбранной задачи. При желании можно ознакомиться с текущим состоянием чертежа. Используя этот режим, учитель со своего рабочего места может контролировать весь учебный процесс.

После окончания контрольной работы учитель может просмотреть результаты работы учеников с желаемой степенью детализации и выставить им оценки.

В процессе разработки сценария было установлено, что при решении большинства стереометрических задач, имеющих отно-

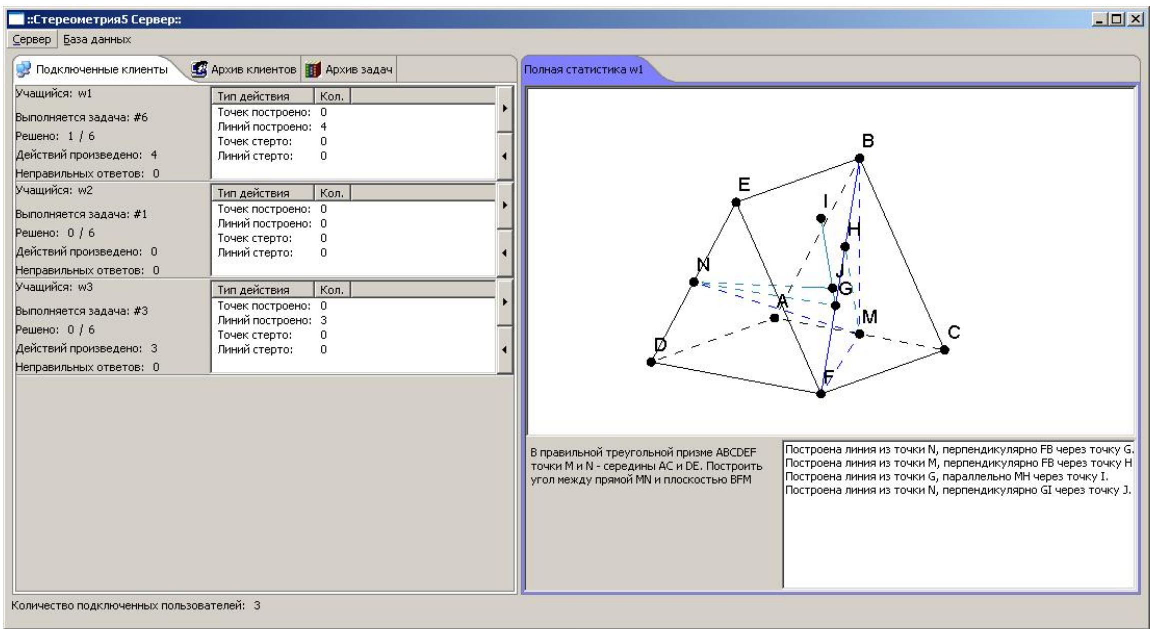


Рис. 3. Рабочий стол учителя

шение к многогранникам, при выполнении геометрических конструкций достаточно применять всего два режима: строить прямые и отмечать точки пересечения прямых. Поэтому для формирования ответа при решении задач с помощью ЭУМК «Стереометрия» предусмотрено выполнение следующих элементарных действий: строить или стирать точку, строить или стирать отрезки прямых, строить многоугольник по его вершинам. Указанные действия реализуются путем применения одного из следующих режимов, позволяющих построить:

– точку пересечения двух прямых;

– точки пересечения некоторой прямой со всеми прямыми, имеющимися на чертеже;

– точку на отрезке, делящую его в заданном рациональном отношении;

– точку на продолжении отрезка, находящуюся от его конца на расстоянии, пропорциональном длине отрезка с рациональным коэффициентом пропорциональности;

– отрезок прямой, соединяющий две заданные точки;

– отрезок прямой с одним из концов в данной точке, который параллелен данной прямой;

– отрезок прямой с одним из концов в данной точке, который перпендикулярен данной прямой (перпендикуляр к прямой);

– отрезок луча, представляющий биссектрису данного плоского угла.

Названия точек при построениях могут быть введены с клавиатуры, а могут быть внесены при помощи клика по правой кнопке мыши в момент, когда курсор мыши подведен к нужной точке.

Ответом в задаче могут быть точка, отрезок, угол или многоугольник. Это означает, что, выбрав соответствующий пункт в меню, можно ввести ответ задачи в виде одной из выше перечисленных геометрических фигур, обозначенной названиями точек из числа точек, имеющихся на чертеже. Программа анализирует введенный вариант на правильность ответа и выдает соответствующее сообщение. При этом для получения верного ответа неважно, какой правильный способ решения выбран.

Процесс поиска решения выбранной задачи с помощью ЭУМК «Стереометрия» представляет собой последовательное применение одного из перечисленных выше режимов. Приведем описание конкретных действий, которые в связи с этим приходится выполнять.

1. Чтобы построить точку пересечения двух прямых, необходимо ввести их обозначения. При этом нужная прямая может обозначаться любыми двумя различными точками этой прямой из числа имеющихся на чертеже. В случае когда обозначение некоторой прямой вводится некорректно, программа выдает соответствующее сообщение.

После ввода данных программа производит анализ и либо строит их точку пересечения, либо выдает сообщение, по каким причинам такое построение не реализуемо (прямые скрещивающиеся, параллельны, совпадают).

2. Чтобы построить точку X на отрезке AB, необходимо ввести обозначение отрезка и отношение в виде m/n, которому равно отношение AX/XB. При этом концы отрезка должны существовать на чертеже и быть различными точками, а числа m и n должны быть натуральными.

3. Чтобы построить точку X на продолжении отрезка AB, необходимо ввести обозначение отрезка и отношение в виде m/n, которому равно отношение AX/AB. При этом концы отрезка должны существовать на чертеже и быть различными точками, а числа m и n должны быть натуральными, причем $m > n$.

4. Чтобы построить прямую, параллельную данной, а точнее, отрезок такой прямой, сначала необходимо ввести обозначение точки, через которую проводится нужная прямая, а затем любые две точки на прямой, параллельно к которой строится искомая прямая.

5. Чтобы построить отрезок перпендикуляра к прямой, необходимо ввести обозначение точки, из которой проводится перпендикуляр, и любые две точки на прямой, к которой проводится перпендикуляр.

Отметим, что в данном ЭУМК не предусмотрено построение перпендикуляра к прямой, который проходит через точку этой прямой, потому что такое построение чаще всего приводит к некоторой неопределенности. Однако это ограничение является несущественным при решении конкретных задач.

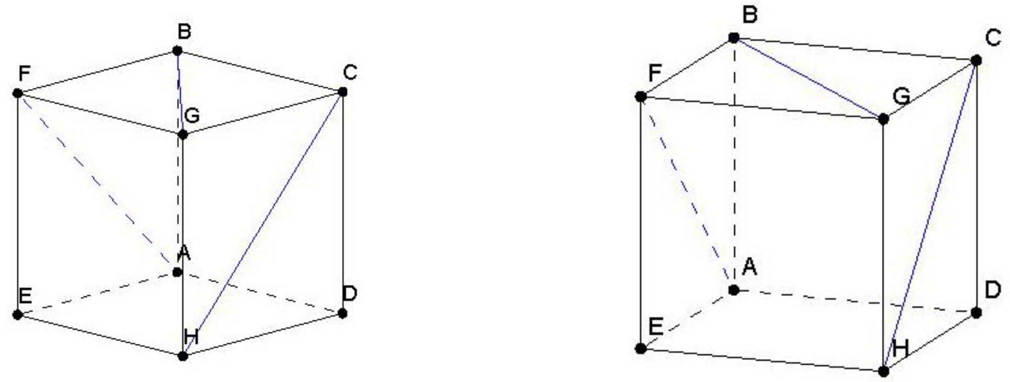
6. Чтобы построить биссектрису плоского угла, достаточно ввести обозначение этого угла.

Отметим, что в программе предусмотрено построение биссектрисы плоского угла, величина которого заключена в пределах от 0° до 180°, что также не является существенным ограничением допустимых возможностей, связанных с применением этого режима.

В процессе выполнения указанных действий исходный чертеж преобразуется за счет добавления новых точек, отрезков или прямых. Иногда чертеж может оказаться неудобным (рис. 4, 5).

полненные построения аннулируются. Работают также кнопки «Шаг назад» и «Шаг вперед» (пиктограммы «Стрелка влево» и «Стрелка вправо» соответственно)

Применение ЭУМК «Стереометрия» к решению задач непосредственно связано с использованием закономерностей трехмерного пространства. Поэтому теоретическую основу для работы с программой «Стереометрия» составляет тот учебный материал, который изучается в соответствии со школьным курсом стереометрии:

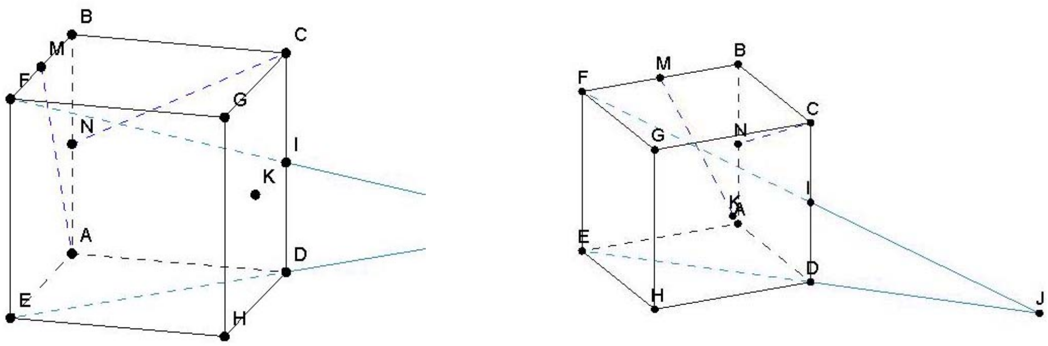


а

Рис. 4: *а* – сливающиеся линии *AB* и *GH*;

б

б – после поворота линии уже не сливаются



а

Рис. 5: *а* – построенная точка *J* оказалась вне чертежа;

б

б – после поворота точка *J* уже внутри чертежа

В таком случае предусмотрены возможности видоизменения чертежа. В любой момент решения задачи можно покрутить исходную фигуру вокруг одной из координатных осей. Для этого нужно, зажав левую кнопку мыши, перемещать курсор мыши вправо-влево или вверх-вниз.

Можно также изменять масштаб и выполнять некоторые перемещения изображения.

Если на некотором этапе обнаружится, что Вас не удовлетворяет текущий ход решения, то можно выбрать пункт меню «Начать заново», при этом восстанавливается начальный чертеж к задаче, а все ранее вы-

– аксиомы стереометрии, отражающие основные свойства взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве;

– определения параллельности прямых в пространстве, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

– определения перпендикулярности прямой и плоскости, расстояния от точки до плоскости, угла между плоскостями, угла между прямой и плоскостью;

– признаки параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей;

– признаки перпендикулярности прямой и плоскости, перпендикулярности плоскостей;

– теорема о трех перпендикулярах.

На основе перечисленных свойств с помощью возможностей ЭУМК «Стереометрия» удается реализовать решение задач по всем принципиальным направлениям школьного курса стереометрии. Укажем эти направления и приведем некоторые примеры.

I. Начальный этап изучения стереометрии относится к определению взаимного расположения точек, прямых и плоскостей в пространстве. Для этого нужно освоиться с решением задач следующего вида:

– найти пересечение данных прямых;

– найти пересечение данной прямой с данной плоскостью;

– найти пересечение данных плоскостей.

Решение всех перечисленных задач основывается на аксиомах стереометрии и на простейших следствиях из них.

Прежде всего, при нахождении точки пересечения двух прямых следует очень четко представлять, что в пространстве пересекаются только такие прямые, которые лежат в одной плоскости и не параллельны.

Далее, нахождение прямой пересечения двух плоскостей на основании аксиом сводится к нахождению двух различных общих точек этих плоскостей. Часто такие точки находятся непосредственно на чертеже. В противном случае общие точки двух плоскостей находятся как точки пересечения некоторых прямых, расположенных в этих плоскостях.

Наиболее трудной для начинающих является задача на нахождение точки пересечения прямой с плоскостью. При решении задач такого вида важно изучить некоторые конструкции, которые позволяют сводить построение общей точки прямой и плоскости к нахождению точки пересечения некоторых двух прямых. Одна из таких конструкций основана на том, что для реализации указанного построения мы сами выбираем некоторую дополнительную плоскость, содержащую заданную прямую, затем находим прямую пересечения двух плоскостей, после чего искомая точка получается как общая точка данной прямой и прямой пересечения плоскостей.

Пример 1. В кубе *ABCDEFGH* точки *M*, *N* и *K* – середины ребер *FG*, *DH*, *CD*. Построить точку пересечения отрезка *AG* с плоскостью *MNK*.

Решение. Выделим плоскость *AFGD*, которая содержит прямую *AG* (рис. 6). Затем построим пересечение плоскостей *MNK* и *AFGD*. Для этого, прежде всего, заметим, что точка *M* является их общей точкой. Для

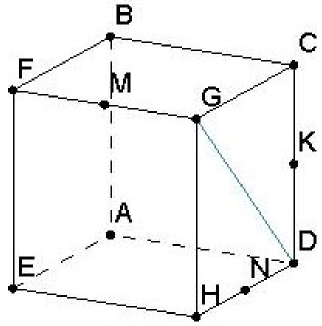


Рис. 6

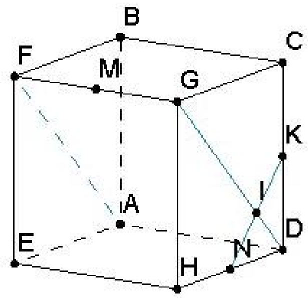


Рис. 7

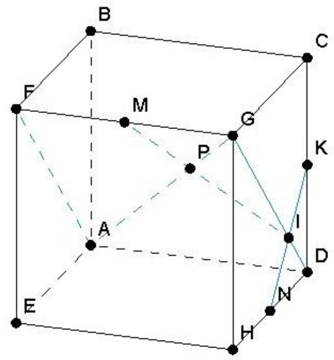


Рис. 8

получения другой общей точки этих плоскостей рассмотрим прямые пересечения данных плоскостей с плоскостью грани *CGHD*. Нетрудно понять, что плоскости *AFGD* и *CGHD* пересекаются по прямой *AG*, плоскости *MNK* и *CGHD* пересекаются по прямой *NK*, а поэтому точка *F* пересечения прямых *AG* и *NK* также является общей точкой плоскостей *CGHD* и *MNK* (рис. 7). После этого находим точку *P* пересечения прямых *AG* и *MF*, которая и является искомой точкой (рис. 8). Для обоснования итога достаточно осознать, что точка *P* лежит на прямой *AG*, так как мы находим пересечение этой прямой с некоторой другой прямой, и точка P находится в плоскости MNK, так как является одной из точек прямой пересечения плоскости MNK с плоскостью $AFGD$.

Заметим, что данную задачу можно решить аналогичным способом, выбирая и другую плоскость, содержащую прямую AG, например плоскость $AEGC$. Однако при этом процесс решения станет более громоздким.

Перечисленные в начале этого пункта задачи имеют непосредственное отношение к решению задач на построение сечений многогранников плоскостями, проходящими через три заданные точки, что также целесообразно рассматривать на начальном этапе изучения стереометрии. В задачах такого вида сначала желательно обращать внимание на плоскости граней многогранника и смотреть, в какой из них расположено две из указанных точек секущей плоскости. Если такая грань имеется, то можно рассмотреть прямую, проходящую через эти две точки, и точки ее пересечения с другими прямыми в плоскости грани. Если такой грани нет, то задача существенно усложняется.

Пример 2. В кубе $ABCDEFGH$ точки M, N и K расположены на ребрах EF, CG, AD соответственно так, что $EM = MF$, $CN : NG = 1 : 2$, $AK : KD = 1 : 3$. Построить сечение куба плоскостью MNK.

Решение. Заметим, что в этом случае нет ни одной плоскости грани куба, в которой содержались бы две из заданных точек сечения. Чтобы изменить указанную ситуацию, будем искать дополнительную точку секущей плоскости, принадлежащую одной из граней куба, на которых уже имеется одна точка сечения. Например, построим точку пересечения прямой MN с плоскостью грани $ABCD$. Для этого на ребре AB построим точку I на ребре AB так, что $AI : BI = EM : FM = 1$. Вспомогательная плоскость $MICG$ содержит прямую MN и пересекает плоскость грани $ABCD$ по прямой IC. Поэтому точка J пересечения прямых MN и EC является точкой секущей плоскости, которая находится в плоскости грани $ABCD$ (рис. 9). Получив две общие точки секущей плоскости с плоскостью $ABCD$, строим точки S, P и T пересечения прямой JK с прямыми BC, CD и AB (рис. 10). После этого в плоскости грани $AEFB$ находим точки Q и U пересечения прямой MT с прямыми AE и BF, в плоскости грани $BFGC$ находим точку R пересечения прямых NS и FG (рис. 11). Многоугольник $MRNPKQ$ является искомым сечением куба плоскостью MNK.

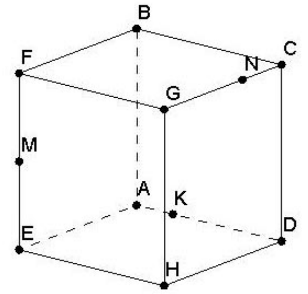


Рис. 9

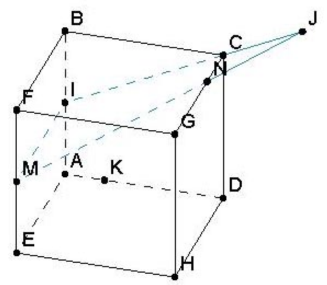


Рис. 10

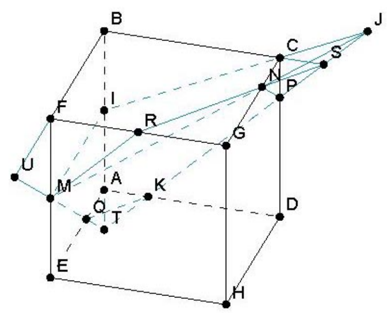


Рис. 11

II. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению параллельности в пространстве. Для этого нужно освоиться с определениями параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей и с решением задач следующего вида:

– построить прямую, которая проходит через данную точку и параллельна данной прямой;

– построить плоскость, которая проходит через две данные точки и параллельна данной прямой;

– построить плоскость, которая проходит через данную точку и параллельна двум данным прямым;

– построить плоскость, которая проходит через данную точку и параллельна данной плоскости.

Решение всех перечисленных задач основывается на определениях параллельности, свойствах параллельности и в особенности на признаках параллельности прямых, параллельности прямой и плоскости, параллельности плоскостей.

При построении прямой, параллельной заданной прямой, всегда важно представлять, что это построение выполняется в некоторой плоскости. Поэтому такое построение чаще всего осуществляется построением какого-то параллелограмма или трапеции.

Построение плоскости, параллельной заданной прямой, чаще всего основывается на признаке параллельности, что позволяет сводить требуемое построение к проведению некоторых прямых, параллельных другим прямым.

Пример 3. В правильной четырехугольной пирамиде *SABCD* точки *M*, *N*, *K* – середины ребер *SA*, *SB*, *SC*. Построить сечение пирамиды плоскостью, которая проходит через точку *M* и параллельна прямым *CN* и *DK*.

Решение. Сначала построим прямую, которая проходит через точку *M* и параллельна прямой *CN*. Для этого рассмотрим плоскость *MNCD*, которая содержит прямую *CN* и точку *M*. Так как четырехугольник *MNCD* является трапецией, у которой основание *MN* в два раза меньше основания *CD*, то, построив середину *F* отрезка *CD*, получим $MF \parallel CD$, потому что четырехугольник *MNCF* – параллелограмм (рис. 12). Отметим, что любая плоскость, проходящая через прямую *MF,* по соответствующему признаку будет параллельна прямой *CD*. Затем через точку *F* проводим прямую, параллельную прямой *DN*. Для этого достаточно отметить середину *L* отрезка *CK* и рассмотреть прямую *FL* (рис. 13). На основании указанного признака плоскость *MFL* является искомой, так как содержит прямые *MF* и *FL*, которые параллельны прямым *CN* и *DK* соответственно. Завершить построение сечения проще всего, если воспользоваться тем, что секущая плоскость параллельна прямой *CN*, а поэтому пересекает плоскость грани *SBC* по прямой, которая параллельна *CN*, что следует из свойства прямой, параллельной плоскости. Поэтому в плоскости грани *SBC* строим прямую, параллельную *CN*, и находим точки *H* и *P* ее пересечения с прямыми *BC* и *SB* (рис. 14). Остается в плоскости грани *ABCD* найти точку *T* пересечения прямой *FH* с ребром *AD* и получить

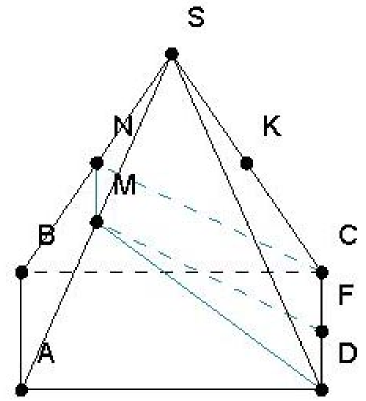


Рис. 12

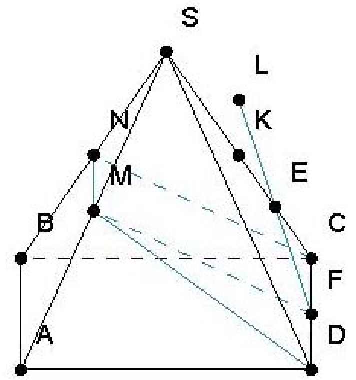


Рис. 13

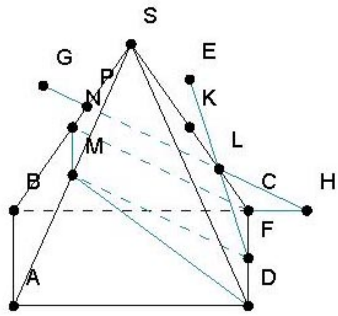


Рис. 14

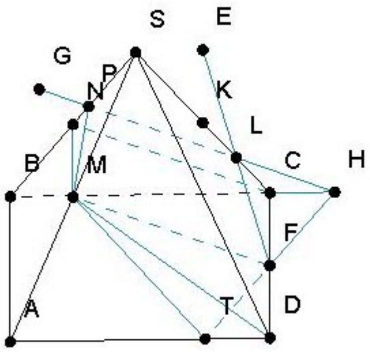


Рис. 15

искомое сечение – пятиугольник *MPLFT* (рис. 15).

Умения находить точки пересечения прямых и плоскостей, а также производить построения параллельных прямых и плоскостей служат основой для решения практически всех стереометрических задач.

III. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве. Для этого нужно освоиться с определением перпендикулярности прямой и плоскости, признаком перпендикулярности и с решением задач следующего вида:

– построить перпендикуляр из данной точки к данной плоскости;

– имея некоторый перпендикуляр к данной плоскости, построить другой перпендикуляр к этой плоскости, проведенный из данной точки.

Наиболее трудным является первое из указанных построений. Рассмотрим один из возможных подходов.

Сначала выделяем важный частный случай. Пусть точка *A* находится в плоскости β, которая перпендикулярна плоскости α. Тогда построение перпендикуляра из точки *A* к плоскости α сводится к построению перпендикуляра из точки *A* к прямой пересечения плоскостей α и β, т. е. к построению в плоскости β перпендикуляра к этой прямой (свойство взаимно перпендикулярных плоскостей).

С учетом этого частного случая остальные случаи построения перпендикуляра к плоскости можно пытаться сводить к указанной конструкции. Для этого следует научиться строить взаимно перпендикулярные плоскости. Один из способов построения таких плоскостей основан на построении плоскости, перпендикулярной прямой пересечения двух плоскостей или, что почти одно и то же, перпендикулярной ребру одного из двугранных углов, образуемых при пересечении плоскостей. Построенная таким образом плоскость одновременно перпендикулярна к граням этого угла.

Пример 4. В кубе *ABCDEFGH* точки *M* и *N* – середины ребер *CG* и *AD*. Построить отрезок перпендикуляра из точки *B* к плоскости *FMN*.

Решение. Сначала построим прямую *WN* пересечения плоскости *FMN* с плоскостью грани *ABCD* (рис. 16). Затем из точки *B*

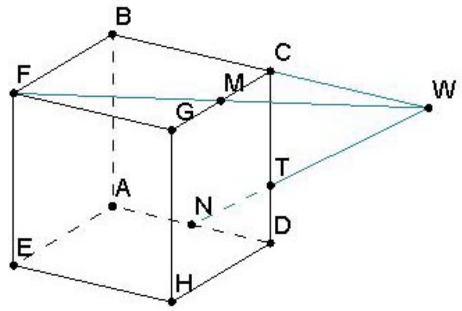


Рис. 16

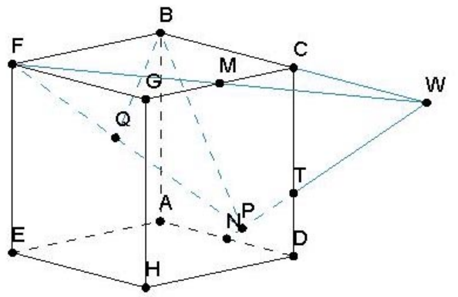


Рис. 17

строим перпендикуляр *BP* к прямой *WN*. Так как ребро *BF* перпендикулярно основанию *ABCD*, то прямая *BP* является ортогональной проекцией прямой *FP* на плоскость *ABCD*. Поэтому по теореме о трех перпендикулярах прямая *FP* также перпендикулярна *WN*. В результате построены две пересекающиеся прямые *BP* и *FP*, которые перпендикулярны прямой *WN*. По признаку перпендикулярности прямой и плоскости получаем, что $BFP \perp NW$. Следовательно, плоскость *FMN* перпендикулярна плоскости *BFP*, потому что проходит через прямую *WN*, которая перпендикулярна плоскости *BFP*. В результате, построение искомого перпендикуляра сводится к указанному частному случаю. Построив $BQ \perp FP$, завершаем решение данной задачи (рис. 17).

Второе из указанных построений перпендикуляра к плоскости, когда известен некоторый перпендикуляр, сводится к построению прямой, параллельной заданному перпендикуляру.

Пример 5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, ребро SA перпендикулярно основанию. Точка M – середина ребра BC. Построить отрезок перпендикуляра из середины отрезка SM к плоскости SAB.

Решение. Прежде всего, заметим, что плоскости ABC и SAB взаимно перпендикулярны. Поэтому высота CH треугольника ABC является перпендикуляром к плоскости SAB. В связи с этим сначала строим отрезок MK, параллельный CH, а затем отрезок LT, параллельный MK (рис. 18). В итоге отрезок LT и является искомым перпендикуляром, проведенным из середины отрезка SM к плоскости SAB.

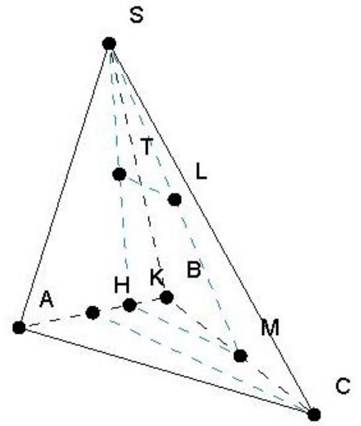


Рис. 18

Заметим, что в этой относительно простой задаче учащиеся часто приводят неверные способы построения перпендикуляра, например, проводя перпендикуляр из точки L к ребру SB.

IV. Очередной этап изучения стереометрии относится к изучению двугранных углов. Умение решать задачи с двугранными углами чаще всего напрямую зависит от умения строить перпендикуляры, так как по своему смыслу величина двугранного угла характеризуется величиной линейного угла, который получается при построении в гранях лучей с общей вершиной на ребре двугранного угла, которые перпендикулярны к ребру. Линейный угол можно получать также как пересечение двугранного угла с плоскостью, которая перпендикулярна ребру двугранного угла.

Пример 6. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 6$ и $BC = 8$, все боковые ребра пирамиды имеют длину 6. Построить линейный угол для двугранного угла с гранями ASB и BSD.

Решение. Ребром заданного угла является прямая SB. Проведем в плоскости грани SAB перпендикуляр AM к ребру, а затем постараемся построить ортогональную проекцию прямой AM на плоскость ASD. Для этого важно найти прямую, которая перпендикулярна плоскости ASD. Но так как $SBD \perp ABCD$, то построив $AK \perp BD$, получаем $AK \perp SBD$. По теореме о трех перпендикулярах получаем, что $MK \perp SB$ (рис. 19). В итоге, стороны угла AMK расположены в гранях данного двугранного угла и перпендикулярны к его ребру. Следовательно, угол AMK и является одним из линейных углов данного двугранного угла.

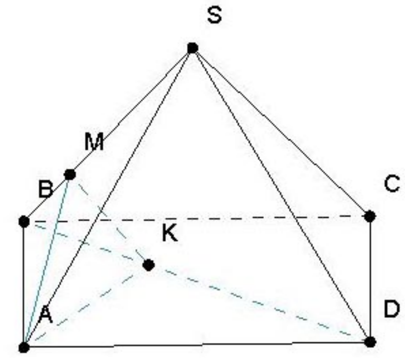


Рис. 19

V. Иногда рассматриваются задачи на вычисление величины угла между прямой и плоскостью. Умение решать задачи с этими углами также зависит от умения строить перпендикуляры, так как угол между наклонной прямой и плоскостью определяется как угол между этой прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

Пример 7. В кубе $ABCDEFGH$ точка M – середина ребра CD. Построить угол между прямой FM и плоскостью BGD.

Решение. Чтобы иметь возможность ортогонального проектирования на плоскость BGD, сначала известным способом построим отрезок CK, перпендикулярный плоскости BGD (рис. 20). Затем находим точку пересечения прямой FM с плоскостью BGD, которая является точкой пересечения прямых FM и GI и в данном случае совпадает с

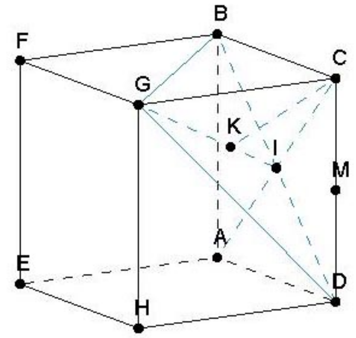


Рис. 20

точкой *K*. После этого изображаем проекцию точки *M* на плоскость *BGD*, построив отрезок *MP*, параллельный *CK* (рис. 21). Угол *MKP* – искомый, потому что прямая *KP* является ортогональной проекцией прямой *FM* на плоскость *BGD*.

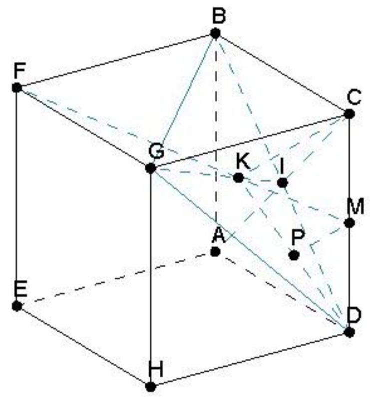


Рис. 21

VI. Одним из разделов школьного курса стереометрии является изучение тел вращения, в том числе изучение сферы и шара. В принципе ЭУМК «Стереометрия» можно приспособить к решению задач, относящихся к сферам, если ограничиваться только построением центров сфер и некоторых радиусов, так как эта часть работы непосредственно зависит от умения строить перпендикуляры к плоскостям и прямым. Действительно, если известно, что сфера касается плоскости, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к этой плоскости; если сфера касается прямой, то радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен этой прямой. Условия для сферы, проходящей через некоторые точки, также удается представить в терминах перпендикулярности. А именно, если сфера проходит через концы отрезка, то центр сферы содержится в плоскости – серединном перпендикуляре к этому отрезку; если сфера проходит через вершины треугольника, то ее центр принадлежит прямой, которая проходит через центр описанной вокруг треугольника окружности и перпендикулярна к плоскости треугольника.

Пример 8. В основании треугольной пирамиды *SABC* лежит равносторонний треугольник *ABC*, ребро *SA* перпендикулярно основанию. Построить центр *O* сферы, описанной вокруг этой пирамиды.

Решение. Сначала строим центр *F* окружности, описанной вокруг треугольника *ABC*, как точку пересечения его медиан. После этого в плоскости *SAM* проводим прямую *FK* параллельно прямой *SA*. Так как $SA \perp ABC$, то и $KF \perp ABC$. Затем строим серединный перпендикуляр к отрезку *SA*, который пересекает прямую *KF*. Для этого отмечаем середину *D* отрезка *SA* и строим $DO \perp KF$ (рис. 22). В итоге точка *O* – центр описанной сферы.

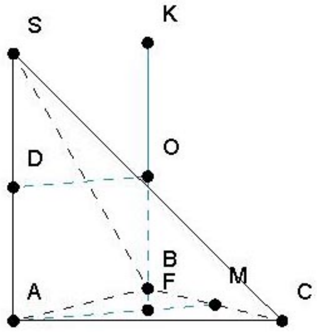


Рис. 22

Приведенные примеры наглядно демонстрируют широкие возможности ЭУМК «Стереометрия» по компьютерной поддержке всего школьного курса стереометрии в старших классах общеобразовательной школы. При этом важно отметить, что работа с данной компьютерной программой обеспечивает не только наглядность при изучении данного материала, но и в значительной степени способствует развитию логического мышления, так как процесс работы над задачами предполагает поиск каждого очередного действия на основании анализа той ситуации, которая возникает в результате применения всех предшествующих действий.

Несмотря на указанную принципиальную возможность применения ЭУМК «Стереометрия» к решению задач со сферами, конкретная реализация построений значительно зависит от числовых данных. По этим причинам основное предназначение данной программы – решение задач с многогранниками.

В процессе разработки ЭУМК «Стереометрия» и в процессе опытной эксплуатации было выявлено несколько существенных особенностей.

I. Работа с данной программой позволяет значительно уменьшить «страх» перед задачей у тех учащихся, которые испытывают определенные затруднения в математике. Оставаясь наедине с компьютером, такие ученики довольно быстро начинают экспериментировать, «нажимать кнопки», и таким образом, получая от компьютера ответную реакцию, постепенно осваиваются и через какое-то время начинают выполнять успешные действия.

II. Конструктивная направленность программы позволяет обращать внимание на одну из частей решения абсолютного большинства задач по стереометрии, в том числе и в задачах повышенного уровня сложности, включая задачи из вступительных экзаменов в ведущие вузы России. Представляя конструктивные части решения как отдельные задачи, удается естественным образом пополнить банк задач интересными и трудными задачами. В частности, в таком виде удалось представить многие трудные задачи из вступительных экзаменов в Новосибирский государственный университет. Приводим общие формулировки некоторых из таких задач.

Пример 1. Даны две скрещивающиеся прямые. Построить отрезок с концами на этих прямых, который перпендикулярен к каждой прямой (общий перпендикуляр к двум скрещивающимся прямым).

Пример 2. Даны две скрещивающиеся прямые и точка, не лежащая ни на одной из прямых. Построить прямую, которая проходит через заданную точку и пересекает заданные прямые.

Пример 3. Даны три скрещивающиеся прямые. Построить отрезок с концами на двух из этих прямых, который параллелен третьей прямой.

III. Возможность пополнения банка задач программы задачами повышенного уровня сложности позволяет эффективно организовать работу с детьми, проявляющими одаренность в области математики. В частности, помимо решения трудных задач возможными заданиями для таких детей может быть поиск нескольких различных способов решения задачи, в том числе и поиска оптимальных решений нестандартными способами.

Материал поступил в редколлегию 07.11.2007