УДК 378.146:51

Б. Н. Дроботун

Павлодарский государственный университет им. С. Торайгырова
ул. Ломова, 64, Павлодар, 140008, Казахстан
E-mail: monitoring psu@mail.ru

ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ И ИСКЛЮЧЕНИЙ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ЕЕ ПРИМЕНЕНИЮ

Выявление межпредметных связей при изучении математики предполагает использование идей и методов, свойственных одним математическим дисциплинам, при изучении других. Практика изучения понятий и конструкций математики с различных точек зрения, основывающаяся на естественных аналогиях и связях, содействует преодолению стереотипности представлений, выработке у студентов навыков абстрактного логико-алгебраического мышления, являющегося наиболее существенной составляющей общей математической культуры.

В данной работе предлагается опыт изучения некоторых понятий, конструкций и теорем из различных областей математики посредством выявления их общей логической основы и использования идейно-методологической базы комбинаторной математики.

Одним из принципов комбинаторики является так называемый принцип включений и исключений, который дает метод подсчета числа объектов из данного конечного множества, не обладающих ни одним из заданных свойств.

На основе этого принципа может быть получен ряд теорем, принадлежащих, в общем-то, далеким друг от друга разделам математики. Доказательства таких теорем проводятся различными специальными методами, традиционно свойственными этим разделам, без использования принципа включений и исключений (или использования его в неявной форме). Выявление общих позиций, позволяющих доказать эти теоремы единообразно, способствует осознанию методологической общности математики, выработке навыков описания объектов одной теории в терминах другой, что играет исключительно важную роль в постижении метода формальных аксиоматических теорий – одного из основных методов современной математики.

Принцип включений и исключений в наиболее общей форме, позволяющей получать его конкретные версии в различных математических теориях, удобно формулировать на языке одноместного исчисления предикатов. Следует отметить, что такой подход к изучению этого принципа способствует не только постижению комбинаторных фактов, но и содействует приобретению определенного опыта в построении семантических интерпретаций символических языков предикатных сигнатур, в процессе которых раскрывается теоретико-множественный смысл предикатов.

Пусть M – конечное непустое множество и $\Sigma = \{P_1(x); \ldots; P_n(x)\}$ – совокупность одноместных предикатов, определенных на этом множестве. Предикаты $P_i(x)$ будем рассматривать как свойства, которыми могут обладать (или не обладать) элементы множества M. С каждым элементом a множества M можно связать последовательность $\langle P_1(a); \ldots; P_n(a)\rangle \in E^n$, где $E = \{и; л\}$, E^n – n-я декартова степень множества E и

$$P_i(a) = \begin{cases} и, & \text{если элемент } a \\ & \text{обладает свойством } P_i; \\ л, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$i = 1; 2; \ldots; n$.

Последовательность $\langle P_1(a); \ldots; P_n(a)\rangle$ назовем характеристикой элемента $a \in M$ (на языке предикатов $P_1; \ldots; P_n$).

Рассмотрим соответствующий пример: пусть $M = \{1; 2; \ldots; 100\}$ и

$$\Sigma = \{P_1(x); P_2(x); P_3(x); P_4(x); P_5(x)\},$$

при этом:

ISSN 1818-7889. Вестник НГУ. Серия: Педагогика. 2007. Том 8, выпуск 2

$M \models P_1(a) \Leftrightarrow$ число a – четно;

$M \models P_2(a) \Leftrightarrow$ число a – полный квадрат;

$M \models P_3(a) \Leftrightarrow$ число a – простое;

$M \models P_4(a) \Leftrightarrow$ число a – кратно 10;

$M \models P_5(a) \Leftrightarrow$ число a имеет шесть натуральных делителей.

Нетрудно проверить тогда, что числа 20 и 50 имеют характеристику ⟨*и*; *л*; *л*; *и*; *и*⟩, а число 100 – единственное число характеристики ⟨*и*; *и*; *л*; *и*; *л*⟩.

Простейшие свойства понятия характеристики приводятся в форме упражнений ниже. Эти упражнения предлагаются студентам для самостоятельного решения.

1. Доказать, что соответствие φ из M в E^n:

$$(\forall a \in M)\left(\varphi(a) = \left\langle P_1(a);\ldots;P_n(a)\right\rangle\right)),$$

сопоставляющее каждому элементу a из M его характеристику, является отображением.

2. Доказать, что бинарное отношение $\sim$, определенное на M по правилу

$$(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a \sim b \Leftrightarrow (P_1(a) \equiv$$
$$\equiv P_1(b))\,\&\ldots\&\,(P_n(a) \equiv P_n(b))),$$

является отношением эквивалентности и что фактор-множество $M/\sim$ состоит не более чем из 2^n элементов.

3. Представить отображение φ из упр. 1 в виде композиции трех отображений: сюръекции, биекции и инъекции.

Из этих упражнений следует, что для любого $a \in M$ все элементы из класса эквивалентности $[a]_\sim$ имеют одну и ту же характеристику. Поэтому характеристику любого элемента из этого класса можно назвать характеристикой всего класса $[a]_\sim$.

Пусть $\left\{P_{i_1}(x);\ldots;P_{i_k}(x)\right\} \subseteq \Sigma$ $(1 \le i_1 < < i_2 < \ldots < i_k \le n)$ и $\left\langle \sigma_1;\ldots;\sigma_k \right\rangle \in E^k$. Положим

$$P_{i_j}^{\sigma_j}(x) = \begin{cases} P_{i_j}(x), \text{если } \sigma_j = и; \\ \overline{P_{i_j}}(x), \text{если } \sigma_j = л, \end{cases}$$

$$j = 1;\ldots;k. \qquad (1)$$

Через $M(P_{i_1}^{\sigma_1};\ldots;P_{i_k}^{\sigma_k})$ $(1 \le i_1 < i_2 < \ldots \ldots < i_k \le n)$ обозначим подмножество множества M, элементы которого удовлетворяют всем свойствам $P_{i_j}^{\sigma_j}(x)$ $(i = 1;2;\ldots;k)$, т. е. подмножество

$$\left\{a/\left(a \in M\right)\&\left(M \models \mathop{\&}_{j=1}^{k} P_{i_j}^{\sigma_j}(a)\right)\right\}. \qquad (2)$$

Что касается остальных свойств, т. е. свойств из $\Sigma \setminus \left\{P_{i_1}(x);\ldots;P_{i_k}(x)\right\}$, то на одних элементах из $M(P_{i_1}^{\sigma_1};\ldots;P_{i_k}^{\sigma_k})$ эти свойства могут выполняться, а на других – нет.

Продолжая вышеприведенный пример, отметим, что

$$M(\overline{P_2};\overline{P_3};P_4) =$$
$$= \{10;20;30;40;50;60;70;80;90\};$$
$$M(P_1;P_3) = \{2\};$$
$$M(P_4;P_5) = \{20;50\}.$$

На этом этапе следует обратить внимание студентов на то, что в обозначениях (1), (2) класс эквивалентности $[a]_\sim \in M/\sim$ характеристики $\left\langle\sigma_1;\ldots;\sigma_n\right\rangle \in E^n$ есть подмножество $M(P_1^{\sigma_1};\ldots;P_n^{\sigma_n})$ множества M, и отразить на диаграммах Эйлера – Венна возможный характер разбиения множества M на классы, в случае, когда Σ состоит из трех одноместных предикатов.

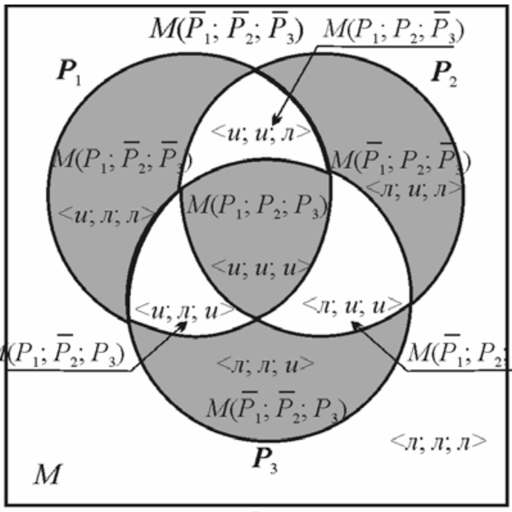
Пусть $\Sigma = \{P_1(x);P_2(x);P_3(x)\}$. Предположим, что в множестве M имеются элементы любой характеристики $\left\langle\sigma_1;\sigma_2;\sigma_3\right\rangle \in E^3$. Тогда диаграмма, отражающая разбиение множества M на классы, будет иметь вид, представленный на рис. 1, *а*. Иллюстрация случая, когда в множестве M нет элементов характеристики ⟨*и*; *и*; *и*⟩; ⟨*л*; *и*; *и*⟩, дана на рис. 1, *б*. В соответствии с этим, фактор-множество $M/\sim$, в случае *а*, состоит из $8 = 2^3$ классов, а в случае *б* – из $6 < 2^3$ классов эквивалентности.

В связи с анализом этого конкретного примера студентам предоставляется возможность доказать самостоятельно следующие утверждения.

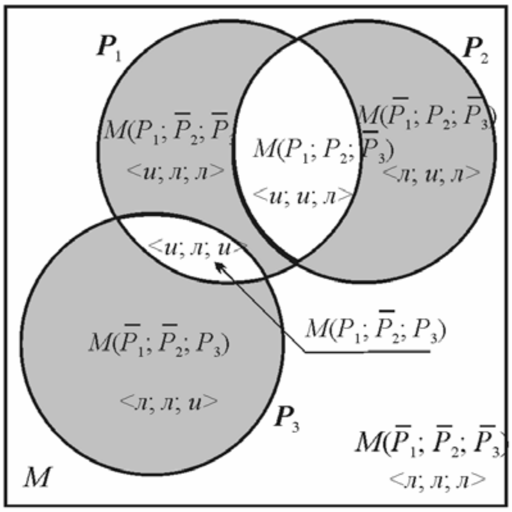
4. Любой предикат

$$P_j(x) \in \Sigma \setminus \left\{P_{i_1}(x);P_{i_2}(x);\ldots;P_{i_s}(x)\right\}$$

делит $M(P_{i_1}^{\sigma_1};P_{i_2}^{\sigma_2};\ldots;P_{i_s}^{\sigma_s})$ на два непересекающихся подмножества – $M(P_{i_1}^{\sigma_1};P_{i_2}^{\sigma_2};\ldots$ $\ldots;P_{i_s}^{\sigma_s};P_j)$ и $M(P_{i_1}^{\sigma_1};P_{i_2}^{\sigma_2};\ldots;P_{i_s}^{\sigma_s};\overline{P}_j)$, где $\left\langle\sigma_1;\sigma_2;\ldots;\sigma_s\right\rangle \in E^s$ (в общем случае одно из этих подмножеств может оказаться пустым).



а



б

Рис. 1

5. Для любого $s \in \{1; 2; \ldots; n\}$ и любого набора $\langle \sigma_1; \sigma_2; \ldots; \sigma_s \rangle \in E^s$ подмножество $M(P_{i_1}^{\sigma_1}; P_{i_2}^{\sigma_2}; \ldots; P_{i_s}^{\sigma_s})$ есть объединение 2^{n-s} классов эквивалентности из фактор-множества $M/\sim$ (в общем случае некоторые из этих классов могут оказаться пустыми).

Прежде чем дать принцип включений и исключений в общем виде, полезно, обратившись к рис. 1, подсчитать число $\left|M(\overline{P_1}; \overline{P_2}; \overline{P_3})\right|$ элементов множества M, не удовлетворяющих ни одному из предикатов P_1; P_2; P_3. Процесс подсчета можно осуществить так: удалить из M элементы, которые удовлетворяют предикату P_1, затем – предикату P_2, затем – P_3. Но при этом элементы, обладающие одновременно свойствами P_1 и P_2, будут при удалении учитываться дважды: сначала как элементы, удовлетворяющие предикату P_1, а затем как элементы, удовлетворяющие предикату P_2 (это же касается и элементов, одновременно обладающих свойствами P_1 и P_3, P_2 и P_3). В связи с этим, к числу $|M| - \left(|M(P_1)| + |M(P_2)| + |M(P_3)|\right)$ нужно прибавить (один раз) число $|M(P_1; P_2)| + |M(P_1; P_3)| + |M(P_2; P_3)|$ элементов, удаленных дважды. Но, прибавив это число, мы лишний раз учтем число элементов, одновременно обладающих всеми тремя свойствами $P_1; P_2; P_3$. Таким образом, для получения правильного результата, нужно еще вычесть число $|M(P_1; P_2; P_3)|$. В итоге получаем

$$\left|M(\overline{P}_1; \overline{P}_2; \overline{P}_3)\right| =$$
$$= |M| - \left(|M(P_1)| + |M(P_2)| + |M(P_3)|\right) +$$
$$+ \left(|M(P_1; P_2)| + |M(P_1; P_3)| + |M(P_2; P_3)|\right) -$$
$$- |M(P_1; P_2; P_3)|. \qquad (3)$$

Нетрудно проверить, что в случае двух свойств $P_1(x)$ и $P_2(x)$ число $\left|M(\overline{P}_1; \overline{P}_2)\right|$ находится по формуле

$$\left|M(\overline{P}_1; \overline{P}_2)\right| = |M| - \left(|M(P_1)| + |M(P_2)|\right) +$$
$$+ |M(P_1; P_2)|. \qquad (4)$$

Проиллюстрируем формулу (3) на следующем примере: из 155 студентов 65 владеют английским языком, 55 – французским, 75 – немецким, 20 студентов владеют английским и французским языками, 21 – английским и немецким, 24 – французским и немецким, всеми этими языками владеют 18 студентов. Сколько студентов не владеют ни одним из этих языков, знают только английский (немецкий)?

Определив на множестве M всех студентов предикаты $A(x)$; $\Phi(x)$; $H(x)$ – студент x владеет английским, французским, немецким языком соответственно, по формуле (3) находим

$$\left|M(\overline{A}; \overline{\Phi}; \overline{H})\right| = 155 - (65 + 55 + 75) +$$
$$+ (20 + 24 + 21) - 18 = 7.$$

Для нахождения числа студентов, знающих только английский язык, т. е. $\left|M(A; \overline{\Phi}; \overline{H})\right|$, можно воспользоваться формулой (4), взяв в качестве M множество $M(A)$, а в качестве свойств $P_1(x)$ и $P_2(x)$ – свойства $\Phi(x)$ и $H(x)$ соответственно, т. е.

$$\left|M(A; \overline{\Phi}; \overline{H})\right| = |M(A)| - \left(|M(A; \Phi)| +\right.$$
$$\left.+ |M(A; H)|\right) + |M(A; \Phi; H)| =$$

$= 65 - (20 + 21) + 18 = 42$.

Аналогично находим, что $\left| M(\overline{A};\ \overline{\Phi};\ H) \right| =$ $= 75 - (21 + 24) + 18 = 48$. Подобным образом можно вычислить число элементов в любом классе эквивалентности $M(A^{\sigma_1}; \Phi^{\sigma_2}; H^{\sigma_3})$ фактор-множества $M/\sim$, $\langle \sigma_1; \sigma_2; \sigma_3 \rangle \in E^3$ (рис. 2).

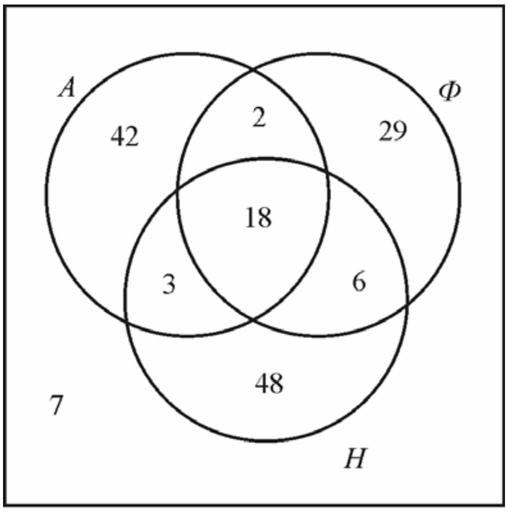


Рис. 2

Формула, аналогичная формуле (3), имеет место и в общем случае. Пусть M – непустое конечное множество и $P_1(x)$; … ; $P_n(x)$ – свойства, которыми могут обладать или не обладать элементы множества M. Тогда число $\left| M(\overline{P}_1; \dots; \overline{P}_n) \right|$ элементов множества M, не обладающих ни одним из этих свойств, вычисляется по формуле

$$\left| M(\overline{P}_1; \dots; \overline{P}_n) \right| = |M| - \sum_i \left| M(P_i) \right| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le n} \left| M(P_i; P_j) \right| + \dots$$
$$\dots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le n} \left| M(P_{i_1}; \dots; P_{i_s}) \right| + \dots$$
$$.. + (-1)^n \left| M(P_1; \dots; P_n) \right| . \qquad (5)$$

Доказательство формулы (5) осуществляется методом полной математической индукции по натуральному параметру n.

Формулу (5) обычно называют формулой включений и исключений, в связи с тем, что в ней сначала исключаются все элементы, обладающие хотя бы одним из рассматриваемых свойств: $P_1(x); \dots; P_n(x)$; затем включаются элементы, обладающие хотя бы двумя из этих свойств; далее исключаются элементы, обладающие хотя бы тремя свойствами и т. д.

Пусть $M_1; M_2; \dots; M_k$ – подмножества конечного множества M. Определим на M одноместные предикаты $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$ по следующим правилам:

$(\forall a \in M)(P_i(a) = u \Leftrightarrow a \in M_i)$.

Тогда, согласно (2):

$M(P_{i_1}; P_{i_2}; \dots; P_{i_s}) = M_{i_1} \cap M_{i_2} \cap \dots \cap M_{i_s}$

для любой подсовокупности $\left\{ P_{i_j} \middle/ j = 1, 2, \dots, s;\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_s \le k \right\}$ из Σ; т. е. формула включений и исключений в рассматриваемом случае примет вид:

$$\left| M(\overline{P}_1; \dots; \overline{P}_k) \right| = |M| - \sum_{1 \le i \le k} |M_i| +$$
$$+ \sum_{1 \le i < j \le k} \left| M_i \cap M_j \right| + \dots$$
$$\dots + (-1)^s \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_s \le k} \left| M_{i_1} \cap \dots \cap M_{i_s} \right| + \dots$$
$$\dots + (-1)^k \left| M_1 \cap \dots \cap M_k \right| .$$

Так как $M \setminus M(\overline{P}_1; \dots; \overline{P}_k)$ – подмножество элементов из M, на которых выполняется хотя бы один из предикатов $P_i(x)$ $(i = 1, 2, \dots, k)$, то

$M \setminus M(\overline{P}_1; \dots; \overline{P}_k) = M_1 \cup \dots \cup M_k$.

Окончательно получаем

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} M_i \right| = \sum_{1 \le i \le k} |M_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} \left| M_i \cap M_j) \right| + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1} \left| M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k) \right| . \qquad (6)$$

Формула включений и исключений имеет многочисленные применения в математике. Укажем, в частности, ее применения: 1) в теории чисел; 2) в теории вероятностей; 3) в линейной алгебре.

1) Пусть $M = \{1; 2; \dots; n\}$ и $p_1; p_2; \dots; p_k$ – попарно различные простые числа. Определим на M совокупность $\Sigma = \{ P_i(x) / i = 1; 2; \dots; k \}$ одноместных предикатов по правилам:

$(\forall a \in M)(P_i(a) = u \Leftrightarrow a$ делится на простое число $p_i)$, $(i = 1, 2, \dots, k)$. Тогда, в соответствии с (2), $| M(P_{i_1}; P_{i_2}; \dots; P_{i_s}) |$ будет равно количеству таких чисел $r \in M$ (т. е. не превосходящих n), которые делятся на каждое из чисел p_{i_j} $(j = 1, 2, \dots, s)$, что (в связи с тем, что все эти числа – простые) равносильно делимости числа r на произведение $p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdot \dots \cdot p_{i_s}$, для любой подсовокупности $\{P_{i_1}; P_{i_2}; \dots; P_{i_s}\}$ из Σ. Но для любых натуральных a и d $(d \ne 0)$ количество натуральных чисел, не превосходящих a и делящихся на d, равно $\left[\frac{a}{d}\right]$, где $[x]$ (целая часть числа x) – функция, определенная для всех действительных чисел и представляющая собой (для данного x) наибольшее целое число, не превосходящее x [Бухштаб, 1966]. Таким образом:

$$M(P_{i_1};P_{i_2};\dots;P_{i_s})=\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}\right]. \quad (7)$$

С учетом равенства (7), формула включений и исключений в этом случае будет иметь вид

$$\left|M(\overline{P}_1;\dots;\overline{P}_k)\right|=n-\sum_{1\le i\le k}\left[\frac{n}{p_i}\right]+$$
$$+\sum_{1\le i<j\le k}\left[\frac{n}{p_i\cdot p_j}\right]-\dots$$
$$\dots+(-1)^s\sum_{1\le i_1<\dots<i_s\le k}\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}\right]+\dots$$
$$\dots+(-1)^k\left[\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k}\right]. \quad (8)$$

Найдем, к примеру, количество целых положительных чисел, не превосходящих 256 и не делящихся ни на одно из простых чисел 7; 11; 13.

Пусть $M=\{1;\dots;256\}$. Определим на M свойства $P_1(x)$; $P_2(x)$; $P_3(x)$ по следующим правилам:

$M\models P_1(a)\Leftrightarrow a$ делится на 7;
$M\models P_2(a)\Leftrightarrow a$ делится на 11;
$M\models P_3(a)\Leftrightarrow a$ делится на 13.

Используя формулу (8), получаем

$$M(\overline{P}_1;\overline{P}_2;\overline{P}_3)=256-$$
$$-\left(\left[\frac{256}{7}\right]+\left[\frac{256}{11}\right]+\left[\frac{256}{13}\right]\right)+$$
$$+\left(\left[\frac{256}{7\cdot 11}\right]+\left[\frac{256}{7\cdot 13}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[\frac{256}{11\cdot 13}\right]\right)-\left[\frac{256}{7\cdot 11\cdot 13}\right]=$$
$$=256-(36+23+19)+(3+2+1)-0=184.$$

В качестве заданий для самостоятельной работы можно предложить студентам следующие упражнения.

Найти количество целых положительных чисел, не превосходящих 250 и взаимно простых с числом 72.

Найти число перестановок $\alpha=\langle\alpha_1;\dots;\alpha_n\rangle$ из n элементов 1; … ; n, в которых $\alpha_i\ne i$ для любого $i=1;2;\dots;n$ (другими словами, считая расположение чисел 1; … ; n исходным, найти число тех перестановок, в которых ни одно из этих чисел не остается в исходном положении).

(Указание. Взять в качестве M множество всех перестановок из n элементов; в качестве свойства $P_i(x)$ предикат, определенный на M по правилу:

$M\models P_i(\boldsymbol{\alpha})\Leftrightarrow$ в перестановке $\boldsymbol{\alpha}$ число i остается в исходном положении, $i=1;2;\dots;n$.

Показать, что $\left|M(P_{i_1};\dots;P_{i_t})\right|=(n-t)\,!$ для любого сочетания $\{i_1;\dots;i_t\}$ из элементов $1;\dots;n$. Так как число различных сочетаний $\{i_1;\dots;i_t\}$ из n по t равно C_n^t, то

$$M(\overline{P}_1;\dots;\overline{P}_n)=n!-C_n^1\cdot(n-1)!+$$
$$+C_n^2\cdot(n-2)!+\dots+(-1)^sC_n^s\cdot(n-s)!+$$
$$+\dots+(-1)^nC_n^n\cdot(n-n)!=\sum_{i=0}^{n}(-1)^iC_n^i\cdot(n-i)!\,).$$

Исходя из формы (8) принципа включений и исключений, нетрудно получить ряд результатов теории чисел.

1.1) Так как утверждения: «r не делится на простое число p» и «r и p – взаимно просты» равносильны для любых $r;p\in N$, то $\left|M(\overline{P}_1;\dots;\overline{P}_k)\right|$ есть число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с $p_1;p_2;\dots;p_k$. В теории чисел это число обозначается через $B(n;p_1,p_2,\dots,p_k)$. Таким образом, формула (8) есть формула для вычисления этого числа.

1.2) Функция Эйлера $\varphi(n)$ в теории чисел определяется для любого натурального числа $n>1$, при этом $\varphi(n)$ есть число натуральных чисел, не превосходящих n и взаимно простых с n. Если $n=p_1^{l_1}\cdot p_2^{l_2}\cdot\ldots\cdot p_k^{l_k}$ – каноническое разложение натурального числа n в произведение степеней простых чисел, то аналитическое представление для $\varphi(n)$ имеет вид [Бухштаб, 1966]

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right). \quad (9)$$

Обычно доказательству этой формулы предшествует нетривиальное доказательство свойства мультипликативности функции $\varphi(n)$, а затем с использованием этого свойства доказывается и сама формула. Используя принцип включений и исключений в форме (8), этот результат можно получить значительно проще. Так как в рассматриваемом случае каждое из простых чисел $p_1; p_2; \dots ; p_k$ делит *n*, то

$$\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}\right]=\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}},$$

для любой подсовокупности $\{p_{i_1}; p_{i_2}; \dots ; p_{i_s}\}$ из $\{p_1; p_2; \dots ; p_k\}$.

Учитывая, что $\left|M(\overline{P}_1; \dots ; \overline{P}_k)\right| = \varphi(n)$ из формулы (8), получаем

$$\varphi(n) = n - \sum_{1\le i\le k}\frac{n}{p_i} + \sum_{1\le i<j\le k}\frac{n}{p_i\cdot p_j} - \ldots +$$

$$+(-1)^s\sum_{1\le i_1<\ldots<i_s\le k}\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}+$$

$$+\ldots+(-1)^k\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k} =$$

$$= n\left(1-\sum_{1\le i\le k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_i\cdot p_j}-\right.$$

$$-\sum_{1\le r<s<t\le k}\frac{1}{p_r\cdot p_s\cdot p_t}+\ldots$$

$$\left.\ldots+(-1)^k\frac{1}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots p_k}\right)=$$

$$= n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right),$$

так как если раскрыть скобки в произведении $\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$, то, как нетрудно видеть, получится сумма:

$$1-\sum_{1\le i\le k}\frac{1}{p_i}+\sum_{1\le i<j\le k}\frac{1}{p_i\cdot p_j}-$$

$$-\sum_{1\le r<s<t\le k}\frac{1}{p_r\cdot p_s\cdot p_t}+\ldots+(-1)^k\frac{1}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k}.$$

1.3) В теории чисел через $\pi(x)$ обозначается число простых чисел, не превосходящих $x\in N$. Для подсчета числа $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$ (т. е. количества простых чисел, больших $\sqrt{n}$ и не превосходящих *n*) для любого $n>1$ используется алгоритм «Решето Эратосфена», суть которого, как известно, заключается в следующем [Бухштаб, 1966]. Пусть известны все простые числа $p_1=2;\ p_2=3; \dots ; p_k$, не превосходящие $\sqrt{n}$. Тогда, после вычеркивания в последовательности 2; 3; 4; … ; *n* всех чисел, делящихся на 2, затем – всех чисел, делящихся на 3, на 5 и т. д. и, наконец, всех чисел, делящихся на p_k оставшиеся числа составят множество простых чисел *p*, удовлетворяющих условию $\sqrt{n}<p\le n$. Таким образом, число $\pi(n)-\pi(\sqrt{n})$ может быть найдено непосредственным применением алгоритма и подсчетом количества оставшихся чисел.

Используя принцип (8) и учитывая, что $\left|M(\overline{P}_1; \dots ; \overline{P}_k)\right| = \pi(n)-\pi(\sqrt{n})$, получаем следующую явную формулу для вычисления этого числа:

$$\pi(n)-\pi(\sqrt{n}) =$$

$$=(n-1)-\sum_{1\le i\le k}\left[\frac{n}{p_i}\right]+\sum_{1\le i<j\le k}\left[\frac{n}{p_i\cdot p_j}\right]-\ldots+$$

$$+(-1)^s\sum_{i_1<\ldots<i_s}\left[\frac{n}{p_{i_1}\cdot p_{i_2}\cdot\ldots\cdot p_{i_s}}\right]+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^k\left[\frac{n}{p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k}\right]. \qquad (10)$$

В формуле (10), в правой ее части, вместо *n* стоит слагаемое $(n-1)$, так как из множества $M=\{1; 2; \dots ; n\}$ удаляется число 1, не являющееся простым по определению.

2) В учебниках и учебных пособиях по теории вероятностей теорема о сложении вероятностей доказывается обычно для двух событий опытов, охватываемых классической схемой (см., например: [Вентцель, 1969]).

Говорят, что опыт *S* осуществляется по классической схеме, если из совокупности S^* всех событий, появление которых возможно в этом опыте, можно выделить конечную подсовокупность Ω_S, обладающую следующими свойствами:

а) Ω_S – полная группа попарно несовместных равновозможных событий;

б) для любого события $A\in S^*$ по появившемуся (в результате проведения опыта *S*) событию $E\in\Omega_S$ можно достоверно судить о том, произошло событие *A* или нет.

События из Ω_S называются элементарными, а сама подсовокупность Ω_S называется пространством элементарных событий опыта S.

Используя формулу включений и исключений, теорему сложения вероятностей можно доказать сразу для любого конечного числа событий $A_1; A_2; \ldots; A_k \in S^*$. Действительно, возьмем в качестве M множество $\Omega_S = \{E_1; E_2; \ldots; E_n\}$ элементарных событий.

Систему предикатов $\Sigma = \{P_1(x); P_2(x); \ldots$ $\ldots; P_k(x)$ определим на Ω_S по правилам:

$(\forall E_j \in \Omega_S)(P_i(E_j) = u \Leftrightarrow$

элементарное событие E_j

благоприятствует A_i) $(i = 1, 2, \ldots, k)$.

Тогда $\Omega_S(P_{i_1}; P_{i_2}; \ldots; P_{i_s})$ – совокупность всех элементарных событий из Ω_S, благоприятствующих событию $A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_s}$, для любого подмножества $\{P_{i_1}; P_{i_2}; \ldots; P_{i_s}\}$ из Σ.

Обозначая через $\Omega_S(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)$ совокупность элементарных событий, благоприятствующих событию $A_1 + A_2 + \ldots + A_k$, получаем

$$|\Omega_S(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)| =$$
$$= n - |\Omega_S(\overline{P}_1; \ldots; \overline{P}_k)|.$$

Отсюда с использованием принципа включений и исключений, получаем:

$$|\Omega_S(P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_k)| =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} |\Omega_S(P_i)| - \sum_{1 \le i < j \le k} |\Omega_S(P_i; P_j)| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots \le i_t \le k} |\Omega_S(P_{i_1}; P_{i_2}; \ldots; P_{i_t})| + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} |\Omega_S(P_1; P_2; \ \ldots \ ; P_k)|. \qquad (11)$$

Разделив теперь обе части равенства (11) на n, получаем, согласно формуле классической вероятности:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le k} P(A_i \cdot A_j) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{t-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots \le i_t \le k} P(A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_t}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} P(A_1; A_2; \ldots; A_k), \qquad (12)$$

где через $P(X)$ обозначается вероятность события X.

Равенство (12) представляет собой общий случай теоремы о сложении вероятностей.

3) Пусть $\boldsymbol{B} = \{a_1; a_2; \ldots; a_n\}$ – ортонормированный базис n-мерного евклидова пространства V [Куликов, 1979]. Назовем $\boldsymbol{B}$ – подпространством пространства V, подпространство V', натянутое на некоторую подсистему $\boldsymbol{B'} = \{a_{l_1}; a_{l_2}; \ldots; a_{l_r}\}$ системы $\boldsymbol{B}$ (т. е. $\mathrm{Dim}\, V' = r$ и $a_{l_1}; a_{l_2}; \ldots; a_{l_r}$ – ортонормированный базис V'). Используя принцип включений и исключений, легко получить теорему о размерности суммы и пересечения $\boldsymbol{B}$-подпространств. Предварительно полезно обсудить со студентами вопрос о возможности применения принципа включений и исключений с целью получения аналогичного результата для любых подпространств пространства V. В качестве постановочного вопроса полезно предложить студентам для самостоятельного решения следующее упражнение: пусть W_1 и W_2 – два $\boldsymbol{B}$-подпространства и $W_1 \subseteq W_2$. Тогда $W_2 = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ (т. е. подпространства W_2 раскладывается в прямую сумму W_1 и его ортогонального дополнения $W_1^{\perp}$ в подпространстве W_2).

Пусть теперь W_1; W_2; … ; W_k – произвольная совокупность $\boldsymbol{B}$-подпространства пространства V. В качестве M возьмем множество векторов из $\boldsymbol{B}$. Определим на M систему предикатов $P_1(x); P_2(x); \ldots; P_k(x)$ по следующим правилам:

$$P_i(a_j) = u \Leftrightarrow a_j \in W_i,$$
$$i = 1, 2, \ldots, k; \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда, согласно (2):

$$|M(P_{i_1}; \ldots; P_{i_s})| = \mathrm{Dim}(W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \ldots \cap W_{i_s}), \qquad (13)$$
$$n - |\mathrm{Dim}\,(W_1 + W_2 + \ldots + W_k)| =$$
$$= |M(\overline{P}_1; \overline{P}_2; \ \ldots; \overline{P}_k)|. \qquad (14)$$

Из равенств (13) и (14) и принципа включений и исключений (6) получаем:

$$\mathrm{Dim}\,(W_1 + W_2 + \ldots + W_k) =$$
$$= \sum_{1 \le i \le k} \mathrm{Dim}\, W_i - \sum_{1 \le i < j \le k} \mathrm{Dim}\,(W_i \cap W_j) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{s-1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_s \le k} (W_{i_1} \cap W_{i_2} \cap \ldots \cap W_{i_s}) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k-1} \mathrm{Dim}\,(W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_k).$$

Список литературы

Бухштаб А. А. Теория чисел. М.: Просвещение, 1966.

Вентцель Е. С. Теория вероятностей. М.: Наука, 1969.

Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел. М.: Высшая школа, 1979.

Материал поступил в редколлегию 20.06.2006