УДК 330.3+332.012

А. В. Павлов, В. Н. Павлов

Институт экономики
и организации промышленного производства СО РАН
пр. Акад. Лаврентьева, 17, Новосибирск, 630090
antpav@ieie.nsc.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАСЧЕТОВ ПО ОПТИМИЗАЦИОННОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ С НЕЧЕТКИМИ ПАРАМЕТРАМИ [1]

Пусть *X* есть некоторая совокупность и $A \subseteq X$ – некоторое множество из *X*. Функцией принадлежности множества *A* называется отображение $\chi_A : X \to \{0;1\}$, определенное формулой

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in A \\ 0, \text{ если } x \notin A \end{cases}.$$

В дальнейшем множества с такими функциями принадлежности, принимающими два значения – 0 или 1, будут называться четкими.

Все нечетко-множественные методы экономических исследований базируются на понятии нечеткого множества.

Нечеткие множества

Пусть $I = [0;1]$ – отрезок вещественной оси, I^X – пространство всех отображений $\chi : X \to [0,1]$ из множества *X* в отрезок $I = [0,1]$.

Определение 1. По аналогии с четкими множествами всякое отображение $\chi \in I^X$ будем называть функцией принадлежности нечеткого множества A_χ, содержащегося в *X* [1]. Для всякого $x \in X$ значение $\chi(x)$ интерпретируется как степень принадлежности точки *x* к множеству A_χ, т. е. степень правдоподобности высказывания $x \in A_\chi$.

В рассуждениях обычно используется следующая (или похожая) система терминов. Если $\chi(x) = 0$, то высказывание $x \in A_\chi$ неправдоподобно. Если $\chi(x) = 1$, то высказывание $x \in A_\chi$ правдоподобно. Если $0 < \chi(x) < 1$, то высказывание $x \in A_\chi$ имеет степень правдоподобия $\chi(x)$. Если $\chi(x) < \chi(y)$, то высказывание $x \in A_\chi$ менее правдоподобно, чем высказывание $y \in A_\chi$. Эта терминология и будет использоваться в данной статье.

Далее будем использовать следующие обозначения: $F(X)$ – множество четких подмножеств *X*; $\Im(X)$ – множество нечетких подмножеств *X*. Ясно, что выполнено включения $F(X) \subseteq \Im(X)$, поскольку $\{0;1\}^X \subseteq I^X$.

Определим операции над нечеткими множествами, определяя функции принадлежности результирующих множеств:

$\overline{\chi}(x) = 1 - \chi(x)$ – функция принадлежности дополнения;

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке программы «Развитие научного потенциала высшей школы (2006–2008 годы)» Федерального агентства по образованию Министерства образования и науки РФ. Проект № РНП.2.1.3.2428 «Исследование макроэкономических процессов в России с использованием межотраслевых моделей с нечеткими параметрами».

$\chi \cap \mu\,(x) = min\{\chi(x), \mu(x)\}$ – функция принадлежности пересечения;

$\chi \cup \mu\,(x) = max\{\chi(x), \mu(x)\}$ – функция принадлежности объединения;

$\chi \times \mu\,(x, y) = min\{\chi(x), \mu(y)\}$ – функция принадлежности декартова произведения нечетких множеств.

Пусть X есть пространство с мерой, определяемой на некоторой σ-алгебре A. Обозначим через B σ-алгебру Борелевских множеств на отрезке $I = [0,1]$ и через $\xi(A, B)$ – множество измеримых отображений $\chi : (X, A) \to (I, B)$. Всякую функцию $\chi \in \xi(A, B)$ назовем функцией принадлежности измеримого нечеткого множества из *X*.

В теории нечетких множеств широко используется понятие сечения нечеткого множества.

Определение 2. Пусть $\chi \in \xi(A, B)$. Четким α-сечением (или просто α-сечением) множества A_χ назовем измеримое (четкое) множество

$$A_\alpha = \{\, x \in X \mid \chi(x) \ge \alpha \}.$$

Ясно, что для всякого $\chi \in \xi(A, B)$ нулевое сечение A_0 есть все множество *X*, т. е. $A_0 = X$. Далее, точечно-множественное отображение $f(\alpha) = A_\alpha$ – монотонно убывающее, т. е. справедлива импликация $\alpha \le \beta \Rightarrow A_\alpha \supseteq A_\beta$.

Распространение классической меры на нечеткие множества выполнено Заде в работе [2] по следующей схеме. Пусть (X, λ) есть (классическое) пространство с мерой. Отображение $\mu : \xi(A, B) \to R_+$, определенное формулой $\mu(A_\chi) = \int\limits_X \chi d\lambda$, позволяет распространить классическую меру λ на нечеткие измеримые множества пространства *X*.

Определение 3. Отображение $\mu : R^n \times R^n \to [0,1]$ называется нечетким порядком на R^n, если оно удовлетворяет следующим условиям (см. [3]):

(1) $(\forall x \in R^n)\ \mu(x, x) > 0$ (рефлексивность);

(2) $\mu(x, y) > 0 \,\&\, \mu(y, x) > 0 \to x = y$ (антисимметричность);

(3) $\mu(x, z) \ge \min\{\mu(x, y), \mu(y, z)\}$ (транзитивность).

Пусть $\{K_\alpha \subseteq R^n, 0 \le \alpha \le 1\}$ – семейство выпуклых замкнутых конусов с вершинами в начале координат, таких, что справедлива импликация $\alpha_1 \le \alpha_2 \Rightarrow K_{\alpha_1} \supseteq K_{\alpha_2}$, причем предполагается, что $K_1 \ne \varnothing$. Нечеткое отношение порядка определяется в этом случае следующим образом:

$$(\forall x, y \in R^n)\ \mu(x, y) = \sup\{\ \alpha \mid y \in x + K_\alpha \}.$$

Действительно, $(\forall x \in R^n \forall \alpha)\ x \in x + K_\alpha \to \mu(x, x) = 1$, откуда следует рефлексивность. Если $y \in x + K_\alpha$ и $x \in y + K_\beta$, причем $\alpha, \beta > 0$, то возможен единственный вариант: *x* является вершиной конуса $y + K_\beta$, *y* является вершиной конуса $x + K_\alpha$. Это экви

валентно равенству $x = y$, которое означает антисимметричность. Далее, если $\mu(x, y) = \alpha$, $\mu(y, z) = \beta\ (\alpha \le \beta)$, то по определению μ имеем $y \in x + K_\alpha$, $z \in y + K_\beta$. Следовательно, $z \in x + K_\alpha$, или $\mu(x, z) \ge \alpha$, откуда следует, что отношение μ есть нечеткий порядок на R^n.

Нечеткая оптимизация

Широкую область приложений в экономических исследованиях имеет нечеткая оптимизация (см. [3; 4]). Различают три типа задач нечеткой оптимизации: оптимизация с четкой целью и нечеткими ограничениями; оптимизация с нечеткой целью и четкими ограничениями; оптимизация с нечеткой целью и нечеткими ограничениями. В данном разделе приводятся основные понятия данного подхода к исследованиям.

Обозначения (см. [4]): пусть ψ – четкое множество вещественных функций $f : R^n \to R$. Определим на R^n частичный порядок $>_\psi$ так, что $x >_\psi y$ тогда и только тогда, когда справедливо высказывание $(\forall f \in \psi)\ f(x) \geq f(y)$.

Задачу многоцелевой оптимизации, заключающуюся в максимизации некоторого набора функций $f \in \psi$ на множестве $\Omega \subseteq R^n$, будем обозначать

$$\max_{\substack{x\in\Omega \\ f\in\psi}} f(x).$$

Решением этой задачи будем считать множество максимальных элементов, определяемых частичным порядком $>_\psi$ на Ω (множество точек, оптимальных по Парето).

Если множество допустимых состояний Ω или множество целевых функций ψ являются нечеткими, то соответствующую задачу максимизации будем обозначать

$$\max_{\substack{fuzzy \\ x\in\Omega \\ f\in\psi}} f(x).$$

В нечеткой оптимизации выделяются два аспекта: нечеткие ограничения и нечеткая цель.

Оптимизация с нечеткими ограничениями

Обозначим через $\Im(R^n)$ множество нечетких подмножеств из R^n. Пусть $f : R^n \to R$, $\Omega \in \Im(R^n)$. Рассматривается задача нечеткой оптимизации

$$\max_{\substack{fuzzy \\ x\in\Omega}} f(x). \tag{1}$$

Рассмотрим параметрическое семейство классических задач математического программирования

$$\max_{x\in\Omega_\alpha} f(x), \tag{2}$$

где $\Omega_\alpha = \{x \in R^n \mid \chi_\Omega(x) \geq \alpha\}$ есть α-сечение Ω. Обозначим через Z_α множество решений задачи (2) и положим $Z = \bigcup_{\alpha\in[0,1]} Z_\alpha$.

Определение 4. Отображение $\chi_Z : R^n \to [0,1]$, определенное формулой

$$\chi_Z(x) = \begin{cases} 0\ , \ \text{если} \ \ x \notin Z \\ \sup\{\ \alpha \ \mid x \in Z_\alpha\}\ , \ \text{если} \ \ x \in Z, \end{cases}$$

вслед за J. I. Verdegay [4] будем называть функцией принадлежности (нечеткого) решения задачи (1).

Пусть $\chi = \bigcap_{j=1}^{m} \chi_j$, где $\chi_j : R^n \to [0,1]$. Рассмотрим частный случай, когда функции χ_j представляются в виде $\chi_j(x) = h_j(g_j(x))$ для некоторых функций $g_j : R^n \to R$. Будем считать h_j непрерывными невозрастающими функциями $h_j : R \to [0,1]$ вида

$$h_j(x) = \begin{cases} 1, \ \text{если} \ \ x < 0, \\ \gamma_j(x), \ \text{если} \ \ 0 \leq x \leq d_j\ , \\ 0, \ \text{если} \ \ x > d_j \end{cases}$$

где d_j некоторые числа.

Наряду с классической задачей математического программирования

$$\max_{x\in U} f(x), \tag{3}$$

где $U = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, g_j(x) \le 0,\ j = 1, \ldots, m \right\}$, рассмотрим задачу нечеткого программирования

$$\max_{\substack{fuzzy \\ x \in \Omega}} f(x), \qquad (4)$$

в которой Ω есть нечеткое множество, порожденное функцией принадлежности $\chi = \bigcap_{j=1}^{m} \chi_j$, где $\chi_j(x) = h_j(g_j(x))$. Интерес представляет связь между задачами (3) и (4). Параметры d_j, использованные в определении нечеткого множества Ω, могут интерпретироваться как пороговые значения для допустимых нарушений *j*-го ограничения в задаче (3). Оптимальное решение задачи (4) представляет собой параметрическое семейство оптимальных решений задач типа (3). Точка $x \in R^n$ является решением задачи (3) тогда и только тогда, когда $\chi_Z(x) = 1$.

Оптимизация с нечеткой целью

Обозначим через $E(R^n)$ множество всех отображений $f : R^n \to R$. Нечеткая цель в задаче математического программирования есть нечеткое множество в $E(R^n)$. Пусть $\psi \in \Im[E(R^n)]$ есть некоторая нечеткая целевая функция.

Определение 5. Будем говорить, что $x >_\alpha y$, если для всякого $f \in E(R^n)$, удовлетворяющего условию $\chi_\psi(f) \ge \alpha$, выполнено неравенство $f(x) \ge f(y)$. Соотношение $x >_\alpha y$ следует читать: «*x* не менее предпочтительно ранга α, чем *y*». Ясно, что отношение $x >_\alpha y$ есть частичный порядок в R^n (антисимметричный, рефлексивный и транзитивный) [3]. Обозначим $Q_\alpha = \left\{ (x, y) \in R^n \times R^n \,\middle|\, x >_\alpha y \right\}$. Нечеткий порядок μ_ψ порождается в этой ситуации следующей функцией принадлежности:

$$\mu_\psi(x, y) = \begin{cases} 0,\ \textit{если}\ (x, y) \notin \bigcup\limits_{\alpha > 0} Q_\alpha, \\ \sup\limits_{(x,y) \in Q_\alpha} \alpha,\ \textit{если}\ (x, y) \in \bigcup\limits_{\alpha > 0} Q_\alpha. \end{cases}$$

Рассмотрим параметрическое семейство задач многоцелевой оптимизации

$$\max_{\substack{x \in U \\ \chi_\psi(f) \ge \alpha}} f(x). \qquad (5)$$

В случае, когда рассматриваются только линейные целевые функции, хорошо известно, что $E(R^n)$ можно отождествить с R^n [3], поэтому, определение нечеткой цели здесь сводится к нечеткому множеству $\psi \in \Im(R^n)$, и параметрическое семейство задач оптимизации, максимизирующих нечеткую цель, имеет вид

$$\max_{\substack{x \in U \\ \chi_\psi(c) \ge \alpha}} cx. \qquad (6)$$

Задачи (5) и (6) при каждом фиксированном α представляют собой (классические) задачи многоцелевой оптимизации с множеством целей

$$\psi_\alpha = \{ f | \chi_\psi(f) \ge \alpha \}.$$

Обозначим через Z_α множество решений задачи (5) и пусть

$$Z = \bigcup_{\alpha \in [0,1]} Z_\alpha .$$

Далее, нечетким решением задачи нечеткой оптимизации

$$\max_{\substack{fuzzy \\ x \in U \\ f \in \psi}} f(x)$$

будем называть множество с функцией принадлежности

$$\chi_Z(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \textit{если}\ \ x \notin Z \\ \sup\left\{\ \alpha\ \middle|\ x \in Z_\alpha \right\}\ ,\ \textit{если}\ \ x \in Z. \end{cases}$$

Нечеткая цель и нечеткие ограничения

Пусть $\Omega \in \Im\left[R^n\right]$ – нечеткое множество, и $\psi \in \Im\left[E\left(R^n\right)\right]$ – нечеткая цель. Будем решать задачу

$$\max_{\substack{fuzzy \\ x\in\Omega \\ f\in\psi}} f(x). \tag{7}$$

Комбинация рассмотренных выше методов приводит к следующей модели решения задачи (7). Рассматривается параметрическое семейство классических задач многоцелевой оптимизации вида (см. [5])

$$\max_{\substack{\chi_\Omega(x)\ge\alpha \\ \chi_\psi(f)\ge\beta}} f(x), \tag{8}$$

где $\alpha,\beta \in [0,1]$, $f \in \Im\left(R^n\right)$. Если решение (множество эффективных решений) задачи (8) обозначить через $Z(\alpha,\beta)$ и положить $Z = \bigcup\limits_{\alpha,\beta\in[0,1]} Z(\alpha,\beta)$, то нечеткое решение задачи (7) определяется следующей функцией принадлежности:

$$\chi_Z(x) = \begin{cases} 0\ ,\ \textit{если}\ \ x \notin Z \\ \sup\left\{\ \alpha\ \middle|\ \exists(\beta \ge \alpha\ \&\ \gamma \ge \alpha)\ \ x \in Z(\beta,\gamma) \right\}\ ,\ \textit{если}\ \ x \in Z. \end{cases} \tag{9}$$

Свойства точечно-множественного отображения $Z(\alpha,\beta)$

Математические свойства точечно-множественного отображения $Z(\alpha,\beta)$, сформулированные в данном разделе, по мнению авторов, являются базовыми для приложений теории нечеткой оптимизации. Они достаточно очевидны. Свойства 2, 4, 5 вытекают прямо из определения. Поэтому они не доказываются. Немножко менее очевидными представляются свойства 1, 3, 6, 7, 8, краткое доказательство которых включено в текст статьи.

Заметим, что множество $Z(\alpha,\beta)$ является четким при любых значениях параметров α и β. Для изучения отображения $Z(\alpha,\beta)$ введем понятие экспоненциальной топологии [6]. Пусть X – топологическое пространство. Через $\Re(X)$ обозначим множество всех *замкнутых* подмножеств X. Для любого $A \subseteq X$ через 2^A обозначим множество

$$2^A = \left\{B \in \Re(X) \middle| B \subseteq A\right\}.$$

Определение 6. Следуя [6], κ-топологией (топологией полунепрерывности сверху) на $\Re(X)$ будем называть топологию, открытой предбазой которой являются множества 2^G для открытых G, и λ-топологией (топологией полунепрерывности снизу) – топологию, открытой предбазой которой являются множества $\Re(X) - 2^F$ для замкнутых F. Экспоненциальная топология (μ-топология) является объединением этих двух топологий.

Рассмотрим теперь задачу нечеткого программирования

$$\mathop{max}_{\substack{fuzzy \\ x\in\Omega \\ f\in\psi}} f(x),$$

в которой $\chi_\Omega = \bigcap\limits_{j=1}^{m} \chi_j$, где $\chi_j(x) = h_j\left(g_j(x)\right)$, причем функции $h_j(x)$ непрерывные, монотонно невозрастающие, и $g_j(x)$ – непрерывные и выпуклые, все f – непрерывные и вогнутые, $\bigcup\limits_{\alpha>0} \Omega_\alpha$ ограничено.

В этом случае отображение $Z(\alpha, \beta)$ обладает следующими свойствами.

1) Для всяких $\alpha, \beta \in [0, 1]$ множество $Z(\alpha, \beta)$ замкнуто в R^n.

Доказательство. Это свойство следует из непрерывности всех $g_j(x)$ и всех *f*. Действительно, если последовательность $x_n \in Z(\alpha, \beta)$, то $\chi_j(x_n) = h_j(g_j(x_n)) \geq \alpha$. Следовательно, для предельной точки $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ выполнено неравенство $\chi_j(x) = h_j(g_j(x)) \geq \alpha$. Далее, из непрерывности целевых функций $f \in \Psi_\beta$ и их непрерывности следует $x \in Z(\alpha, \beta)$.

2) $Z(\alpha, \beta)$ монотонно убывает по *α*.

3) $Z(\alpha, \beta)$ – полунепрерывно сверху по *β*.

Доказательство. Из непрерывности $h_j(x)$, $g_j(x)$, всех $f \in \psi$ и ограниченности $\bigcup\limits_{\alpha>0} \Omega_\alpha$ следует замкнутость графика $Z(\alpha, \beta)$. Далее, так как $\bigcup\limits_{\alpha>0} \Omega_\alpha$ ограничено, это свойство следует из теоремы Куратовского о полунепрерывности сверху компактнозначных отображений с замкнутым графиком [6].

4) $Z(0, 0) = R^n$.

5) $\bigcup\limits_{\alpha\geq\gamma} Z(\alpha, \beta) = Z(\gamma, \beta)$.

6) Если $Z(\alpha, \beta)$ полунепрерывно сверху по (*α, β*), то $Z^*(\alpha, \gamma) = \bigcup\limits_{\beta\geq\gamma} Z(\alpha, \beta)$ имеет замкнутый график.

Доказательство. Пусть $x_n \to x_0$ и $x_n \in Z(\alpha, \beta_n)$, где $1 \geq \beta_n \geq \gamma$ и $\beta_n \to \beta^* \geq \gamma$. Из полунепрерывности *Z* имеем, что $x_0 \in Z(\alpha, \beta^*)$, откуда вытекает включение $x_0 \in Z^*(\alpha, \gamma)$.

7) Положим $Z^{**}(\gamma) = \bigcup\limits_{\alpha,\beta\geq\gamma} Z(\alpha, \beta)$. Если $Z(\alpha, \beta)$ полунепрерывно сверху по (α, β) и $\bigcup\limits_{\alpha>0} \Omega_\alpha$ ограничено, то $Z^{**}(\gamma)$ имеет замкнутый график.

Доказательство. Справедливо следующее теоретико-множественное равенство $Z^{**}(\gamma) = \bigcup\limits_{\alpha\geq\gamma} Z^*(\alpha, \gamma)$. Далее, заметим, что при $\alpha_1 \leq \alpha_2$ справедливо включение $Z^*(\alpha_1, \gamma) \supseteq Z^*(\alpha_2, \gamma)$, поскольку для каждого *β* справедливо включение $Z(\alpha_1, \beta) \supseteq Z(\alpha_2, \beta)$. Отсюда вытекает, что $Z^{**}(\gamma) = Z^*(\gamma, \gamma)$. Пусть теперь $x_n \to x_0$ и $x_n \in Z^*(\gamma_n, \gamma_n)$, $\gamma_n \to \gamma_0 \geq \gamma$. Это означает, что найдутся такие α_n, $\beta_n \geq \gamma_n$, что $x_n \in Z(\alpha_n, \beta_n)$. Без ограничения общности, переходя, если надо, к подпоследовательностям, можем считать, что $\alpha_n \to \alpha_0$ и $\beta_n \to \beta_0$. Из непрерывности $\Omega_j(x) = h_j(g_j(x))$ следует, что $x_0 \in \Omega_{\alpha_0}$, а из полунепрерывности сверху $Z(\alpha, \beta)$ имеем $x_0 \in Z(\alpha_0, \beta_0)$. Так как α_0, $\beta_0 \geq \gamma_0$, то это означает включение $x_0 \in Z^{**}(\gamma_0)$, т. е. замкнутость графика $Z^{**}(\gamma)$.

8) Если $Z^{**}(\gamma)$ имеет замкнутый график, то в определении нечеткого решения Supremum можно заменить на Maximum.

Доказательство. Пусть $\chi(x) = \alpha$. Выберем монотонно возрастающую последовательность $\alpha_n \to \alpha$ и такую, что $x \in Z^{**}(\alpha_n)$. Легко видеть, что требуемая последовательность существует. Теперь из замкнутости графика отображения Z^{**} имеем включение $x \in Z^{**}(\alpha)$, и утверждение доказано.

Доказанные свойства отображения $Z(\alpha, \beta)$ являются математической основой применения методов нечеткой оптимизации к приближенному решению прикладных задач.

Метод интервального представления данных

Понятие интервального числа. Фиксируем положительное вещественное число *a*. Обозначим $\overset{=}{x}_a = \left[x - \frac{a}{2}, x + \frac{a}{2} \right)$. Назовем $\overset{=}{x}_a$ интервальным числом уровня *a*.

Понятие интервального вектора в R^m. Фиксируем вектор $a = (a_1, a_2, ..., a_m) \in R^m$ с положительными компонентами. Пусть $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in R^m$. Обозначим через $\overset{=}{x}_a$ параллелепипед с центром в точке *x*, определенный формулой

$$\overset{=}{x}_a = \left(\overset{=}{x}_{1\,a_1}, \overset{=}{x}_{2\,a_2}, ..., \overset{=}{x}_{m\,a_m} \right),$$

который назовем интервальным вектором.

Нечеткое множество, порожденное случайной величиной, по методу интервального представления данных. Пусть ξ есть некоторая m-мерная вещественная случайная величина, λ – соответствующая вероятностная мера и $\Phi : R^m \to [0,1]$ – функция распределения этой случайной величины. Определим отображение $\overset{=}{\lambda}_a : R^m \to [0,1]$ формулой (см. [7])

$$\overset{=}{\lambda}_a(x) \overset{df}{\equiv} \lambda\left(\overset{=}{x}_a\right) \equiv \int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} d\Phi(t), \tag{10}$$

где через $\int\limits_a^b d\Phi(t)$ обозначен интеграл Стилтьеса по параллелепипеду $Q = \left\{ t \in R^m \,\middle|\, a_k \le t_k < b_k \right\} = [a, b)$.

Отображение $\overset{=}{\lambda}_a$ при любом $a > 0$ представляет собой функцию принадлежности некоторого нечеткого множества. Это множество порождено случайной величиной ξ, причем, согласно определению (10), число $\overset{=}{\lambda}_a(x)$ представляет собой вероятность того, что случайная величина ξ принимает значения из параллелепипеда $\overset{=}{x}_a$, т. е. вероятность того, что в результате наблюдения за случайной величиной ξ мы получим значение из параллелепипеда $\overset{=}{x}_a$.

Нечеткое множество, функцией принадлежности которого является $\overset{=}{\lambda}_a$, и будем называть множеством, порожденным интервальным представлением случайной величины ξ.

Математические свойства нечетких показателей, порожденных интервальным представлением данных

Опираясь на вид формулы (10), можем говорить, что параметр *a* характеризует точность нечеткого представления случайной величины ξ. Уменьшение каждой компоненты вектора *a* увеличивает точность представления. Увеличение каждой компоненты вектора *a* уменьшает точность представления.

Свойство 1. Согласно формуле (10), при фиксированном $x \in R^m$ значение $\overset{=}{\lambda}_a(x)$ является монотонно возрастающей функцией параметра *a*. Более того, при любом $x \in R^m$ справедливы равенства

$$\lim_{\substack{a \to 0 \\ a > 0}} \overset{=}{\lambda}_a(x) = 0, \quad \lim_{\substack{a \to \infty \\ a > 0}} \overset{=}{\lambda}_a(x) = 1,$$

когда к бесконечности стремятся сразу все компоненты вектора *a*. Это свойство является очевидной переформулировкой свойств функции распределения $\Phi(t)$. Его можно интерпретировать следующим образом.

Свойство 2. Уменьшение точности нечеткого представления случайной величины ξ (увеличение каждой компоненты вектора *a*) для каждого $x \in R^m$ при прочих равных приводит к увеличению правдоподобности принадлежности числа *x* нечеткому образу этой случайной величины.

Свойство 3. Увеличение точности нечеткого представления случайной величины ξ (уменьшение каждой компоненты вектора *a*) для каждого $x \in R^m$ при прочих равных приводит к уменьшению правдоподобности принадлежности числа *x* нечеткому образу этой случайной величины.

Свойства 1, 2 и 3 являются основой интерпретации прикладных результатов.

Обозначим через $L_1(-\infty,\infty)$ пространство измеримых по Лебегу вещественных функций, заданных на всей прямой, для которых $\|f\|_{L_1} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Пусть ξ – скалярная случайная величина. Отображение $\overline{\overline{\lambda}}_a$ в этом случае обладает следующим свойством.

Лемма 1. Для всякого $a > 0$ справедливо включение $\overline{\overline{\lambda}}_a \in L_1(-\infty,\infty)$, причем $\left\|\overline{\overline{\lambda}}_a\right\|_{L_1} = a$.

Обобщение леммы 1 на *m*-мерный случай. Обозначим через $L_1^m(-\infty,\infty)$ пространство измеримых по Лебегу вещественных функций $f : R^m \to R$, для которых $\|f\|_{L_1^m} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}...\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$. Пусть ξ – *m*-мерная случайная величина. Отображение $\overline{\overline{\lambda}}_a$ для $a \in R^m$, $a > 0$, в этом случае обладает следующим свойством.

Лемма 2. Для всякого $a = (a_1, a_2, ..., a_m) > 0$, $a \in R^m$, функция $\overline{\overline{\lambda}}_a$ принадлежит пространству $L_1^m(-\infty,\infty)$ и справедливо равенство $\left\|\overline{\overline{\lambda}}_a\right\|_{L_1^m} = \prod\limits_{k=1}^{m} a_k$.

Доказательство этих утверждений содержится в работе [8] и здесь не воспроизводится.

Используя функцию $\overline{\overline{\lambda}}_a$, определим теперь меру всякого измеримого по Лебегу множества $A \subseteq R^n$:

$$\mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}(A) = \int\limits_A \overline{\overline{\lambda}}_a(x)dx \Big/ \prod_{k=1}^{m} a_k .$$

Из леммы 2 следует, что для всякого $A \subseteq R^n$ справедливы неравенства $0 \le \mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}(A) \le 1$. Число $\mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}(A)$ интерпретируется как вероятность того, что пересечение множества *A* с нечетким множеством $A_{\overline{\overline{\lambda}}_a}$ не пусто. Вероятностную меру $\mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}(A)$ назовем мерой, порожденной интервальным представлением данных $\overline{\overline{\lambda}}_a$.

Свойства вероятностной меры $\mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}$. Обозначим через $F_1(x)$ функцию распределения, соответствующую мере $\mu_{\overline{\overline{\lambda}}_a}$.

Лемма 3. Пусть $x, a \in R^1$ и $a > 0$. Тогда справедливо равенство

$$F_1(x) = \frac{1}{a} \int\limits_{x-\frac{a}{2}}^{x+\frac{a}{2}} \Phi(t)dt .$$

Обобщение этой леммы на многомерный случай.

Лемма 4. Пусть $x, a \in R^m$, $a > 0$, $\frac{\partial^m \Phi(t)}{\partial t_1 \partial t_2 ... \partial t_m} \equiv \frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\partial}{\partial t_2} ... \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_m}\right)$ всюду существует и непрерывна. Тогда справедливо равенство

$$F_1(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} \cdot \int_{x_1 - \frac{a_1}{2}}^{x_1 + \frac{a_1}{2}} ... \int_{x_m - \frac{a_m}{2}}^{x_m + \frac{a_m}{2}} \Phi(t_1, t_2, ..., t_m) dt_1 dt_2 ... dt_m .$$

Обозначим через η случайную величину, функцией распределения которой является $F_1(x)$.

Справедливо следующее свойство случайной величины η.

Лемма 5. Если $\Phi(t)$ непрерывно дифференцируема по t_j, то существует частная производная $\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_j}$, причем справедлива формула

$$\frac{\partial F_1(x)}{\partial x_j} = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} \cdot \int_{x - \frac{a}{2}}^{x + \frac{a}{2}} \frac{\partial \Phi(t)}{\partial t_j} dt .$$

Доказательство этих утверждений также содержится в работе [8] и здесь не воспроизводится.

Следствие 1. Из леммы 5 следует, что если случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $\frac{\partial^m \Phi(t)}{\partial t_1 \partial t_2 ... \partial t_m} = g(t)$, то η также имеет непрерывную плотность распределения $\frac{\partial^m F_1(t)}{\partial t_1 \partial t_2 ... \partial t_m} = h(t)$, причем справедлива формула

$$h(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} \cdot \int_{x - \frac{a}{2}}^{x + \frac{a}{2}} g(t) dt .$$

Следствие 2. Если случайная величина ξ имеет непрерывную плотность распределения $g(t)$ и для вещественной функции $y(x)$ существует интеграл $\int_{R^m} |y(x)| dF_1(x)$, то справедливо равенство

$$\int_{R^m} y(x) dF_1(x) = \prod_{k=1}^{m} \frac{1}{a_k} \cdot \int_{R^m} g(t) dt \int_{t - \frac{a}{2}}^{t + \frac{a}{2}} y(x) dx. \tag{11}$$

Обозначим математическое ожидание случайной величины ξ через $M\xi$, дисперсию – через $D\xi$, ковариацию случайных величин ξ_1 и ξ_2 – через $Cov(\xi_1, \xi_2)$. По формуле (11) легко вычисляются моменты первого и второго порядков случайной величины η. Для произвольных $i, k = 1, 2, ..., m$ справедливы следующие равенства:

$$M\eta_k = M\xi_k , \; D\eta_k = D\xi_k + \frac{a_k^2}{12},$$

$$Cov(\eta_i, \eta_k) = Cov(\xi_i, \xi_k), \; i \neq k.$$

Предположим теперь, что о случайной величине ξ мы знаем только ряд выборочных значений

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N, \; \xi_k \in R^n \tag{12}$$

Выборкой (12) порождается эмпирическая вероятностная мера λ_N и эмпирическая функция распределения $\Phi_N : R^n \to [0,1]$. Следовательно, при каждом фиксированном

$a \in R_{+}^{n} \;\&\; a > 0$ имеется последовательность функций принадлежности нечетких множеств $\overline{\overline{(\lambda_N)}}_a$, построенных по формуле (10).

Лемма 6. Последовательность функций $f_N(x) \equiv \overline{\overline{(\lambda_N)}}_a(x)$ при $N \to \infty$ сходится к функции $\overline{\overline{\lambda}}_a(x)$ в каждой точке *x*, такой, что $x - \dfrac{a}{2}$ и $x + \dfrac{a}{2}$ являются точками непрерывности функции Ф.

Доказательство. Эта лемма является следствием теоремы Гливенко – Кантелли (см.: [9. С. 22]).

Нечеткие отображения, порожденные точечно-точечными функциями

Пусть $f : X \to Y$ – некоторое точечно-точечное отображение множества X в множество Y. Определим отображение $\tilde{f} : \Im(X) \to \Im(Y)$ следующим образом. Возьмем некоторое $A \in \Im(X)$, χ_A – ее функция принадлежности. Функцию χ_B принадлежности множества $B = \tilde{f}(A) \in \Im(Y)$ определим по формуле

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \chi_A(x),$$

где $f^{-1}(y) = \{x \in X \,|\, f(x) = y\}$.

Определенное таким образом отображение $\tilde{f} : \Im(X) \to \Im(Y)$ будем называть нечетким отображением, порожденным точечно-точечной функцией $f : X \to Y$. Отображение $\tilde{f}$ иногда называется нечетким продолжением функции $f : X \to Y$.

Обобщение данной методики нечеткого продолжения на функции многих переменных выполняется по методу математической индукции. Пусть $f : \prod_{i=1}^{n} X_i \to Y$, $A_i \in \Im(X_i)$, χ_i – их функции принадлежности. Функция принадлежности χ_B множества $B = \tilde{f}(A_1, A_2, ..., A_n) \in \Im(Y)$ определяется по формуле

$$\chi_B(y) = \sup_{x \in f^{-1}(y)} \min_{1 \le i \le n} \chi_i(x_i),$$

где $f^{-1}(y) = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i \,\middle|\, f(x) = y \right\}$.

В частности, операции нечеткой арифметики – сложение и умножение – определяются следующим образом.

Пусть в X определена операция сложения, и $A, B \in \Im(X)$. Тогда функция принадлежности суммы нечетких множеств $A + B$ вычисляется по формуле

$$\chi_{A+B}(x) = \sup_{y+z=x} \min\{\chi_A(y), \chi_B(z)\}.$$

Пусть в X определена операция умножения, и $A, B \in \Im(X)$. Тогда функция принадлежности произведения нечетких множеств $A \cdot B$ вычисляется по формуле

$$\chi_{A \cdot B}(x) = \sup_{y \cdot z = x} \min\{\chi_A(y), \chi_B(z)\}.$$

Оптимизационная межотраслевая динамическая модель с нечеткими параметрами

В модели используются следующие параметры, которые описываются в терминах нечетких множеств:

n – число отраслей общественного производства;
m – число отраслей первого подразделения (*m* < *n*);
k – число фондосоздающих отраслей;
Т – количество периодов времени для прогнозирования;

$a_{ij}(t)$ – коэффициенты прямых материальных затрат продукции отрасли i на производство единицы продукции отрасли j в период времени t;

$c_{hj}(t)$ – коэффициенты трудоемкости продукции отрасли j по h-му виду трудовых ресурсов в период времени t;

$b_{ij}(t)$ – коэффициенты фондоемкостей продукции отрасли j по i-му виду основных фондов в период времени t;

ϑ_{ij} – строительный лаг в j-й отрасли по i-му виду производственных основных фондов;

$\kappa_{ij}(t,\tau)$ – коэффициент выбытия производственных основных фондов i-го вида в j-й отрасли возраста τ в период времени t;

$B_{ij}(t)$- ввод в действие производственных основных фондов i-го вида в j-й отрасли в период времени t;

$K_{ij}(t,t+\tau)$ – инвестиции i-го вида в j-й отрасли в году t в объекты, вводимые в действие в период времени $t+\tau$;

$K_{ij}^{*}(t)$ – общий объем инвестиций i-го вида в j-й отрасли в период времени t;

$\mu_{ij}(t,\tau)$ – коэффициент, показывающий, какая доля ввода в действие производственных основных фондов в j-й отрасли региона в период времени $t+\tau$ формируется за счет инвестиций i-го вида периода t, так что $\mu_{ij}(t,\tau)=K_{ij}(t,t+\tau)\Big/\left(\sum_{i=1}^{k}\mathrm{B}_{\mathrm{ij}}(t+\tau)\right)$;

$L_h(t)$ – численность h-го вида трудовых ресурсов, которые потенциально могут быть заняты в общественном производстве в периоде t;

$F_{ij}(t,t-\tau)$ – производственные основные фонды i-го вида в j-й отрасли на конец года t, введенные в периоде $t-\tau$;

$F_{ij}^{*}(t)$ – производственные основные фонды i-го вида в j-й отрасли на конец периода времени t;

$N_{ij}(t)$ – незавершенное строительство производственных основных фондов i-го вида в j-й отрасли на конец периода t;

$f_j(t)$ – взвешивающие коэффициенты продукции j-й отрасли в целевом функционале экономической системы.

Пусть экономическая система включает n отраслей, из которых отрасли $1\le i\le k$ – фондосоздающие, а $k<i\le m$ – нефондосоздающие первого подразделения, $m<i\le n$ – отрасли второго подразделения.

Поскольку параметры модели являются нечеткими множествами, то все дальнейшие их арифметические преобразования, выполненные в соответствии с правилами нечеткой арифметики, также будут представлять собой нечеткие множества.

Обозначим через $x_j(t)$ нечеткий произведенный, $\bar{x}_j(t)$ – нечеткий использованный валовой выпуск j-й отрасли, $S_j(t)$ – нечеткое сальдо экспорта-импорта по j-му продукту, $\Delta z_j(t)$ – нечеткий прирост запасов и $\Pi_j(t)$ – нечеткие потери продукции j-й отрасли в период времени t. По аналогии с [10] соотношение продуктового баланса j-й отрасли запишем в виде

$$x_j(t)=\bar{x}_j(t)+S_j(t)+\Delta z_j(t)+\Pi_j(t).$$

Воспроизводство основных фондов в модели динамического межотраслевого баланса с лагами описывается как процесс обмена использованного продукта фондосоздающих отраслей периода t на ввод в действие основных фондов периода t, который опосредуется изменением объема незавершенного строительства.

Применение лаговых показателей позволяет увязать процесс производства продукции фондосоздающими отраслями машиностроения и строительства, а также экспорта и импорта продукции этих отраслей в каждом периоде времени с предшествующими и последующими периодами. Часть произведенного продукта фондосоздающих отраслей экономической системы каждого периода обеспечивает продолжение строительства объектов, начатое ранее, часть экспортируется. Это обусловливает связанность инвестиций и, следовательно, зависимость их объема, отраслевой и технологической структуры от инвестиций предшествующих периодов времени и от объемов импорта продукции фондосоздающих отраслей. Ввод в действие производственных основных фондов в каждый период времени формируется по материально-вещественному составу за счет использованного продукта машиностроения и строительства ряда предыдущих и данного периода времени. В состав незавершенного строительства j-й отрасли ($1 \le j \le n$) в период t поступает продукция i-й фондосоздающей отрасли в объеме $K_{ij}^{*}(t)$ и распределяется по слоям незавершенного строительства. Инвестиции определяются по формуле

$$K_{ij}^{*}(t) = \sum_{u \ge 0} K_{ij}(t, t+u). \tag{13}$$

Ввод в действие производственных основных фондов $B_{ij}(t)$ периода t в j-й отрасли формируется из использованного продукта i-й фондосоздающей отрасли по формуле

$$B_{ij}(t) = \sum_{u \ge 0} K_{ij}(t-u, t). \tag{14}$$

Объем инвестиций $K_{ij}(t, t+u)$ в слой незавершенного строительства, вводимый в периоде $t + u$, вычисляется через ввод в действие основных фондов этого периода по формуле

$$K_{ij}(t, t+u) = \mu_{ij}(t, u) \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathrm{B_{ij}}(t+\tau). \tag{15}$$

Коэффициенты $\mu_{ij}(t, u)$ являются интегральной характеристикой ввода в действие основных фондов, зависящей от технологии и интенсивности строительства объектов в отрасли j. При этом технология строительства состоит из конечного числа стадий. Тогда инвестиции определяются по формуле

$$K_{ij}(t, t+u) = \sum_{v} \left(\xi_j(t, t+u, v) \cdot \eta_{ij}(t+u, v) \cdot \sum_{i=1}^{k} \mathrm{B_{ij}}(t+\tau) \right), \tag{16}$$

где $\eta_{ij}(t+u, v)$ – доля ввода в действие производственных основных фондов i-го вида в j-й отрасли в период $t + u$, которая формируется в v-й стадии строительства; $\xi_j(t, t+u, v)$ – часть v-й стадии, выполненная в t-м периоде (за u периодов до ввода данного слоя). В зависимости от ожидаемых капитальных вложений несколько последовательных стадий могут быть выполнены в течение одного периода или одна стадия может продолжаться несколько периодов. Формулы (15), (16) – базовые для определения объемов инвестиций по отраслям экономической системы через ожидаемые вводы в действие основных фондов. Дополнительные управляющие параметры $\xi_j(t, t+u, v)$ в формуле (16) дают возможность прогнозировать согласованные ввод в действие основных фондов и инвестиции в условиях изменяющихся во времени сроков строительства. Для этого в нормативах $\xi_j(t, t+u, v)$ учитывается ускорение или замедление интенсивности капитального строительства.

Рекуррентные соотношения по пересчету незавершенного строительства описываются формулой

$$N_{ij}(t) = N_{ij}(t-1) - \sum_{u=1}^{\vartheta_{ij}-1} K_{ij}(t-u, t) + \sum_{u=1}^{\vartheta_{ij}-1} K_{ij}(t, t+u). \tag{17}$$

Рекуррентные соотношения для определения объема производственных основных фондов i-го вида в j-й отрасли возраста u на конец периода t задаются формулой

$$F_{ij}(t, 0) = B_{ij}(t), \ F_{ij}(t, u) = F_{ij}(t-1, u-1) \cdot \left(1 - \kappa_{ij}(t, u)\right). \tag{18}$$

Модель воспроизводства основных производственных фондов (13)–(18) используется для определения инвестиций и их технологической структуры по отраслям через ожидаемый ввод в действие основных фондов с учетом строительного лага и режима $\xi_j(t, t+u, v)$ функционирования инвестиционного комплекса.

Произведенный валовой продукт (валовой выпуск) *j*-й фондосоздающей отрасли $x_j(t)$ в период *t* определяется по формуле

$$x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} K_{ij}^{*}(t) + S_i(t) + \ddot{i}_i(t). \tag{19}$$

Баланс производства и использования продукции нефондосоздающих отраслей первого подразделения имеет следующий вид:

$$x_j(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(t) \cdot x_j(t) + S_i(t) + \ddot{i}_i(t), \ k < i \le m. \tag{20}$$

Соотношения для формирования продукции отраслей второго подразделения представляются в виде

$$x_i(t) = Q_i\left(x_i(t-1), S_i(t-1), \lambda, t\right) + S_i(t), \ m < i \le n, \tag{21}$$

где Q_i – отображения, синтезирующие структуру и динамику потребностей (обычно – это монотонно возрастающие функции параметра λ).

Ограничения по трудовым ресурсам описываются системой неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} c_{kj}(t) \cdot x_j(t) \le L_k(t), \ k = 1, ..., l. \tag{22}$$

Ограничения по основным фондам описываются системой неравенств

$$b_{ij}(t) \cdot x_j(t) \le F_{ij}(t), \ 1 \le i \le k, \ 1 \le j \le n. \tag{23}$$

Обозначим через Ω множество нечетких траекторий развития экономической системы $x_j(t)$, удовлетворяющие в каждый период времени *t* ограничениям (13)–(14), (16)–(23), и сформулируем задачу нечеткой оптимизации:

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{n} f_j(t) \cdot x_j(t) \Rightarrow \max, \ x \in \Omega, \tag{24}$$

где множество допустимых траекторий Ω и коэффициенты максимизируемой функции $f_j(t)$ являются нечеткими.

Решение задачи (24) при вводах в действие основных фондов $B_{ij}(t)$, трудовых ресурсах $L_k(t)$, а также нормативах $\eta_{ij}(t+u, v)$, $\xi_j(t, t+u, v)$, $\kappa_{ij}(t, u)$, $a_{ij}(t)$, $S_i(t)$, $c_j(t)$ для каждого периода времени из [0; *T*], дает нечеткую систему показателей развития экономической системы, включая валовой выпуск $x_j(t)$, производственные инвестиции $K_{ij}^{*}(t)$, вводы в действие производственных основных фондов $B_{ij}(t)$ и основные фонды на конец каждого периода времени $F_{ij}^{*}(t) = \sum_{u \ge 0} F_{ij}(t, u)$.

Список литературы

1. *Zadeh L. A.* Fuzzy Sets // Inf. And Control. 1965. № 8. P. 338–353.
2. *Zadeh L. A.* Probability measures of fuzzy events // J. Math. Anal. 1968. № 23, appl. P. 421–427.
3. *Takeda E., Nishida T.* Multiple Criteria Decision Problems with Fuzzy Domination Structures // Fuzzy Sets and Systems. 1980. № 3. P. 123–136.
4. *Verdegay J. I.* Fuzzy Mathematical Programming // Fuzzy Information and Decision Processes. North-Holland Publishing Company, 1982. P. 231–237.
5. *Ralescu D., Adams G.* The Fuzzy Integral // J. Math. Anal. 1980. № 75, appl. P 562–570.
6. *Куратовкий К.* Топология / Пер. с англ. М.: Мир, 1968. Т. 1–2.
7. *Казанцев С. В. и др.* Интервальный анализ данных / С. В. Казанцев, А. В. Павлов, В. Н. Павлов // Методы анализа динамики экономических процессов. Новосибирск: Изд-во ИЭОПП СО РАН, 2001. С. 3–17.

8. *Павлов А. В.* О некоторых свойствах мер, порожденных интервальным представлением данных // Динамика экономических процессов: методы моделирования и анализа. Новосибирск: Изд-во ИЭОПП СО РАН, 2002. С. 184–198.

9. *Боровков А. А.* Математическая статистика. М.: Наука, 1984.

10. *Баранов А. О. и др.* Исследование экономики России с использованием межотраслевых моделей / А. О. Баранов, В. М. Гильмундинов, В. Н. Павлов. Новосибирск: Наука, 2001. 198 с.