УДК 517.9

М. В. Нещадим

СКОБКИ ЛИ НА ПРОСТРАНСТВЕ ГЛАДКИХ ФУНКЦИЙ ИЗ R^1 В R^2*

В работе рассматривается проблема классификации структур локальных алгебр Ли на пространстве $C^\infty(R^n, R^m)$. При $n = 1$, $m = 2$ для симметричных аналитических скобок Ли первого порядка получена полная классификация по модулю действия группы $GL_2(F)$, F — пространство аналитических функций одной переменной.

Введение

В работе А. А. Кириллова [1] введено понятие локальной алгебры Ли на пространстве бесконечно дифференцируемых сечений гладкого вещественного векторного расслоения E над многообразием M. В частности, если $E = R^n \times R^m$, $M = R^n$, то [1, Лемма 1] скобка Ли на пространстве $R^{n,m} \equiv C^\infty(R^n, R^m)$ определяется формулой

$$[u, v]^s = \sum A_{ijkl}(x)\partial^k u^i \partial^l v^j, \tag{1}$$

где $x = (x^1, \dots, x^n)$ — набор переменных, $A_{ijkl}(x) \in C^\infty(R^n)$, $s, i, j = 1, \dots, m$, ∂^k, ∂^l — сокращенное обозначение для операторов $\frac{\partial}{\partial x_1}^{k_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}^{k_n}$ и $\frac{\partial}{\partial x_1}^{l_1} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}^{l_n}$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, $l = (l_1, \dots, l_n)$ — мультииндексы, $[u, v]^s$, u^i, v^j — компоненты вектор-функций $[u, v]$, u, $v \in R^{n,m}$. Суммирование в формуле (1) идет по всевозможным значениям целых неотрицательных индексов, причем только конечное число функций $A_{ijkl}(x)$ отлично от нуля.

Отображение $(u, v) \longmapsto [u, v]$ должно удовлетворять стандартным соотношениям алгебры Ли

$$[u, v] + [v, u] = 0,$$
$$[\alpha u + \beta v, w] = \alpha[u, w] + \beta[v, w],$$
$$[[u, v], w] + [[v, w], u] + [[w, u], v] = 0,$$

где α, β — произвольные вещественные числа, u, v, w — произвольные элементы пространства $R^{n,m}$.

В работе [1] был поставлен вопрос о классификации локальных алгебр Ли с неодномерным слоем, например, для пространства $R^{1,2}$.

В этой работе получена классификация скобок Ли на пространстве $R^{1,2}$ в самом простейшем случае: порядок скобки Ли не превосходит единицы (определение порядка дано в § 1), «тензор» $A_{ijkl}(x)$ при производных старшего порядка симметричен по индексам i, j и все коэффициенты $A_{ijkl}(x)$ являются аналитическими функциями от переменной x. Классификация проводится по модулю действия группы $GL_2(F)$, F — пространство аналитических функций от переменной x (действие группы на скобках Ли введено в § 2).

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00439) и Интеграционного гранта СО РАН (проекты № 48, 2.15–2006).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2007. Т. 7, вып. 4. С. 74–88

В § 1 помимо введения порядка скобки Ли показывается, что при $m \geq 2$ есть скобки Ли сколь угодно большого порядка (при $m = 1$ это не так, см. [1, Лемма 2]). Основные результаты сформулированы в теоремах 1 и 2. Теорема 1 утверждает, что аналитических симметричных скобок Ли первого порядка ровно шесть, а теорема 2 утверждает, что с точностью до изоморфизма эти скобки Ли задают пять неизоморфных структур алгебры Ли на пространстве $R^{1,2}$.

Все рассуждения имеют локальный характер, т. е. в области аналитичности всех рассматриваемых функций.

§ 1. Порядок скобки Ли

Определение. Пусть N — целое неотрицательное число. Будем говорить, что скобка Ли (1) имеет порядок N, если в правой части (1) порядок старшей производной не превосходит N и есть ненулевая производная порядка N.

В [1] показано, что при $m = 1$ порядок скобки не может быть больше 1. При $m \geq 2$ это уже не так, как показывает следующий

Пример. На пространстве $R^{1,2}$ определим скобку формулой

$$[u, v]^k = \sum_{s=0}^{N} \sum_{p+q=s} A^k_{p,q}(x) D^p u^1 D^q v^1, \tag{2}$$

где $k = 1, 2$, $A^1_{p,q}(x) = 0$, s, p, q — целые неотрицательные числа, $D = \frac{d}{dx}$, x — переменная. При любых $A^2_{p,q}(x)$, с условием $A^2_{p,q} + A^2_{q,p} = 0$, отображение (2) задает скобку Ли.

(Проверка тождества Якоби сводится к проверке соотношения $[[u, v], w] = 0$.)

Ясно, что этот пример обобщается на произвольные $n \geq 1$ и $m \geq 2$.

Поэтому в качестве одного из классифицирующих параметров скобок Ли на пространствах $R^{n,m}$ можно взять порядок скобки.

§ 2. Действие группы GL_m на скобках Ли

Группа $G = GL_m$ невырожденных матриц порядка m с элементами из $C^\infty(R^n)$ естественным образом действует на множестве всех скобок Ли пространства $R^{n,m}$ по правилу

$$[\ ,\ ] \longmapsto [\ ,\ ]_P, \tag{3}$$

где $P \in G$ и $[u, v]_P = P^{-1}[Pu, Pv]$ для любых элементов $u, v \in R^{n,m}$.

Непосредственно проверяется, что скобка $[\ ,\ ]_P$ действительно является скобкой Ли на пространстве $R^{n,m}$. (Отметим, что вместо группы GL_m можно рассматривать произвольную группу G преобразований пространства $R^{n,m}$.)

Естественно возникает проблема классификации скобок Ли относительно преобразования эквивалентности, индуцированного действием группы G.

Отметим, что относительно действия группы GL_m порядок скобки Ли является инвариантом.

Далее рассматривается группа GL_m только с аналитическими коэффициентами.

§ 3. Скобки Ли первого порядка от одной переменной

Скобка Ли первого порядка на пространстве $R^{1,m}$ имеет следующее представление:

$$[u,v]^k = A^k_{ij}u^iv^j + B^k_{ij}Du^iv^j + C^k_{ij}u^iDv^j + E^k_{ij}Du^iDv^j, \tag{4}$$

где $u = (u^1,\dots,u^m)$, $v = (v^1,\dots,v^m)$, $i,j,k = 1,\dots,m$, A^k_{ij}, B^k_{ij}, C^k_{ij}, E^k_{ij} — некоторые гладкие функции от переменной x, $D = \frac{d}{dx}$. Здесь и далее мы используем тензорное правило суммирования по повторяющемуся верхнему и нижнему индексу в одном мономе.

Из соотношения кососимметричности

$$[u,v] + [v,u] = 0 \tag{5}$$

следует, что коэффициенты A^k_{ij}, B^k_{ij}, C^k_{ij}, E^k_{ij} должны удовлетворять соотношениям

$$A^k_{ij} + A^k_{ji} = 0, \quad B^k_{ij} + C^k_{ji} = 0, \quad E^k_{ij} + E^k_{ji} = 0. \tag{6}$$

Следовательно, скобку (4) можно переписать в виде

$$[u,v]^k = A^k_{ij}u^iv^j + B^k_{ij}(Du^iv^j - u^jDv^i) + E^k_{ij}Du^iDv^j. \tag{7}$$

Из тождества Якоби

$$[[u,v],w] + [[v,w],u] + [[w,u],v] = 0 \tag{8}$$

следует, что коэффициенты A^k_{ij}, B^k_{ij}, E^k_{ij} должны удовлетворять также соотношениям

$$A^k_{i(j}A^i_{pq)} + B^k_{i(j}DA^i_{pq)} = 0, \tag{9}$$

$$\begin{split} A^k_{ij}B^i_{pq} - A^k_{iq}B^i_{pj} + B^k_{ij}A^i_{pq} + B^k_{iq}A^i_{jp} +\\ + B^k_{ij}DB^i_{pq} - B^k_{iq}DB^i_{pj} - B^k_{pi}A^i_{qj} + E^k_{ip}DA^i_{qj} = 0, \end{split} \tag{10}$$

$$\begin{split} A^k_{ij}E^i_{pq} + B^k_{ij}B^i_{pq} - B^k_{ij}B^i_{qp} - B^k_{ij}DE^i_{pq} - B^k_{pi}B^i_{qj} +\\ B^k_{qi}B^i_{pj} + E^k_{ip}A^i_{qj} + E^k_{iq}A^i_{jp} + E^k_{ip}DB^i_{qj} - E^k_{iq}DB^i_{pj} = 0, \end{split} \tag{11}$$

$$B^k_{ij}B^i_{pq} - B^k_{iq}B^i_{pj} = 0, \tag{12}$$

$$B^k_{(j|i|}E^i_{pq)} - E^k_{i(j}B^i_{pq)} + E^k_{i(j}B^i_{qp)} - E^k_{i(j}DE^i_{pq)} = 0, \tag{13}$$

$$B^k_{ij}E^i_{pq} - E^k_{iq}B^i_{pj} = 0, \tag{14}$$

$$E^k_{ij}E^i_{pq} = 0. \tag{15}$$

Круглые скобки в нижних индексах соответствуют операции симметрирования по индексам, заключенным в них. А прямые скобки соответствуют операции исключения индекса из под действия операции симметрирования.

Замечание. Если обозначить $B_j = (B^k_{ij})$, $j = 1,\dots,m$ то соотношение (12) означает, что матрицы B_j перестановочны относительно операции умножения матриц.

В случае $m = 2$ справедливо равенство $E^k_{ij} = 0$ для всех индексов $i,j,k = 1,2$. Действительно, если положить $k = 1$, $j = 2$, $p = 1$, $q = 2$, то соотношение (15) примет вид $E^1_{i2}E^i_{12} = 0$.

В силу (6) отсюда $E^1_{12} = 0$, т. е. $E^1_{ij} = 0$. Аналогично получаем $E^2_{ij} = 0$.

Итак, в случае $m = 2$ скобка (7) представима в виде

$$[u, v]^k = A^k_{ij} u^i v^j + B^k_{ij} (Du^i v^j - u^j Dv^i), \tag{16}$$

а полная система определяющих соотношений на коэффициенты A^k_{ij}, B^k_{ij} имеет вид

$$A^k_{ij} + A^k_{ji} = 0, \tag{17}$$

$$A^k_{i(j} A^i_{pq)} + B^k_{i(j} DA^i_{pq)} = 0, \tag{18}$$

$$A^k_{ij} B^i_{pq} - A^k_{iq} B^i_{pj} + B^k_{ij} A^i_{pq} + B^k_{iq} A^i_{jp} + B^k_{ij} DB^i_{pq} - B^k_{iq} DB^i_{pj} - B^k_{pi} A^i_{qj} = 0, \tag{19}$$

$$B^k_{ij} B^i_{pq} - B^k_{ij} B^i_{qp} - B^k_{pi} B^i_{qj} + B^k_{qi} B^i_{pj} = 0, \tag{20}$$

$$B^k_{ij} B^i_{pq} - B^k_{iq} B^i_{pj} = 0. \tag{21}$$

Преобразования эквивалентности (3) в случае скобок первого порядка (7) принимают вид

$$\widetilde{A}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k A^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta + Q^s_k B^k_{ij} (DP^i_\alpha P^j_\beta - P^j_\alpha DP^i_\beta) + Q^s_k E^k_{ij} DP^i_\alpha DP^j_\beta, \tag{22}$$

$$\widetilde{B}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k B^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta + Q^s_k E^k_{ij} P^i_\alpha DP^j_\beta, \tag{23}$$

$$\widetilde{E}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k E^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta, \tag{24}$$

где $Q = P^{-1}$.

Если $E^k_{ij} = 0$ (например, при $m = 2$), то эти формулы упрощаются и принимают вид

$$\widetilde{A}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k A^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta + Q^s_k B^k_{ij} (DP^i_\alpha P^j_\beta - P^j_\alpha DP^i_\beta), \tag{25}$$

$$\widetilde{B}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k B^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta. \tag{26}$$

Далее мы будем для краткости называть A^k_{ij}, B^k_{ij} тензорами, хотя тензором является только B^k_{ij}.

Все дальнейшие исследования связаны со случаем $m = 2$.

§ 4. Приведение к случаю $A^k_{ij} = 0$, соотношения на тензор B^k_{ij}

Покажем, что при $m = 2$ всегда можно найти преобразование, приводящее тензор A^k_{ij} к нулевому. Рассуждать будем от противного. Предположим, что найдется скобка Ли такая, что тензор A^k_{ij} не приводится к нулевому виду. Это означает, что уравнение

$$Q^s_k A^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta + Q^s_k B^k_{ij} (DP^i_\alpha P^j_\beta - P^j_\alpha DP^i_\beta) = 0$$

не имеет решений $P \in GL_2$. Ясно, что его можно переписать в равносильной форме

$$A^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta + B^k_{ij} (DP^i_\alpha P^j_\beta - P^j_\alpha DP^i_\beta) = 0. \tag{27}$$

Обозначим $u = (P^i_1)$, $v = (P^i_2)$. Тогда (27) означает, что $[u, v] = 0$. Так как матрица P невырождена, то вектора u, v линейно независимы. Итак, если тензор A^k_{ij} не приводится к нулевому виду, то для любых линейно независимых векторов u, v скобка Ли $[u, v]$ не равна нулю.

Перепишем (27) для $u = (P_1^i)$, $v = (P_2^i)$ в равносильной форме

$$v^j B_{ij}^k Du^i = u^j B_{ij}^k Dv^i - A_{ij}^k u^i v^j. \tag{28}$$

При фиксированном векторе v соотношение (28) является обыкновенным дифференциальным уравнением на вектор u. Поэтому оно не должно быть разрешено относительно Du, т. е.

$$\det(v^j B_{ij}^k) = 0 \tag{29}$$

для любого v. (Необходимо учесть, что если решение v существует, то оно зависит от двух произвольных констант, задавая которые всегда можно сделать матрицу P невырожденной.)

Величины B_{ij}^k преобразуются по тензорному закону (26). Поэтому свертка B_{kj}^k является ковариантным вектором и может быть приведена невырожденным преобразованием к виду (если, конечно $B_{ij}^k \neq 0$)

$$B_{k1}^k = 1,\ \ B_{k2}^k = 0,$$

т. е.

$$tr(B_1) = 1,\ \ tr(B_2) = 0, \tag{30}$$

где $B_j = (B_{ij}^k)$, $j = 1, 2$.

Так как $\det B_1 = \det B_2 = 0$, то матрицы B_1 и B_2 имеют нулевое собственное число. Из (30) следует, что матрица B_1 имеет также собственное число равное единице и поэтому приводится к диагональному виду

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

некоторым невырожденным преобразованием. Ввиду того, что $B_1 B_2 = B_2 B_1$ (см. замечание после формулы (15)), матрица B_2 также приводится к диагональному виду тем же преобразованием. Тогда из соотношений $\det B_2 = 0$ и $tr(B_2) = 0$ следует, что $B_2 = 0$. Итак,

$$B_2 = 0,\ \ \det B_1 = 0,\ \ tr(B_1) = 1. \tag{31}$$

Обратимся теперь к соотношению (20). Ввиду (21) его можно переписать в виде

$$(B_{iq}^k + B_{qi}^k) B_{pj}^i = (B_{ip}^k + B_{pi}^k) B_{qj}^i. \tag{32}$$

Положим $j = 1$, $p = 1$, $q = 2$, $k = 1$. Получим

$$(B_{i2}^1 + B_{2i}^1) B_{11}^i = (B_{i1}^1 + B_{1i}^1) B_{21}^i.$$

Так как $B_2 = 0$, то

$$B_{21}^1 (B_{11}^1 + B_{21}^2) = 0.$$

Из условия $tr(B_1) = 1$ получаем, что

$$B_{21}^1 = 0. \tag{33}$$

Подставим в (32) $j = 1$, $p = 1$, $q = 2$, $k = 2$. Получим, учитывая (33), что

$$B_{21}^2 B_{11}^1 = B_{21}^2 B_{21}^2.$$

Так как $\det B_1 = B^1_{11} B^2_{21} = 0$, то $B^2_{21} = 0$, и, следовательно,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B^2_{11} & 0 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Рассмотрение других возможных значений индексов j, p, q, k ничего нового не дает.

Обратимся к соотношениям (19).

Подставим $j = 2$, $p = 1$, $q = 1$, $k = 1$. Получим $A^1_{21} = 0$.

Так как матрица A^1_{ij} кососимметрична, то $A^1_{ij} = 0$.

Подставим $j = 1$, $p = 1$, $q = 2$, $k = 2$. Получим $A^2_{12} = 0$.

Так как матрица A^2_{ij} кососимметрична, то $A^2_{ij} = 0$.

Итак, тензор A^k_{ij} тождественно равен нулю. Это противоречит предположению о том, что A^k_{ij} не приводится к нулевому виду.

Таким образом, доказано, что при $m = 2$ *всегда найдутся линейно независимые вектора* u, v *такие, что* $[u, v] = 0$ *и, следовательно, тензор* A^k_{ij} *для любой скобки Ли* (16) *может быть приведен к нулевому виду преобразованием* (25).

Система соотношений (17)–(21) в случае $A^k_{ij} = 0$ принимает вид

$$B^k_{ij} D B^i_{pq} = B^k_{iq} D B^i_{pj}, \tag{35}$$

$$(B^k_{iq} + B^k_{qi}) B^i_{pj} = (B^k_{ip} + B^k_{pi}) B^i_{qj}, \tag{36}$$

$$B^k_{ij} B^i_{pq} = B^k_{iq} B^i_{pj}. \tag{37}$$

Преобразования эквивалентности (26) принимают вид

$$\widetilde{B}^s_{\alpha\beta} = Q^s_k B^k_{ij} P^i_\alpha P^j_\beta, \tag{38}$$

а (25) становится соотношением

$$B^k_{ij} (D P^i_\alpha P^j_\beta - P^j_\alpha D P^i_\beta) = 0. \tag{39}$$

§ 5. Решение определяющих уравнений в случае $B^k_{ij} = B^k_{ji}$, $m = 2$

В предположении $B^k_{ij} = B^k_{ji}$ соотношение (36) выполняется тождественно. Поэтому система определяющих соотношений на тензор B^k_{ij} имеет вид

$$B^k_{ij} D B^i_{pq} = B^k_{iq} D B^i_{pj}, \tag{40}$$

$$B^k_{ij} B^i_{pq} = B^k_{iq} B^i_{pj}, \tag{41}$$

$$B^k_{ij} = B^k_{ji}. \tag{42}$$

Далее мы найдем общее решение системы (40)–(42).

Соотношение (41) в развернутой форме имеет вид

$$B^2_{11} B^1_{22} - B^2_{12} B^1_{12} = 0, \tag{43}$$

$$B^2_{12} B^1_{22} - B^2_{22} B^1_{12} = B^1_{22} B^1_{11} - B^1_{12} B^1_{12}, \tag{44}$$

$$B^2_{12} B^1_{11} - B^2_{11} B^1_{12} = B^2_{11} B^2_{22} - B^2_{12} B^2_{12}. \tag{45}$$

Из уравнений (43)–(45) получим некоторые следствия.

Перепишем (44) и (45) в виде

$$B^1_{22}(B^2_{12} - B^1_{11}) = B^1_{12}(B^2_{22} - B^1_{12}), \tag{46}$$

$$B^2_{12}(B^1_{11} + B^2_{12}) = B^2_{11}(B^2_{22} + B^1_{12}). \tag{47}$$

Домножим (46) на B^2_{12}, (47) на B^1_{22} и сложим. В силу (43) полученное соотношение равносильно тому, что

$$B^1_{22}(B^2_{11}B^2_{22} - B^2_{12}B^2_{12}) = 0. \tag{48}$$

Аналогично получаются еще три соотношения:

$$B^2_{12}(B^1_{22}B^1_{11} - B^1_{12}B^1_{12}) = 0, \tag{49}$$

$$B^1_{12}(B^2_{22}B^2_{11} - B^2_{12}B^2_{12}) = 0, \tag{50}$$

$$B^2_{11}(B^1_{22}B^1_{11} - B^1_{12}B^1_{12}) = 0. \tag{51}$$

Пусть

$$B^1_{22}B^1_{11} - B^1_{12}B^1_{12} \neq 0. \tag{52}$$

Тогда из (49) и (51) получаем, что

$$B^2_{12} = B^2_{11} = 0. \tag{53}$$

Следовательно, матрица (B^2_{ij}) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}.$$

Далее воспользуемся тем, что для скалярной матрицы $P = \left(\begin{smallmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{smallmatrix}\right)$, где λ — некоторая ненулевая функция, преобразование (25) переводит нулевой тензор A^k_{ij} в нулевой. Поэтому можно считать, что

$$(B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Но если матрица (B^2_{ij}) нулевая, то из (44) следует, что $B^1_{22}B^1_{11} - B^1_{12}B^1_{12} = 0$, что противоречит предположению (52). Итак,

$$(B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и соотношения (43)–(45) принимают вид

$$\begin{cases} B^2_{12} = B^2_{11} = 0, \ \ B^2_{22} = 1, \\ B^1_{11}B^1_{22} = B^1_{12}B^1_{12} - B^1_{12}, \ \ B^1_{12} \neq 0. \end{cases} \tag{54}$$

Соотношение (40) ввиду (54) равносильно системе

$$B^1_{12}DB^1_{11} = B^1_{11}DB^1_{12}, \quad B^1_{12}DB^1_{12} = B^1_{11}DB^1_{22}. \tag{55}$$

Отсюда

$$B^1_{12} = cB^1_{22} + c_1,\ \ B^1_{11} = c^2 B^1_{22} + cc_1, \tag{56}$$

где c и c_1 — некоторые вещественные числа. Подставляя (56) в (54), получим

$$B^1_{12} = cb + 1,\ \ B^1_{11} = c(cb+1),\ \ B^1_{22} = b, \tag{57}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция.

Аналогично условию (52) можно рассмотреть условие

$$B^2_{22}B^2_{11} - B^2_{12}B^2_{12} \neq 0.$$

Получим представление аналогичное (57).

Далее рассмотрим случай

$$B^1_{22}B^1_{11} - B^1_{12}B^1_{12} = B^2_{22}B^2_{11} - B^2_{12}B^2_{12} = 0. \tag{58}$$

Соотношения (43)–(46) примут вид

$$B^2_{11}B^1_{22} - B^2_{12}B^1_{12} = B^2_{12}B^1_{22} - B^2_{22}B^1_{12} = B^2_{12}B^1_{11} - B^2_{11}B^1_{12} = 0. \tag{59}$$

Пусть $B^1_{11} \neq 0$. За счет преобразования (26) со скалярной матрицей P можно добиться, чтобы $B^1_{11} = 1$. Ввиду (58)

$$B^1_{12} = p, \quad B^1_{22} = p^2 \tag{60}$$

для некоторой функции $p = p(x)$.

Подставляя (60) в (59), получим

$$B^2_{11}p^2 = B^2_{12}p, \quad B^2_{12}p^2 = B^2_{22}p, \quad B^2_{12} = B^2_{11}p. \tag{61}$$

Отсюда при $p = 0$

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{62}$$

и при $p \neq 0$

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & p^2 \end{pmatrix},\ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & bp \\ bp & bp^2 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

для некоторой функции $b = b(x)$. Подставляя (63) в (40), находим, что функции $b(x)$ и $p(x)$ связаны соотношением

$$(1 + pb)Dp = 0. \tag{64}$$

Пусть $B^1_{11} = 0$. Тогда из (58) следует, что $B^1_{12} = 0$. За счет преобразования (26) со скалярной матрицей P можно добиться, чтобы

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{ или } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В первом случае из (59) получаем

$$(B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},$$

для некоторой функции $b = b(x)$. Соотношения (40) ничего нового не дают.

Остается рассмотреть случай, когда одна из матриц (B^1_{ij}), (B^2_{ij}) нулевая.

Пусть, например,

$$(B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда (43)–(45) равносильны одному соотношению

$$B^1_{11}B^1_{22} - B^1_{12}B^1_{12} = 0.$$

Но тогда справедливы все рассуждения начиная с формулы (58).

Итак, доказано

Предложение. *Все решения системы* (40)–(42) *для* $m = 2$ *по модулю преобразований* (26) *со скалярной матрицей* P *исчерпываются следующими:*

1)

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} c(1+bc) & 1+bc \\ 1+bc & b \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

или

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 1+bc \\ 1+bc & c(1+bc) \end{pmatrix}, \tag{66}$$

для некоторой вещественной константы c *и функции* $b = b(x)$;

2)

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{67}$$

или

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{68}$$

для некоторой функции $b = b(x)$;

3)

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & p^2 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & bp \\ bp & bp^2 \end{pmatrix}, \tag{69}$$

для некоторых функций $b=b(x)$ *и* $p=p(x)$, *связанных соотношением* (64);

4)

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{70}$$

для некоторой функции $b = b(x)$;

5)

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{71}$$

§ 6. Классификация относительно действия группы GL_2

В этом параграфе по модулю действия группы GL_2 находятся представители смежных классов скобок Ли. Рассмотрим решения (65)–(71), описанные в § 5.

1) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{72}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция.

Если $b = 0$, то не преобразуем скобку. Если $b \neq 0$, то преобразование

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{b^2} & 0 \\ \frac{1}{b} & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводит скобку (72) в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Тензор A^k_{ij} нулевой, как до преобразования, так и после. Если тензор A^k_{ij} становится ненулевым после преобразования, то это будет специально оговорено.

2) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{73}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция.

Если $b = 0$, то не преобразуем скобку. Если $b \neq 0$, то преобразование

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводит скобку (73) в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \tag{74}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция.

Если $b \neq 0$, то преобразование

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводит скобку (74) в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 1+bc \\ 1+bc & c(1+bc) \end{pmatrix}, \tag{75}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция, c — вещественное число.

Если $c(1+bc) \neq 0$, то скобка (75) преобразованием

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1+bc & c(1+bc) \end{pmatrix}$$

по формуле (38) получается из скобки

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $(1+bc) = 0$, то скобка имеет вид

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и рассматривалась в п. 2.

Если $c = 0$, то скобка имеет вид

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и преобразованием

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -b & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводится в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} c(1+bc) & 1+bc \\ 1+bc & b \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{76}$$

где $b = b(x)$ — некоторая функция, c — вещественное число.

Если $c(1+bc) \neq 0$, то скобка (76) преобразованием

$$P = \begin{pmatrix} c(1+bc) & 1+bc \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) получается из скобки

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Если $(1+bc) = 0$, то скобка имеет вид

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и под действием скалярной матрицы приводится к случаю, рассмотренному в § 1.

Если $c = 0$, то скобка имеет вид

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и преобразованием

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводится в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Замечание. Преобразование

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

переводит скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) Скобка

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & p \\ p & p^2 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} b & bp \\ bp & bp^2 \end{pmatrix}, \tag{77}$$

где $b = b(x)$, $p = p(x)$ — некоторые функции, связанные соотношением

$$(1 + pb)Dp = 0.$$

Если $p = 0$, то получаем уже рассмотренный случай в § 2. Поэтому можно считать, что $p \neq 0$.

Если $Dp = 0$, то преобразование

$$P = \begin{pmatrix} p & 0 \\ -1 & \frac{1}{p} \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводит скобку (77) в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 + pb \end{pmatrix}.$$

Этот случай уже рассматривался в § 1.

Если $Dp \neq 0$ и $1 + pb = 0$, то преобразование

$$P = \begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ -p & 1 \end{pmatrix}$$

по формуле (38) переводит скобку (77) в скобку

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

но при этом по формуле (24) получаем ненулевой тензор

$$(A^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{Dp}{p} \\ -\frac{Dp}{p} & 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Преобразованием

$$P = \begin{pmatrix} \left(\frac{p}{Dp}\right)^2 & 0 \\ 0 & \frac{p}{Dp} \end{pmatrix}$$

по формулам (24), (25) получаем окончательно тензора

$$(A^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, доказана

Теорема 1. *Любая аналитическая скобка* $(A^k_{ij},\ B^k_{ij})$ *с условием* $B^k_{ij} = B^k_{ji}$ *по модулю действия группы* GL_2 *эквивалентна одной из следующих скобок:*

1)

$$(A^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) $(A^k_{ij}) \equiv 0$ *и*

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) $(A^k_{ij}) \equiv 0$ *и*

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4) $(B^k_{ij}) \equiv 0$ *и*

$$(A^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (A^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

5) $(A^k_{ij}) \equiv 0$ *и*

$$(B^1_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (B^2_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6) $(A^k_{ij}) \equiv 0$ *и* $(B^k_{ij}) \equiv 0$.

Случай 4 теоремы следует из того, что при $B_{ij}^k = 0$ величины A_{ij}^k имеют только две ненулевые компоненты, которые преобразуются как псевдовектор.

Можно показать, что полученные скобки не эквивалентны относительно действия группы GL_2. Для этого достаточно проанализировать их возможные образы относительно преобразований из GL_2. Но мы этого делать не будем, так как в следующем параграфе на основании алгебраических свойств получим более сильное утверждение.

§ 7. Алгебраические свойства

В этом пункте рассмотрим некоторые алгебраические свойства полученных скобок. В частности, получим, что скобки 2)–6) отличаются некоторыми характеристическим свойствами, т. е. теми, которые сохраняются при изоморфизмах. Скобка 1) задает структуру алгебры Ли такую же, как скобка 4). Следовательно, с точностью до изоморфизма будет ровно пять неизоморфных скобок.

Введем обозначения

$$M = R^{1,2}, \quad K = \{(f, 0) \in M\}, \quad L = \{(0, g) \in M\}.$$

Через $Z(M)$ обозначим центр алгебры M относительно скобки Ли. Если U, V — подмножества в M, то $[U, V]$ — их взаимный коммутант, т. е. подалгебра, порожденная всеми коммутаторами вида $[u, v]$, где $u \in U$, $v \in V$. В частности, $M' = [M, M]$, $K' = [K, K]$, $L' = [L, L]$.

Далее мы приводим формулу для вычисления скобки Ли в соответствии с предложением § 7 и указываем некоторые её алгебраические свойства.

1) Скобка $[u, v] = (u^1v^2 - u^2v^1 + Du^2v^2 - u^2Dv^2, 0)$.

Свойства

$$K' = 0, \quad L' = L, \quad [K, L] = K, \quad K \triangleleft M,$$
$$M' = K, \quad M'' = 0, \quad Z(M) = 0.$$

2) Скобка $[u, v] = (Du^1v^1 - u^1Dv^1, Du^2v^2 - u^2Dv^2)$.

Свойства

$$K' = K, \quad L' = L, \quad [K, L] = 0, \quad K,\, L \triangleleft M,$$
$$M = K \oplus L, \quad M' = M, \quad Z(M) = 0.$$

3) Скобка $[u, v] = (Du^1v^1 - u^1Dv^1, 0)$.

Свойства

$$K' = K, \quad L' = 0, \quad [K, L] = 0, \quad K,\, L \triangleleft M,$$
$$M = K \oplus L, \quad M' = K, \quad M'' = M', \quad Z(M) = L.$$

4) Скобка $[u, v] = (u^1v^2 - u^2v^1, 0)$.

Свойства

$$K' = 0, \quad L' = 0, \quad [K, L] = K, \quad K \triangleleft M,$$
$$M' = K, \quad M'' = 0, \quad Z(M) = 0.$$

Наличие одинаковых алгебраических свойств скобок 1) и 4) наводит на мысль, что соответствующие алгебры Ли изоморфны. Действительно изоморфизм задается отображением

$$(u^1, u^2) \longmapsto (u^1 + Du^2, u^2).$$

Но так как для скобки 1) тензор B_{ij}^k нетривиален, а для скобки 4) тривиален, то они не эквивалентны относительно действия группы GL_2.

5) Скобка $[u,v] = (Du^1v^2 - u^2Dv^1 + Du^2v^1 - u^1Dv^2, Du^2v^2 - u^2Dv^2)$.

Свойства

$$K^{'} = 0, \quad L^{'} = L, \quad [K,L] = K, \quad K \triangleleft M,$$
$$M^{'} = M, \quad Z(M) = 0.$$

Покажем, что K — единственный нетривиальный идеал в M. Рассмотрим фактор-алгебру M/K. Так как M/K — простая, то либо $M/K = I/K \cap I$, либо $I/K \cap I = 0$. Во втором случае $I \subseteq K$. В первом случае рассмотрим $[I,K]$. Если $u = (u^1, u^2) \in I$, $u^2 \neq 0$, то $[u,K] = K$. Поэтому $K \subseteq I$ или $I \subseteq K$. Но если $K \subseteq I$, то $I = M$. Итак, алгебра M имеет единственный нетривиальный идеал K.

6) Скобка $[u,v] = (0,0)$. Алгебра M коммутативная.

Итак, доказана

Теорема 2. *Любая локальная алгебра Ли $R^{1,2}$ с аналитической скобкой Ли первого порядка A_{ij}^k, B_{ij}^k, где $B_{ij}^k = B_{ji}^k$, с точностью до изоморфизма может быть задана одной и только одной из следующих скобок:*

1) $[u,v] = (Du^1v^1 - u^1Dv^1, Du^2v^2 - u^2Dv^2)$,
2) $[u,v] = (Du^1v^1 - u^1Dv^1, 0)$,
3) $[u,v] = (u^1v^2 - u^2v^1, 0)$,
4) $[u,v] = (Du^1v^2 - u^2Dv^1 + Du^2v^1 - u^1Dv^2, Du^2v^2 - u^2Dv^2)$,
5) $[u,v] = (0,0)$.

Список литературы

1. *Кириллов А. А.* Локальные алгебры Ли // УМН. 1976. Т. 31, № 4. С. 57–76 (Поправка: УМН. 1977. Т. 32, № 1. С. 266).

Материал поступил в редколлегию 20.10.2006

Адрес автора
НЕЩАДИМ Михаил Владимирович
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск, 90
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: neshch@math.nsc.ru