УДК 519.21

В. И. Лотов

ОБ АСИМПТОТИКЕ МОМЕНТОВ СУПРЕМУМА ТРАЕКТОРИИ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С МАЛЫМ СНОСОМ*

В условиях типа Крамера получены четыре члена асимптотических разложений для первых двух моментов супремума траектории случайного блуждания, у которого снос стремится к нулю.

Пусть $X_n,\ n \geq 1$ — независимые одинаково распределенные случайные величины. Рассматриваются частичные суммы $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ и их супремум

$$S = \sup(0, S_1, S_2, \ldots).$$

Если $\mathbf{E}X_1 < 0$, то $\mathbf{P}(S < \infty) = 1$. В то же время супремум траектории равен бесконечности, если скачки случайного блуждания имеют нулевое среднее. Поэтому при $\mathbf{E}X_1 = -\varepsilon < 0,\ \ \varepsilon \to 0$, может наблюдаться рост значений S. Целью данной работы является получение асимптотических разложений для $\mathbf{E}S$ и $\mathbf{E}S^2$ в этой ситуации.

Интерес к изучению поведения распределения супремума последовательных сумм и его моментов при условии, что снос траектории стремится к нулю, обусловлен прежде всего известными приложениями к задачам теории систем обслуживания в условиях тяжелой нагрузки. Бо́льшая часть публикаций в этом направлении относится к получению предельных теорем для распределения S [1–5]. В ряде работ исследовался также первый член асимптотики для $\mathbf{E}S$ [1, 6–8].

Основное внимание в данной статье будет уделено нахождению первых четырех членов асимптотики $\mathbf{E}S$ и $\mathbf{E}S^2$ при выполнении условий крамеровского типа на распределение X_1. Работа построена следующим образом. Сначала приводятся выражения для $\mathbf{E}S$ и $\mathbf{E}S^2$ через моменты распределения X_1 и моменты первой отрицательной суммы среди $S_1, S_2, \ldots$, а затем используются известные асимптотические разложения для последних.

Известно (например, [7]), что при $\mathbf{E}X_1 < 0$ условие $\mathbf{E}|X_1^+|^k < \infty$ обеспечивает существование момента $\mathbf{E}S^{k-1} < \infty$.

Пусть $\eta_- = \min\{k \geq 1 :\ S_k < 0\}$ — момент появления первой отрицательной суммы, $\chi_- = S_{\eta_-}$ — значение первой отрицательной суммы. Введем также $\eta_+ = \min\{k \geq 1 : S_k \geq 0\}$ и $\chi_+ = S_{\eta_+}$. Полагаем $\eta_+ = \infty$, если $S_k < 0$ при всех k; величина χ_+ в этой ситуации остается неопределенной.

Для случайных блужданий с отрицательным сносом известно [11], что для $k \geq 1$ выполнено $\mathbf{E}|\chi_-|^k < \infty$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{E}(X_1^-)^k < \infty$. В свою очередь, $\mathbf{E}\eta_-^k < \infty$ в том и только в том случае, когда $\mathbf{E}(X_1^+)^k < \infty$.

*Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, код проекта 08-01-00962, а также гранта поддержки научных школ НШ–3695.2008.1.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 1. С. 51–58

Введем обозначения

$$a_k = \mathbf{E}\chi_-^k, \quad m_k = \mathbf{E}X_1^k, \quad b_k = \mathbf{E}S^k.$$

Теорема 1. *Пусть $\{X_n\}_{n\geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых $\mathbf{E}X_1 < 0$ и $\mathbf{E}X_1^2 < \infty$. Тогда*

$$b_1 = \frac{a_2}{2a_1} - \frac{m_2}{2m_1}. \tag{1}$$

Если дополнительно $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$, то

$$b_2 = \frac{a_3}{6a_1} - \frac{m_3}{6m_1} - \frac{a_2 m_2}{4a_1 m_1} + \frac{m_2^2}{4m_1^2}. \tag{2}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $f(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda X_1}$, $Re\lambda = 0$, и пусть

$$R_\pm(\lambda) = 1 - \mathbf{E}(e^{\lambda\chi_\pm};\ \eta_\pm < \infty).$$

Введенные функции при $Re\lambda = 0$ обеспечивают факторизацию

$$1 - f(\lambda) = R_+(\lambda)R_-(\lambda).$$

Воспользуемся далее следующим известным соотношением [9]: при $Re\lambda = 0$

$$\mathbf{E}e^{\lambda S} = \frac{R_+(0)}{R_+(\lambda)} = \frac{R_+(0)R_-(\lambda)}{1 - f(\lambda)}, \tag{3}$$

в котором, как нетрудно видеть,

$$R_+(0) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{1 - f(\lambda)}{R_-(\lambda)} = \frac{m_1}{a_1} = \frac{1}{\mathbf{E}\eta_-}$$

в силу тождества Вальда. Ясно, что соотношение (3) позволяет выражать моменты случайной величины S через моменты случайных величин χ_- и X_1. Мы проведем эти вычисления для первых двух моментов S.

Предположим, что $\mathbf{E}|X_1|^3 < \infty$. Разлагая функции в ряды в окрестности нуля, получим для малых значений $|\lambda|$

$$\mathbf{E}e^{\lambda S} = 1 + b_1\lambda + \frac{b_2}{2}\lambda^2 + o\big(|\lambda|^2\big) =$$

$$= \frac{m_1(1 - \mathbf{E}(e^{\lambda\chi_-}))}{a_1(1 - f(\lambda))} = \frac{1 + \dfrac{a_2}{2a_1}\lambda + \dfrac{a_3}{6a_1}\lambda^2 + o\big(|\lambda|^2\big)}{1 + \dfrac{m_2}{2m_1}\lambda + \dfrac{m_3}{6m_1}\lambda^2 + o\big(|\lambda|^2\big)} =$$

$$= 1 + \left(\frac{a_2}{2a_1} - \frac{m_2}{2m_1}\right)\lambda + \left(\frac{a_3}{6a_1} - \frac{m_3}{6m_1} - \frac{a_2 m_2}{4a_1 m_1} + \frac{m_2^2}{4m_1^2}\right)\lambda^2 + o\big(|\lambda|^2\big),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Дальнейшие результаты основываются на теореме из [10], в которой устанавливаются асимптотические разложения моментов лестничной высоты для блужданий с малым положительным сносом. Для формулировки этого результата потребуется ряд обозначений.

Пусть $Y_n,\ n \geq 1$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, распределение которых $\mathbf{P}(Y_1 \in dt) = G_\theta(dt)$ принадлежит однопараметрическому семейству $\{G_\theta,\ \theta \in \Theta\}$, причем $G_\theta(dt) = e^{\theta t - \varphi(\theta)} G_0(dt)$. Предполагается, что Θ содержит окрестность нуля, $\varphi(0) = 0$, а также выполнено $\int t G_0(dt) = 0, \int t^2 G_0(dt) = 1$.

Семейства распределений, удовлетворяющие перечисленным выше условиям, называются в [10] *стандартными экспоненциальными семействами.* Существует большое количество работ ([10,12,13] и литература там), где изучаются распределения в граничных задачах для случайных блужданий, у которых распределения скачков принадлежат таким семействам.

В дальнейшем будет использоваться условие сильной нерешетчатости

$$\limsup_{|t|\to\infty} |\mathbf{E}_0 e^{\imath t Y_1}| < 1, \tag{4}$$

в котором число t предполагается вещественным. Обозначения $\mathbf{E}_\theta$, $\mathbf{P}_\theta$ соответствуют ситуации, когда $\mathbf{P}(Y_1 \in dt) = G_\theta(dt)$.

Кроме того, потребуются следующие обозначения. Пусть $T_n = Y_1 + \ldots + Y_n$, и пусть для $b \geq 0$ $\eta(b) = \inf\{n \geq 1 :\ T_n > b\}$, $R_b = T_{\eta(b)} - b$ — величина перескока через уровень b. Через R_∞ обозначим случайную величину, распределение которой совпадает с предельным для R_b при $b \to \infty$, если $\theta = 0$. Положим для $k > 0$

$$\alpha_k = \int_0^\infty (\mathbf{E}_0 R_t^k - \mathbf{E}_0 R_\infty^k)\, dU(t).$$

Здесь $U(t)$ — функция восстановления, соответствующая распределению $\mathbf{P}_0(\chi \in dt)$, случайная величина χ равна значению первой неотрицательной суммы в последовательности $-T_1, -T_2, \ldots$. Обозначим также $d_k = \mathbf{E}_0 R_0^k$.

Асимптотические разложения для моментов лестничной высоты нерешетчатого случайного блуждания T_n с малым положительным сносом первоначально были получены в [12] с точностью до линейного члена. Позже в [10] при дополнительном требовании сильной нерешетчатости было найдено уточнение этого результата, содержащее квадратичный член разложения. Мы приведем этот результат.

Теорема 2 (Chang). *Пусть распределение Y_1 принадлежит стандартному экспоненциальному семейству и выполнено условие сильной нерешетчатости* (4). *Тогда для любого $k > 0$ при $\theta \downarrow 0$ имеет место разложение*

$$\mathbf{E}_\theta R_0^k = d_k + \frac{k d_{k+1}}{k+1}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{k d_{k+2}}{k+2} - \alpha_k\right)\theta^2 + o(\theta^2).$$

Чтобы применить эту теорему для исходного случайного блуждания $\{S_n\}$ с отрицательным сносом, нам придется потребовать, чтобы распределение его скачков принадлежало стандартному экспоненциальному семейству $F_\theta(dt) = e^{\theta t - \psi(\theta)} F_0(dt)$ с указанными выше свойствами, включая условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} t F_0(dt) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} t^2 F_0(dt) = 1.$$

Ясно, что в этом случае распределение скачков блуждания будет удовлетворять следующему условию Крамера: при некоторых $\lambda_- < 0 < \lambda_+$

$$\text{(A)} \qquad \mathbf{E}\exp\{\lambda X_1\} < \infty, \quad \lambda_- \le \lambda \le \lambda_+, \quad f'(\lambda_+) > 0.$$

Как показывает следующее утверждение, условие (A) является достаточным для того, чтобы распределение принадлежало экспоненциальному семейству. Выполнение условия нормировки достигается рассмотрением случайной величины AX_1 вместо X_1 при соответствующем подборе константы $A > 0$.

Если выполнено условие (A) и $\mathbf{E}X_1 < 0$, то, очевидно, существует точка $\lambda_0 \in (0, \lambda_+)$, для которой $f'(\lambda_0) = 0$. Обозначим

$$\gamma = f(\lambda_0), \quad \delta = f''(\lambda_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2 e^{\lambda_0 t}\mathbf{P}(X_1 \in dt), \quad A^2 = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Теорема 3. *Пусть выполнено условие* (A) *и* $\mathbf{E}X_1 < 0$. *Тогда распределение случайной величины* $Z = AX_1$ *можно вложить в стандартное экспоненциальное семейство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$f_1(\lambda) = \mathbf{E}e^{\lambda Z} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{A\lambda t}\mathbf{P}(X_1 \in dt), \quad \mu_0 = \lambda_0/A, \quad \mu_\pm = \lambda_\pm/A.$$

Функция $f_1(\lambda)$ существует при $\lambda \in [\mu_-, \mu_+]$ и обладает свойствами $f_1'(\mu_0) = 0$, и

$$f_1''(\mu_0) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} A^2 t^2 e^{\lambda_0 t} F(dt) = \gamma = f_1(\mu_0).$$

Пусть $F(dt) = \mathbf{P}(Z \in dt)$. Обозначим $u(\lambda) = \log f_1(\lambda)$ и введем семейство распределений

$$F_\theta(dt) = e^{(\theta+\mu_0)t - u(\theta+\mu_0)}F(dt), \quad \theta \in [\mu_- - \mu_0, \mu_+ - \mu_0].$$

По-другому можно записать:

$$F_\theta(dt) = e^{\theta t - \psi(\theta)}F_0(dt), \quad \psi(\theta) = u(\theta + \mu_0) - u(\mu_0),$$
$$F_0(dt) = e^{\mu_0 t - u(\mu_0)}F(dt).$$

Введенное семейство обладает следующими свойствами:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} tF_0(dt) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} te^{\mu_0 t - u(\mu_0)}F(dt) = 0,$$
$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2F_0(dt) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} t^2e^{\mu_0 t - u(\mu_0)}F(dt) = 1.$$

Таким образом, распределение случайной величины AX_1 можно вложить (при $\theta = -\mu_0$) в стандартное экспоненциальное семейство распределений $\{F_\theta\}$. Теорема доказана.

Итак, в дальнейшем будем предполагать, что распределение случайной величины AX_1 принадлежит стандартному экспоненциальному семейству

$$\mathbf{P}(AX_1 \in dt) = F_\theta(dt) = e^{\theta t - \psi(\theta)} F_0(dt).$$

Ясно, что $\mathbf{E}X_1 < 0$ возможно только для $\theta < 0$. Дополнительно предположим, что для AX_1 (а значит, и для X_1) выполняется условие сильной нерешетчатости. Тогда, очевидно, случайные величины $Y_n = -AX_n$ будут удовлетворять условию теоремы 2, при этом $A\chi_- = -R_0$, $\varphi(\theta) = \psi(-\theta)$. Тем самым мы получаем асимптотические разложения при $\theta \downarrow 0$

$$\begin{aligned} Aa_1 &= A\mathbf{E}_{-\theta}|\chi_-| = \mathbf{E}_\theta R_0 = d_1 + \frac{d_2}{2}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d_3}{3} - \alpha_1\right)\theta^2 + o(\theta^2), & (5)\\ A^2a_2 &= A^2\mathbf{E}_{-\theta}\chi_-^2 = \mathbf{E}_\theta R_0^2 = d_2 + \frac{2d_3}{3}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d_4}{2} - \alpha_2\right)\theta^2 + o(\theta^2), & (6)\\ A^3a_3 &= A^3\mathbf{E}_{-\theta}|\chi_-|^3 = \mathbf{E}_\theta R_0^3 = d_3 + \frac{3d_4}{4}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{3d_5}{5} - \alpha_3\right)\theta^2 + o(\theta^2). & (7)\end{aligned}$$

Для того чтобы воспользоваться формулами (1) и (2), нам потребуются разложения для моментов m_k по степеням θ. Поскольку F_θ является распределением, то для любого $\theta \in \Theta$ выполнено:

$$e^{\psi(\theta)} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} F_0(dx).$$

Дифференцированием этого тождества по θ получаем следующие соотношения. Для любого $\theta \in \Theta$

$$Am_1 = \psi'(\theta), \quad A^2m_2 = \psi''(\theta) + (\psi'(\theta))^2,$$
$$A^3m_3 = \psi'''(\theta) + 3\psi''(\theta)\psi'(\theta) + (\psi'(\theta))^3.$$

Пусть s_n, $n \geq 1$ — семиинварианты, соответствующие распределению F_0, т. е. $s_n = \psi^{(n)}(0)$. Для стандартного семейства выполнено $\psi'(0) = A\mathbf{E}_0 X_1 = 0$ и $\psi''(0) = A^2\mathbf{E}_0 X_1^2 = 1$, поэтому

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{s_3}{6}\theta^3 + \frac{s_4}{24}\theta^4 + \ldots .$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} Am_1 &= \psi'(\theta) = \theta + \frac{s_3}{2}\theta^2 + \frac{s_4}{6}\theta^3 + \frac{s_5}{24}\theta^4 + \ldots, & (8)\\ A^2m_2 &= \psi''(\theta) + (\psi'(\theta))^2 = 1 + s_3\theta + \left(\frac{s_4}{2} + 1\right)\theta^2 + \left(\frac{s_5}{6} + s_3\right)\theta^3 + \ldots, & (9)\\ A^3m_3 &= \psi'''(\theta) + 3\psi''(\theta)\psi'(\theta) + (\psi'(\theta))^3 = \\ &= s_3 + (s_4+3)\theta + \left(\frac{s_5}{2} + \frac{9s_3}{2}\right)\theta^2 + \left(\frac{s_6}{6} + \frac{3s_3^2}{2} + 2s_4 + 1\right)\theta^3 + \ldots . & (10)\end{aligned}$$

Подставляя разложения (8), (9), (5), (6) в (1) и пользуясь формулой

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \ldots, \quad |x| < 1,$$

получим

$$Ab_1 = \frac{d_2 + \frac{2d_3}{3}\theta + \frac{1}{2}\left(\frac{d_4}{2} - \alpha_2\right)\theta^2 + o(\theta^2)}{2d_1\left(1 + \frac{d_2}{2d_1}\theta + \frac{1}{2d_1}\left(\frac{d_3}{3} - \alpha_1\right)\theta^2 + o(\theta^2)\right)} -$$

$$-\frac{1+s_3\theta+\left(\dfrac{s_4}{2}+1\right)\theta^2+\left(\dfrac{s_5}{6}+s_3\right)\theta^3+O(\theta^4)}{2\theta\left(1+\dfrac{s_3}{2}\theta+\dfrac{s_4}{6}\theta^2+\dfrac{s_5}{24}\theta^3+O(\theta^4)\right)}=$$
$$=\frac{B_1}{\theta}+B_2+B_3\theta+B_4\theta^2+o(\theta^2),$$

где

$$\begin{aligned}
B_1 &= -\frac{1}{2}, \qquad B_2=\frac{d_2}{2d_1}-\frac{s_3}{4},\\
B_3 &= \frac{d_3}{3d_1}-\frac{d_2^2}{4d_1^2}-\frac{1}{2}-\frac{s_4}{6}+\frac{s_3^2}{8},\\
B_4 &= \frac{d_4-2\alpha_2}{8d_1}-\frac{d_2d_3}{4d_1^2}+\frac{d_2\alpha_1}{4d_1^2}+\frac{d_2^3}{8d_1^3}-\frac{s_5}{16}-\frac{s_3}{4}+\frac{s_3s_4}{8}-\frac{s_3^3}{16}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Аналогично находим

$$\frac{A^2a_3}{6a_1}=\frac{d_3+\dfrac{3d_4}{4}\theta+o(\theta)}{6\left(d_1+\dfrac{d_2}{2}\theta+o(\theta)\right)}=\frac{d_3}{6d_1}+\left(\frac{d_4}{8d_1}-\frac{d_2d_3}{12d_1^2}\right)\theta+o(\theta), \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
\frac{A^2m_3}{6m_1} &= \frac{s_3+(s_4+3)\theta+\left(\dfrac{s_5}{2}+\dfrac{9s_3}{2}\right)\theta^2+O(\theta^3)}{6\left(\theta+\dfrac{s_3}{2}\theta^2+\dfrac{s_4}{6}\theta^3+O(\theta^4)\right)}=\\
&= \frac{s_3}{6\theta}+\frac{s_4}{6}-\frac{s_3^2}{12}+\frac{1}{2}+\left(\frac{s_5+6s_3}{12}-\frac{s_3s_4}{9}+\frac{s_3^3}{24}\right)\theta+o(\theta),
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\frac{A^2a_2m_2}{4a_1m_1}=\frac{\left(d_2+\dfrac{2d_3}{3}\theta+\left(\dfrac{d_4-2\alpha_2}{4}\right)\theta^2+o(\theta^2)\right)\left(1+s_3\theta+\left(\dfrac{s_4}{2}+1\right)\theta^2+O(\theta^3)\right)}{4\left(d_1+\dfrac{d_2}{2}\theta+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{d_3}{3}-\alpha_1\right)\theta^2+o(\theta^2)\right)\left(\theta+\dfrac{s_3}{2}\theta^2+\dfrac{s_4}{6}\theta^3+O(\theta^4)\right)}=$$
$$=\frac{d_2}{4d_1\theta}+\frac{d_3}{6d_1}+\frac{d_2s_3}{8d_1}-\frac{d_2^2}{8d_1^2}+ \tag{14}$$
$$+\left(\frac{d_4-d_2s_3^2-2\alpha_2}{16d_1}+\frac{d_3s_3+d_2s_4+3d_2}{12d_1}+\frac{d_2\alpha_1-d_2d_3-d_2^2s_3}{8d_1^2}+\frac{d_2^3}{16d_1^3}+\frac{d_2s_3}{16d_1^2}\right)\theta+o(\theta),$$

$$\begin{aligned}
\frac{A^2m_2^2}{4m_1^2} &= \frac{\left(1+s_3\theta+\left(\dfrac{s_4}{2}+1\right)\theta^2+\left(\dfrac{s_5}{6}+s_3\right)\theta^3+O(\theta^4)\right)^2}{4\left(\theta+\dfrac{s_3}{2}\theta^2+\dfrac{s_4}{6}\theta^3+\dfrac{s_5}{24}\theta^4+O(\theta^5)\right)^2}=\\
&= \frac{1}{4\theta^2}+\frac{s_3}{4\theta}+\frac{7s_3^2}{16}+\frac{s_4}{6}+\frac{1}{2}+\left(\frac{s_3}{2}-\frac{s_3s_4}{6}+\frac{s_5}{16}+\frac{s_3^3}{4}\right)\theta+O(\theta^2).
\end{aligned} \tag{15}$$

Собирая вместе эти разложения в соответствии с (2), получаем

$$A^2b_2=\frac{a_3}{6a_1}-\frac{m_3}{6m_1}-\frac{a_2m_2}{4a_1m_1}+\frac{m_2^2}{4m_1^2}=\frac{A_1}{\theta^2}+\frac{A_2}{\theta}+A_3+A_4\theta+o(\theta). \tag{16}$$

Тем самым доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть распределение* $\mathbf{P}(AX_1 \in dt) = F_\theta(dt)$ *принадлежит стандартному экспоненциальному семейству и для него выполнено условие сильной нерешетчатости. Тогда при* $\theta \uparrow 0$ *имеют место асимптотические разложения*

$$Ab_1 = A\mathbf{E}_\theta S = \frac{B_1}{\theta} + B_2 + B_3\theta + B_4\theta^2 + o(\theta^2), \tag{17}$$

$$A^2 b_2 = A^2\mathbf{E}_\theta S^2 = \frac{A_1}{\theta^2} + \frac{A_2}{\theta} + A_3 + A_4\theta + o(\theta), \tag{18}$$

коэффициенты которых определяются формулами (11)–(16).

Если вместо условия сильной нерешетчатости ограничиться обычной нерешетчатостью, то мы сможем пользоваться разложениями для a_k только с точностью до $o(\theta)$ [12], поэтому наши разложения в этом случае будут содержать на один член меньше.

Теперь обозначим $\mathbf{E}_\theta X_1 = -\varepsilon$ и заметим, что имеет место локально обратимая связь между ε и θ

$$-A\varepsilon = A\mathbf{E}X_1 = \theta + \frac{s_3}{2}\theta^2 + \frac{s_4}{6}\theta^3 + \dots,$$

что позволяет выписать разложение в окрестности нуля

$$\theta = \gamma_1\varepsilon + \gamma_2\varepsilon^2 + \gamma_3\varepsilon^3 + \dots, \tag{19}$$

в котором

$$\gamma_1 = -A, \quad \gamma_2 = -\frac{A^2 s_3}{2}, \quad \gamma_3 = A^3\frac{s_4 - 3s_3^2}{6}, \quad \gamma_4 = A^4\frac{10s_3s_4 - 15s_3^3 - s_5}{24}.$$

Нетрудно подсчитать также, что в разложении

$$\frac{1}{\theta} = -\frac{1}{\varepsilon}\big(1 + \delta_1\varepsilon + \delta_2\varepsilon^2 + \dots\big) \tag{20}$$

имеем

$$\delta_1 = \gamma_2, \quad \delta_2 = \gamma_2^2 + \gamma_3, \quad \delta_3 = \gamma_2^3 + 2\gamma_2\gamma_3 + \gamma_4,$$

$$\delta_4 = \gamma_2^4 + 3\gamma_2^2\gamma_3 + 2\gamma_2\gamma_4 + \gamma_3^2 + \gamma_5.$$

Подставляя разложения (19) и (20) в (17) и (18), приходим к следующим разложениям для b_1 и b_2 по степеням ε.

Теорема 5. *Пусть в условиях предыдущей теоремы* $\mathbf{E}_\theta X_1 = -\varepsilon < 0$. *Тогда при* $\varepsilon \downarrow 0$ *справедливы асимптотические разложения*

$$Ab_1 = \frac{1}{2\varepsilon} + \frac{\delta_1}{2} + B_2 + \left(\frac{\delta_2}{2} - B_3\right)\varepsilon + \left(\frac{\delta_3}{2} + B_4 + B_3\gamma_2\right)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2),$$
$$A^2 b_2 = \frac{1}{4\varepsilon^2} + \left(\frac{\delta_1}{2} - A_2\right)\frac{1}{\varepsilon} + A_3 - A_2\delta_1 + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2}{2} + \left(A_4\gamma_1 + \frac{\delta_3 + \delta_1\delta_2}{2} - A_2\delta_2\right)\varepsilon + o(\varepsilon).$$

Ясно, что приведенная схема исследований позволяет получать асимптотические разложения и для моментов высших порядков.

Автор выражает благодарность И. Д. Костылевой за некоторые предварительные вычисления и Д. А. Коршунову за полезные обсуждения.

Список литературы

1. *Kingman J. F. C.* On Queues in Heavy Traffic // J. Roy. Stat. Soc. Ser. B. 1962. Vol. 24. No. 2. P. 383–392.

2. *Прохоров Ю. В.* Переходные явления в процессах массового обслуживания // Лит. мат. сб. 1963. Т. 1. С. 199–206.

3. *Cohen J. W.* Random Walk with a Heavy-Tailed Jump Distribution // Queueing Syst. 2002. Vol. 40. No. 1. P. 35–73.

4. *Боровков А. А.* Переходные явления для случайных блужданий с разнораспределенными скачками, имеющими бесконечные дисперсии // Теория вероятностей и ее применения. 2005. Т. 50, вып. 2. С. 224–240.

5. *Коршунов Д. А.* Переходные явления для вещественнозначных цепей Маркова // Тр. ИМ СО АН. 1993. Т. 20. С. 116–161.

6. *Kalashnikov V.* Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 1997.

7. *Asmussen S.* Applied Probability and Queues. N. Y.: Springer. 2003.

8. *Шпренгер А. В.* Асимптотика среднего времени ожидания в одноканальной системе массового обслуживания в условиях большой нагрузки: Дипл. работа (науч. рук. Д. А. Коршунов). Новосибирский государственный университет. ММФ. 2007.

9. *Боровков А. А.* Теория вероятностей. М.: Наука. 1986.

10. *Chang J. T.* On Moments of the First Ladder Height of Random Walks with Small Drift // Ann. Appl. Probab. 1992. Vol. 2. No. 3. P. 714–736.

11. *Gut A.* Stopped Random Walks. Limit Theorems and Applications. Springer. 1988.

12. *Siegmund D.* Corrected Diffusion Approximations in Certain Random Walk Problems // Adv. Appl. Probab. 1979. Vol. 11. P. 701–719.

13. *Siegmund D.* Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals. N.Y.: Springer. 1985.

Материал поступил в редколлегию 15.06.2007

Адрес автора

ЛОТОВ Владимир Иванович
РОССИЯ, 630090, г. Новосибирск
Пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
тел.: (383) 3304166
e-mail: lotov@math.nsc.ru