УДК 517.958

Г. В. Алексеев, А. М. Хлуднев

О РАЗРЕШИМОСТИ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОГО ТЕЛА*

Учет электропроводности при описании равновесия термоупругих тел, как правило, значительно усложняет математическую модель. В работе доказывается теорема существования смешанной краевой задачи для нелинейной модели, учитывающей влияние температуры и электропроводности на процесс деформирования упругого тела.

§ 1. Формулировка задачи и основной результат

Пусть $\Omega \subset R^2$ — ограниченная область с гладкой границей Γ, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, причем meas $\Gamma_0 > 0$, $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$, и $Q = \Omega \times (0, T)$. Рассматривается задача нахождения функций $u = (u_1, u_2)$, θ, φ, $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$, таких что

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{div} \sigma &= f \quad \text{в} \quad Q, && (1)\\
\varepsilon(u) &= C\sigma + \alpha(\theta) s \quad \text{в} \quad Q, && (2)\\
\theta_t - \Delta\theta &= \beta(\theta)|s|^2 + \gamma(\theta)|\nabla\varphi|^2 \quad \text{в} \quad Q, && (3)\\
-\operatorname{div}(\gamma(\theta)\nabla\varphi) &= 0 \quad \text{в} \quad Q, && (4)\\
\theta &= \theta_0 \quad \text{при} \quad t = 0, && (5)\\
u &= 0, \ \ \varphi = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0, T), && (6)\\
\sigma\nu &= 0; \ \ \gamma(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = A\varphi + a \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0, T), && (7)\\
\frac{\partial\theta}{\partial\nu} &= 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0, T). && (8)
\end{aligned}
$$

Здесь α, β, γ — заданные непрерывные функции, действующие из R в R,

$$|\alpha(\xi)| \le \alpha_0, \ |\beta(\xi)| \le \beta_0, \ \ 0 < \gamma_1 \le \gamma(\xi) \le \gamma_2 \quad \forall \xi \in R,$$

$\alpha_0, \beta_0, \gamma_1, \gamma_2$ — постоянные, $s = \{s_{ij}\}$ — девиатор тензора напряжений σ; $\varepsilon_{ij}(u) = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$ — компоненты тензора деформаций; $\varepsilon(u) = \{\varepsilon_{ij}(u)\}$; $f = (f_1, f_2) \in L^2(Q)$, $\theta_0 \in L^1(\Omega)$ — заданные функции, $C = \{c_{ijkl}\}$ — тензор модулей упругости с обычными свойствами симметрии и положительной определенности:

$$
\begin{aligned}
&c_{ijkl} = c_{klij} = c_{jikl}, \quad c_{ijkl} \in L^\infty(\Omega), \quad i, j, k, l = 1, 2,\\
&c_{ijkl}\eta_{kl}\eta_{ij} \ge c_0|\eta|^2, \quad \forall\ \eta_{ij} = \eta_{ji}, \quad c_0 = \text{const}, \ c_0 > 0; \qquad (9)
\end{aligned}
$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 06-01-00209) и интеграционного проекта СО РАН—ДВО РАН (проекты № 2.1 и 06-II-СО-03-010).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 3–13

$A : L^2(0,T,L^2(\Gamma_1)) \to C[0,T]$ — линейный непрерывный оператор, a — заданная постоянная, $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ — единичный вектор внешней нормали к Γ. Все функции с двумя нижними индексами предполагаются симметричными по этим индексам, по повторяющимся индексам проводится суммирование. В приведенной выше модели функция u описывает перемещение точек тела; θ — температура; φ — электрический потенциал, так что уравнение (4) имеет вид $\operatorname{div} J = 0$, где по закону Ома плотность тока J определяется по формуле $J = -\gamma(\theta)\nabla\varphi$, а правая часть уравнения энергии (3) в соответствии с законом Джоуля содержит слагаемое $-J\nabla\varphi$. При этом соотношения (1) являются уравнениями равновесия, а (2) — уравнение состояния. С физическими предположениями, приводящими к уравнению энергии вида (3) и краевому условию (7) для электрического потенциала, можно ознакомиться по работе [5].

По поводу других математических моделей термоупругих и термоэлектроупругих тел и результатов о разрешимости соответствующих краевых задач можно обратиться к [1, 3, 6, 7, 10].

Обратим внимание на то, что начальная температура θ_0 в (5) принадлежит пространству $L^1(\Omega)$, что наряду с имеющейся нелинейностью создает дополнительные трудности в исследовании разрешимости задачи (1)–(8).

Обозначим через $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, пространство Соболева,

$$W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega) \mid v = 0 \text{ на } \Gamma_0\}$$

с нормой

$$\|v\|^p_{W^{1,p}_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla v|^p,$$

и пусть

$$W = L^2(0,T; W^{1,2}_{\Gamma_0}(\Omega)),$$

$$V = \{\psi \in L^{q'}(0,T; W^{1,q'}(\Omega)) \cap C([0,T]; L^\infty(\Omega)) \mid \psi_t \in L^2(Q),\ \psi(T) = 0\}, \quad q' > 4.$$

В дальнейшем мы выберем число q, такое что

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \quad 1 < q < \frac{4}{3}.$$

Поскольку вложение $W \subset L^2(0,T; L^2(\Gamma_1))$ является непрерывным, то в силу непрерывности оператора A существует постоянная c_1 такая, что выполнено неравенство

$$\int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} (A\varphi)\varphi \leq c_1\|\varphi\|^2_W, \quad \forall\varphi \in W. \tag{10}$$

Мы будем предполагать, что

$$c_1 < \gamma_1, \quad 3\alpha_0 < c_0. \tag{11}$$

Основной результат работы формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Пусть выполнены все указанные выше предположения. Тогда существует решение задачи* (1)–(8), *такое что*

$$u_i, \quad \varphi \in W, \quad \sigma_{ij} \in L^2(Q), \quad i,j = 1,2; \quad \theta \in L^q(0,T,W^{1,q}(\Omega)), \tag{12}$$

$$\int\limits_{Q} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v) = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v=(v_1,v_2)\in W^2, \tag{13}$$

$$\varepsilon(u) = C\sigma+\alpha(\theta)s \quad \text{в} \quad Q, \tag{14}$$

$$-\int\limits_{Q}\theta\psi_t+\int\limits_{Q}\nabla\theta\nabla\psi = \int\limits_{Q}\Big(\beta(\theta)|s|^2+\gamma(\theta)|\nabla\varphi|^2\Big)\psi + {}$$

$$+\int\limits_{\Omega}\theta_0\psi(0), \quad \forall\psi\in V, \tag{15}$$

$$\int\limits_{Q}\gamma(\theta)\nabla\varphi\nabla\bar\varphi = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)}\Big(A\varphi+a\Big)\bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi\in W. \tag{16}$$

§ 2. Доказательство основного результата

Общая схема рассуждений будет такая. Сначала рассмотрим регуляризованную по отношению к (1)–(8) краевую задачу, содержащую срезающую функцию. Задача будет характеризоваться положительным параметром λ. При каждом значении параметра будет доказано существование решения и будут получены равномерные по λ априорные оценки. В заключение будет осуществлен переход к пределу при $\lambda\to\infty$. Предельная задача будет совпадать с исходной, т. е. с (1)–(8).

Рассмотрим функцию

$$\tau_\lambda(\xi)=\begin{cases}\lambda, & \xi>\lambda\\ \xi, & |\xi|\le\lambda\\ -\lambda, & \xi<-\lambda\end{cases}$$

и регуляризованную краевую задачу. Задача заключается в нахождении функций $u=(u_1,u_2)$, θ,φ, $\sigma=\{\sigma_{ij}\}$, $i,j=1,2$ таких, что

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{17}$$

$$\varepsilon(u) = C\sigma+\alpha(\theta)s \quad \text{в} \quad Q, \tag{18}$$

$$\theta_t-\Delta\theta = \beta(\theta)\tau_\lambda(|s|^2)+\gamma(\theta)\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) \quad \text{в} \quad Q, \tag{19}$$

$$-\operatorname{div}(\gamma(\theta)\nabla\varphi) = 0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{20}$$

$$\theta = \tau_\lambda(\theta_0) \quad \text{при} \ t=0, \tag{21}$$

$$u = 0, \varphi=0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0\times(0,T), \tag{22}$$

$$\sigma\nu = 0; \quad \gamma(\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}=A\varphi+a \quad \text{на} \quad \Gamma_1\times(0,T), \tag{23}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma\times(0,T). \tag{24}$$

Доказательство разрешимости этой задачи будет установлено с помощью теоремы Шаудера о неподвижной точке.

Сначала при фиксированном $\bar\theta\in L^2(Q)$ мы докажем существование функции $\varphi=\varphi(\bar\theta)$, такой что

$$-\operatorname{div}(\gamma(\bar\theta)\nabla\varphi)=0 \quad \text{в} \quad Q, \tag{25}$$

$$\varphi = 0 \quad \text{на} \ \Gamma_0 \times (0,T), \qquad \gamma(\bar\theta)\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} = A\varphi + a \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T). \tag{26}$$

Затем рассмотрим следующую задачу для отыскания функций u, σ :

$$-\operatorname{div}\sigma = f \quad \text{в} \quad Q, \tag{27}$$

$$\varepsilon(u) = C\sigma + \alpha(\bar\theta)s \quad \text{в} \quad Q, \tag{28}$$

$$u = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_0 \times (0,T); \quad \sigma\nu = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \tag{29}$$

и докажем существование $s = s(\bar\theta)$.

Наконец, рассмотрим задачу для отыскания функции θ при известных $s = s(\bar\theta)$, $\varphi = \varphi(\bar\theta)$ из соотношений:

$$\theta_t - \Delta\theta = \beta(\bar\theta)\tau_\lambda(|s|^2) + \gamma(\bar\theta)\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) \quad \text{в} \quad Q, \tag{30}$$

$$\theta = \tau_\lambda(\theta_0) \quad \text{при} \quad t = 0, \tag{31}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma \times (0,T). \tag{32}$$

Мы сможем доказать существование решения задачи (30)–(32) и таким образом установить существование функции $\theta = \theta(\bar\theta)$, такой что $\theta \in U$,

$$U = \{v \in L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega)) \mid v_t \in L^2(0,T; (W^{1,2}(\Omega))^*)\},$$

где $(W^{1,2}(\Omega))^*$ — пространство, двойственное к $W^{1,2}(\Omega)$.

Пространство U компактно вложено в $L^2(Q)$ [11]. Следовательно, можно построить компактный оператор

$$B \,:\, L^2(Q) \ni \bar\theta \mapsto \theta \in L^2(Q),$$

и наша задача будет состоять в доказательстве существования неподвижной точки этого оператора с помощью теоремы Шаудера.

Итак, приступим к последовательному выполнению описанных шагов. Обозначим через W^* пространство, двойственное к W, и определим оператор $M : W \to W^*$ по формуле

$$M(\varphi)\bar\varphi = \int\limits_Q \gamma(\bar\theta)\nabla\varphi\nabla\bar\varphi \ - \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} (A\varphi)\bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi \in W,$$

где $\bar\theta \in L^2(Q)$ — выбранная фиксированная функция. В силу (10), (11) оператор M является коэрцитивным, т. е.

$$\frac{M(\varphi)\varphi}{\|\varphi\|_W} \to \infty, \quad \|\varphi\|_W \to \infty.$$

Поскольку оператор M является также ограниченным, монотонным и семинепрерывным, то согласно [9] существует решение задачи

$$\varphi \in W : \quad M(\varphi)\bar\varphi = a \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} \bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi \in W.$$

Таким образом, мы установили существование решения задачи (25)–(26), т. е. элемента $\varphi = \varphi(\bar\theta) \in W$, удовлетворяющего следующему тождеству:

$$\int\limits_Q \gamma(\bar\theta)\nabla\varphi\nabla\bar\varphi = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} (A\varphi + a)\bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi \in W.$$

Сейчас обратимся к задаче (27)–(29). В силу [8] эта задача имеет единственное решение u, σ, такое что

$$u_i \in W, \quad \sigma_{ij} \in L^2(Q),\ i,j = 1,2,$$

$$\int\limits_Q \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v) = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in W^2,$$

$$\varepsilon(u) = C\sigma + \alpha(\bar\theta)s \quad \text{в } Q.$$

Следовательно, мы доказали существование единственного элемента $\sigma = \sigma(\bar\theta)$ и, таким образом, нашли $s = s(\bar\theta)$. Это означает, что можно рассмотреть задачу (30)–(32) с заданными $\varphi = \varphi(\bar\theta), s = s(\bar\theta)$. Очевидно, что при фиксированном $\lambda > 0$ имеем включение

$$h^\lambda(\bar\theta) \equiv \beta(\bar\theta)\tau_\lambda(|s|^2) + \gamma(\bar\theta)\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) \in L^2(Q).$$

Определим оператор $\mathrm{L} : L^2(0,T; W^{1,2}(\Omega)) \to L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)$ по формуле

$$\mathrm{L}(\theta)\bar\theta = \int\limits_Q \nabla\theta\nabla\bar\theta, \quad \theta,\, \bar\theta \in L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)).$$

Тогда (30)–(32) может быть записана как абстрактная эволюционная задача

$$\theta_t - \mathrm{L}(\theta) = h^\lambda(\bar\theta) \quad \text{в } L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)\,, \tag{33}$$

$$\theta = \tau_\lambda(\theta_0) \quad \text{при } t = 0\,. \tag{34}$$

Заметим, что имеют место непрерывные вложения $L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)) \subset L^2(Q) \subset$ $\subset L^2(0,T;(W^{1,2}(\Omega))^*)$. С учетом общих результатов для эволюционных уравнений [9] существует единственное решение $\theta \in U$ задачи (33)–(34). Поскольку U компактно вложено в $L^2(Q)$, мы имеем

$$\theta = \theta(\bar\theta) = B(\bar\theta).$$

Отметим также, что включение $\theta \in U$ влечет $\theta \in C([0,T];L^2(\Omega))$, и следовательно, начальное условие (34) выполнено. Для применения теоремы Шаудера о неподвижной точке, необходимо проверить непрерывность оператора B.

Пусть $\bar\theta^n \to \bar\theta$ сильно в $L^2(Q)$ при $n \to \infty$. Обозначим

$$u^n = u(\bar\theta^n), \quad \sigma^n = \sigma(\bar\theta^n), \quad \varphi^n = \varphi(\bar\theta^n), \quad s^n = s(\bar\theta^n), \quad \theta^n = \theta(\bar\theta^n).$$

Можно предполагать, что

$$\bar\theta^n \to \bar\theta \quad \text{п.в. в} \quad Q;$$

$$\alpha(\bar\theta^n) \to \alpha(\bar\theta), \quad \beta(\bar\theta^n) \to \beta(\bar\theta), \quad \gamma(\bar\theta^n) \to \gamma(\bar\theta) \quad \text{п.в. в } Q$$
$$\text{и сильно в } L^p(Q), \quad p \in [1,\infty). \tag{35}$$

Из уравнений

$$\int\limits_Q \sigma^n_{ij}\varepsilon_{ij}(v) = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in W^2, \tag{36}$$

$$\varepsilon(u^n) = C\sigma^n + \alpha(\bar\theta^n)s^n \quad \text{в} \quad Q, \tag{37}$$

получаем равномерно по n

$$\|\sigma_{ij}^n\|_{L^2(Q)} + \|u_i^n\|_W \le c, \quad i,j = 1,2.$$

Следовательно, можно считать, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^n,\ s_{ij}^n \ &\to\ \sigma_{ij},\ s_{ij} \quad \text{слабо в}\ L^2(Q), \\ u_i^n \ &\to\ u_i \quad \text{слабо в}\ W. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу (35)

$$\alpha(\bar\theta^n) s_{ij}^n \ \to\ \alpha(\bar\theta) s_{ij} \quad \text{слабо в}\ L^2(Q).$$

Таким образом, уравнения (36), (37) дают

$$\int\limits_Q \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}(v) \ = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in W^2, \tag{38}$$

$$\varepsilon(u) \ = \ C\sigma + \alpha(\bar\theta)s \quad \text{в}\ Q. \tag{39}$$

Из (36)–(39) получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_Q (\sigma_{ij}^n - \sigma_{ij})\varepsilon_{ij}(v) \ &= \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in W^2, \\ \varepsilon(u^n - u) \ &= \ C(\sigma^n - \sigma) + \alpha(\bar\theta^n)s^n - \alpha(\bar\theta)s \qquad \text{в} \quad Q, \end{aligned}$$

что приводит к неравенству

$$c_0\|\sigma^n - \sigma\|^2_{L^2(Q)} \le \int\limits_Q \alpha(\bar\theta^n)(s^n - s)(\sigma - \sigma^n) + \int\limits_Q (\alpha(\bar\theta^n) - \alpha(\bar\theta))s(\sigma - \sigma^n).$$

В силу (11) с учетом теоремы Лебега из этого неравенства получаем

$$\|\sigma^n - \sigma\|^2_{L^2(Q)} \le \mu_n \ \to\ 0, \quad n \to \infty,$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \sigma^n \ &\to\ \sigma \qquad \text{сильно в}\ L^2(Q), \\ |s^n|^2 \ &\to\ |s|^2 \quad \text{сильно в}\ L^1(Q)\ \text{и п. в. в}\ Q. \end{aligned}$$

Кроме того,

$$\tau_\lambda(|s^n|^2) \ \to\ \tau_\lambda(|s|^2) \quad \text{сильно в}\ L^p(Q),\ p \in [1,\infty),\ \text{и п. в. в}\ Q\ , \tag{40}$$

$$\beta(\bar\theta^n)\tau_\lambda(|s^n|^2) \ \to\ \beta(\bar\theta)\tau_\lambda(|s|^2) \quad \text{сильно в}\ L^2(Q). \tag{41}$$

Докажем, что $n \to \infty$

$$\gamma(\bar\theta^n)\tau_\lambda(|\nabla\varphi^n|^2) \ \to\ \gamma(\bar\theta)\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) \quad \text{сильно в}\ L^2(Q), \tag{42}$$

где φ является предельной точкой для φ^n. В самом деле, из уравнений

$$\int\limits_Q \gamma(\bar\theta^n)\nabla\varphi^n\nabla\bar\varphi = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} (A\varphi^n + a)\bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi \in W \tag{43}$$

получаем равномерно по n

$$\|\varphi^n\|_W \leq c,$$

и можно считать, что при $n \to \infty$

$$\varphi^n \to \varphi \quad \text{слабо в } W.$$

Тогда в силу (35)

$$\gamma(\bar{\theta}^n)\nabla\varphi^n \to \gamma(\bar{\theta})\nabla\varphi \quad \text{слабо в } L^2(Q). \tag{44}$$

Ввиду (44) и слабой сходимости φ^n, уравнения (43) дают

$$\int\limits_Q \gamma(\bar{\theta})\nabla\varphi\nabla\bar{\varphi} = \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} (A\varphi + a)\bar{\varphi}, \quad \forall\bar{\varphi} \in W,$$

и мы приходим к соотношению

$$\int\limits_Q \gamma(\bar{\theta}^n)|\nabla\varphi^n - \nabla\varphi|^2 = \int\limits_Q (\gamma(\bar{\theta}^n) - \gamma(\bar{\theta}))\nabla\varphi\nabla(\varphi - \varphi^n) + \\ + \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} A(\varphi^n - \varphi)(\varphi^n - \varphi). \tag{45}$$

Поскольку согласно (10)

$$\int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} A(\varphi^n - \varphi)(\varphi^n - \varphi) \leq c_1\|\varphi^n - \varphi\|_W^2$$

и $\gamma(\xi) \geq \gamma_1$, $c_1 < \gamma_1$, из (45) следует

$$\|\varphi^n - \varphi\|_W^2 \leq \eta_n \to 0,\ n \to \infty.$$

Значит, при $n \to \infty$

$$\begin{array}{rcll} |\nabla\varphi^n|^2 & \to & |\nabla\varphi|^2 & \text{сильно в } L^1(Q) \text{ и п. в. в } Q, \\ \tau_\lambda(|\nabla\varphi^n|^2) & \to & \tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) & \text{сильно в } L^2(Q), \end{array}$$

что дает сходимость (42). Далее, из соотношений

$$\theta_t^n - \Delta\theta^n = \beta(\bar{\theta}^n)\tau_\lambda(|s^n|^2) + \gamma(\bar{\theta}^n)\tau_\lambda(|\nabla\varphi^n|^2), \tag{46}$$

$$\theta^n = \tau_\lambda(\theta_0) \quad \text{при } t = 0 \tag{47}$$

равномерно по n следует

$$\|\theta^n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \leq c.$$

Предположим, что

$$\theta^n \to \theta \quad \text{слабо в } L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega)). \tag{48}$$

Тогда, в силу (41), (42), из (46), (47) получаем

$$\theta_t - \Delta\theta = \beta(\bar{\theta})\tau_\lambda(|s|^2) + \gamma(\bar{\theta})\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2), \tag{49}$$

$$\theta = \tau_\lambda(\theta_0) \quad \text{при } t = 0. \tag{50}$$

Правые части (46), (49) равны $h^\lambda(\bar{\theta}^n), h^\lambda(\bar{\theta})$ соответственно.

Обозначим $g^n = \theta - \theta^n$. Тогда из (46)–(47), (49)–(50) получаем

$$g_t^n - \Delta g^n = h^\lambda(\bar\theta) - h^\lambda(\bar\theta^n).$$

Отсюда следует

$$\frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}\|g^n(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_Q \nabla g^n \nabla g^n = \int_Q [\beta(\bar\theta)\tau_\lambda(|s|^2) - \beta(\bar\theta^n)\tau_\lambda(|s^n|^2)]g^n +$$
$$+ \int_Q [\gamma(\bar\theta)\tau_\lambda(|\nabla\varphi|^2) - \gamma(\bar\theta^n)\tau_\lambda(|\nabla\varphi^n|^2)]g^n.$$

Значит, согласно (41)–(42) и условию $g^n(0) = 0$, получаем сходимость при $n \to \infty$

$$\|g^n\|_{L^2(0,T;W^{1,2}(\Omega))} \to 0.$$

Последовательность θ^n имеет единственную предельную точку θ, поэтому имеем непрерывность оператора B :

$$\theta^n = B(\bar\theta^n) \to \theta = B(\bar\theta) \quad \text{сильно в } L^2(Q).$$

Пусть теперь $\|\bar\theta\|_{L^2(Q)} \le r$. Поскольку оценка

$$\|h^\lambda(\bar\theta)\|_{L^2(Q)} + \|\tau_\lambda(\theta_0)\|_{L^2(\Omega)} \le c$$

равномерна по r, из (33)–(34) равномерно по r следует

$$\|\theta\|_U \le c.$$

Следовательно,

$$\|B(\bar\theta)\|_{L^2(Q)} \le r$$

для достаточно больших r. В соответствии с теоремой Шаудера, существует функция $\bar\theta \in L^2(Q)$ такая, что $\bar\theta = B(\bar\theta)$.

Существование решения задачи (17)–(24) доказано.

Теперь мы хотим перейти к пределу при $\lambda \to \infty$ в (17)–(24). Решение задачи (17)–(24), соответствующее параметру λ, обозначим через $u^\lambda, \sigma^\lambda, \theta^\lambda, \varphi^\lambda$. Функции u^λ, σ^λ, θ^λ, φ^λ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$u_i^\lambda,\ \varphi^\lambda \in W, \quad \sigma_{ij}^\lambda \in L^2(Q), \quad i,j = 1,2; \quad \theta^\lambda \in U,$$

$$\int_Q \sigma_{ij}^\lambda \varepsilon_{ij}(v) = \int_{\Gamma_1\times(0,T)} f_i v_i, \quad \forall v = (v_1, v_2) \in W^2, \tag{51}$$

$$\varepsilon(u^\lambda) = C\sigma^\lambda + \alpha(\theta^\lambda)s^\lambda \quad \text{в } Q, \tag{52}$$

$$-\int_Q \theta^\lambda\psi_t + \int_Q \nabla\theta^\lambda\nabla\psi = \int_Q \Big(\beta(\theta^\lambda)\tau_\lambda(|s^\lambda|^2) + \gamma(\theta^\lambda)\tau_\lambda(|\nabla\varphi^\lambda|^2)\Big)\psi +$$
$$+ \int_\Omega \tau_\lambda(\theta_0)\psi(0), \quad \forall\psi \in V, \tag{53}$$

$$\int\limits_Q \gamma(\theta^\lambda)\nabla\varphi^\lambda\nabla\bar\varphi \;=\; \int\limits_{\Gamma_1\times(0,T)} \Big(A\varphi^\lambda + a\Big)\bar\varphi, \quad \forall\bar\varphi\in W. \tag{54}$$

Из (51), (52), (54) равномерно по λ следует

$$\|u^\lambda\|_W + \|\sigma^\lambda\|_{L^2(Q)} + \|\varphi^\lambda\|_W \le c. \tag{55}$$

Поэтому равномерно по λ

$$\||s^\lambda|^2\|_{L^1(Q)} + \||\nabla\varphi^\lambda|^2\|_{L^1(Q)} \le c$$

и, в силу определения τ_λ, равномерно по λ

$$\|\tau_\lambda(|s^\lambda|^2)\|_{L^1(Q)} + \|\tau_\lambda(|\nabla\varphi^\lambda|^2)\|_{L^1(Q)} \le c,$$
$$\|\tau_\lambda(\theta_0)\|_{L^1(\Omega)} \le \|\theta_0\|_{L^1(\Omega)}.$$

Теперь воспользуемся известными результатами для линейных параболических уравнений с начальными данными и правой частью из $L^1(\Omega), L^1(Q)$ соответственно, гарантирующими существование решения в пространстве $L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)), 1<q<\frac{4}{3}$.

В случае краевых условий Дирихле эти результаты можно найти в [2]. Для краевых условий Неймана соответствующие результаты имеются в [4]. Параметр $q\in(1,\frac{4}{3})$ соответствует случаю двумерной области Ω. Следовательно, из (53) получаем

$$\|\theta^\lambda\|_{L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega))} \le c, \tag{56}$$

где константа c не зависит от λ. Из (53) также следует

$$\theta_t^\lambda \quad \text{ограничены в} \quad L^q(0,T;(W^{1,q}(\Omega))^*) + L^1(Q) \tag{57}$$

равномерно по λ.

Пространство

$$\{\theta\in L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega), \;\; \theta_t\in L^q(0,T;(W^{1,q}(\Omega))^*) + L^1(Q)\}$$

компактно вложено в $L^1(Q)$ [11, с. 85]. Поэтому согласно (56), (57) при $\lambda\to\infty$

$$\theta^\lambda\to\theta \quad \text{сильно в } L^1(Q) \text{ и п. в. в } Q, \tag{58}$$

$$\alpha(\theta^\lambda)\to\alpha(\theta),\ \beta(\theta^\lambda)\to\beta(\theta), \quad \gamma(\theta^\lambda)\to\gamma(\theta) \quad \text{п. в. в } Q$$
$$\text{и сильно в } L^p(Q),\ \ p\in[1,\infty). \tag{59}$$

В силу (55) можно предполагать, что при $\lambda\to\infty$

$$\sigma^\lambda\to\sigma \quad \text{слабо в } L^2(Q), \qquad u^\lambda\to u,\ \varphi^\lambda\to\varphi \quad \text{слабо в } W.$$

Так же, как при доказательстве сильной сходимости σ^n, φ^n к σ, φ соответственно, устанавливаем, что при $\lambda\to\infty$

$$\sigma^\lambda\to\sigma \qquad \text{сильно в } L^2(Q), \tag{60}$$
$$\varphi^\lambda\to\varphi \qquad \text{сильно в } W, \tag{61}$$

и значит,

$$|s^\lambda|^2 \to |s|^2 \quad \text{сильно в } L^1(Q), \tag{62}$$

$$|\nabla\varphi^\lambda|^2 \to |\nabla\varphi|^2 \quad \text{сильно в } L^1(Q). \tag{63}$$

В силу (58)–(63) и определения τ_λ имеем при $\lambda \to \infty$

$$\begin{aligned} \alpha(\theta^\lambda)s^\lambda \to \alpha(\theta)s &\quad \text{сильно в } L^1(Q),\\ \beta(\theta^\lambda)\tau_\lambda(|s^\lambda|^2) \to \beta(\theta)|s|^2 &\quad \text{сильно в } L^1(Q),\\ \gamma(\theta^\lambda)\tau_\lambda(|\nabla\varphi^\lambda|^2) \to \gamma(\theta)|\nabla\varphi|^2 &\quad \text{сильно в } L^1(Q),\\ \tau_\lambda(\theta_0) \to \theta_0 &\quad \text{сильно в } L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Эта сходимость позволяет осуществить переход к пределу в (51)–(54) при $\lambda \to \infty$, что и обеспечивает доказательство (12)–(16).

Для завершения доказательства теоремы заметим, что $L^1(\Omega) \subset (W^{1,p}(\Omega))^*$ при $p > 2$. Действительно,

$$\int\limits_\Omega hg \le \|h\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{L^\infty(\Omega)} \le c\|h\|_{L^1(\Omega)}\|g\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad p > 2.$$

В частности, из (15) получаем

$$\theta \in L^q(0,T,W^{1,q}(\Omega)), \quad \theta_t \in L^q(0,T,(W^{1,q}(\Omega))^*) + L^1(0,T;L^1(\Omega) \subset \\ \subset L^1(0,T,(W^{1,p}(\Omega))^*), \quad p > 2,\ 1 < q < \frac{4}{3}.$$

Это означает, что $\theta \in C([0,T],(W^{1,l}(\Omega))^*)$ для некоторого $l > 1$, и поэтому начальное условие (5) выполнено.

В заключение отметим, что если $a = 0$ в (7), то $\varphi \equiv 0$ в Q. В этом случае задача для нахождения u, σ, θ решается независимо от φ.

Список литературы

1. *Antontsev S. N., Chipot M.* The Thermistor Problem: Existence, Smoothness, Uniqueness, Blowup // SIAM J. Math. Anal. 1994. Vol. 25. No. 4. P. 1128–1156.

2. *Boccardo L., Galluët T.* Non-linear Elliptic and Parabolic Equations Involving Measure Data // J. Funct. Anal. 1989. Vol. 87. P. 149–169.

3. *Bossavit A., Rodrigues J.-F.* On the Electromagnetic "Induction Heating" Problem in Bounded Domains // Adv. Math. Sci. Appl. 1994. Vol. 4. P. 79–92.

4. *Clain S.* Analyse Mathématique et Numérique d'un Modèle de Chauffage par Induction. Thèse No. 1240. Lausanne: EPFL. 1994.

5. *Duderstadt F., Hoemberg D., Khludnev A. M.* A Mathematical Model for Impulse Resistance Welding // Math. Meth. Appl. Sci. 2003. Vol. 26. P. 717–737.

6. *Hömberg D., Khludnev A. M., Sokolowski J.* Quasistationary Problem for a Cracked Body with Electrothermoconductivity // Interfaces and Free Boundaries. 2001. No. 3. P. 129–142.

7. *Hömberg D., Khludnev A. M.* Equilibrium Problem for a Thermoelectroconductive Body with the Signorini Condition on the Boundary // Math. Meth. Appl. Sci. 2001. Vol. 24. P. 233–244.

8. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of Cracks in Solids. Southampton-Boston: WIT Press, 2000.

9. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.

10. *Shi P., Shillor M., Xu X.* Existence of a Solution to the Stefan Problem with Joule's Heating // J. Diff. Eqs. 1993. Vol. 105. P. 239–263.

11. *Simon J.* Compact Sets in the Space $L^p(0,T;B)$ // Annali Mat. Pura ed Appl. 1987. Vol. 146. P. 65–96.

Материал поступил в редколлегию 26.03.2008

Адреса авторов

АЛЕКСЕЕВ Геннадий Валентинович
РОССИЯ, 690042, Владивосток
ул. Радио, 7, Институт прикладной математики ДВО РАН
тел. (4232) 311397
e-mail: alekseev@iam.dvo.ru

ХЛУДНЕВ Александр Михайлович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Лаврентьева, 15, Институт гидродинамики СО РАН
тел. (383) 3333123,
e-mail: khlud@hydro.nsc.ru