

*К. Е. Афанасьев, Т. С. Рейн*

## **МЕТОД ЕСТЕСТВЕННЫХ СОСЕДЕЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ**

Данная работа посвящена разработке численных алгоритмов на основе метода естественных соседей для решения задач динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами.

### **Введение**

Для моделирования неустановившихся физических явлений, описываемых различными уравнениями в частных производных, создан целый класс сеточных методов, для которых на каждом временном шаге требуется знание информации о межузловой связности. Наиболее популярные представители этой группы — методы конечных разностей, контрольных объемов, конечных и граничных элементов. Эти методы обладают одним общим недостатком: в процессе расчета сетка, на которой строится решение, сохраняет свою узловую связность, что при больших деформациях расчетной области может приводить к ее вырожденности.

С ростом производительности компьютеров развитие получили бессеточные методы, которые аппроксимируют уравнения в частных производных, основываясь только на наборе узлов, без знания дополнительной информации о структуре сетки. В таких методах отношение соседства частиц не фиксировано, т. е. частицы, бывшие соседями в начальный момент времени, могут со временем расходиться друг от друга. Характерными представителями этой группы методов являются метод сглаженных частиц (SPH — Smoothed Particle Hydrodynamics) [10], полунявный метод движущихся частиц (MPS — Moving Particle Semi-implicit) [9], метод Лагранжево-Эйлеровых частиц [5]. Данные методы позволяют достаточно точно воспроизводить кинематику течений, однако получение динамических характеристик, необходимых для расчета гидродинамических нагрузок, является трудоемкой задачей. К общим недостаткам бессеточных методов можно также отнести трудность введения граничных условий.

Эти обстоятельства заставили исследователей искать новые методы, сочетающие в себе идеи и возможности бессеточного подхода, но, вместе с тем, обладающие достоинствами сеточных методов. Первым из бессеточных методов нового поколения появился метод естественных соседей (Natural Element Method) [13]. Особенность метода NEM в том, что для стационарных задач он является обычным (классическим) методом Галеркина, т. е. является сеточным. Для нестационарных задач, в которых применяется Лагранжев подход к описанию изучаемого процесса, на каждом шаге по времени по найденному на предыдущем шаге положению узлов строится новая сетка, определяющая новую структуру соседей для каждой узловой точки области. На вновь построенной сетке аппроксимированная система уравнений снова решается методом Галеркина. В силу

этого метод NEM сохраняет некоторые преимущества классического метода Галеркина, а именно, простоту функций формы в области определения, непрерывность между элементами, легкость введения граничных условий. При этом имеет все достоинства бессеточных методов, так как функции формы метода естественных соседей зависят только от положения узловых точек.

Поскольку метод естественных соседей представляет собой разновидность метода Галеркина, то для формирования дискретной системы уравнений используется метод взвешенных невязок с набором весовых функций, совпадающих с базисными. Интегралы берутся по элементам расширенной триангуляции Делоне [8]. Множество естественных соседей для каждого узла, а также узлы свободной границы на новом временном шаге определяются с помощью методов sweep line и  $\alpha$ -shape [3]. Для аппроксимации неизвестных функций используются функции формы Сибсона и Лапласа [2,12]. Полученная система линейных алгебраических уравнений после внедрения граничных условий решается методом сопряженных градиентов с предобуславливанием.

В настоящей работе приводятся результаты решения задачи о колебаниях вязкой несжимаемой жидкости в прямоугольном бассейне и определяются нагрузки на стенки бассейна. Представлено сравнение расчетов с результатами решения методом комплексных граничных элементов задачи о колебаниях идеальной несжимаемой жидкости [1].

## § 1. Постановка задачи и алгоритм решения

Пусть в расчетной области  $D$ , ограниченной свободной поверхностью  $\Gamma_0$  и твердыми границами  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ , происходит движение вязкой несжимаемой жидкости, описываемое системой уравнений Навье-Стокса:

$$\rho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i} p + \mu \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \rho f_i, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_i(t) = (x_1, x_2)$ ,  $i, j = \overline{1, 2}$ , по принятому правилу по повторяющемуся индексу проводится суммирование. В системе (1) искомыми функциями являются давление  $p(\mathbf{x}, t)$  и вектор скорости  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_i(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), u_2(\mathbf{x}, t))$ . Параметрами будут плотность  $\rho$ , коэффициент динамической вязкости  $\mu$  и вектор массовых сил  $f_i = (f_1, f_2)$ .

На свободной поверхности  $\Gamma_0$  выполняется динамическое условие  $p(\mathbf{x}, t) = p_{atm}$ ; так как жидкость вязкая, то на твердых стенках  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  выполняется условие прилипания  $u_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 2}$ .

**Дискретизация по времени.** Для интегрирования системы уравнений (1) в методе естественных соседей используется метод расщепления (метод дробных шагов), предложенный в докладе [6] и описанный в работе [7] для интегрирования системы Навье-Стокса. Суть этого метода заключается в разбиении физического процесса на два: конвекцию-диффузию и вклад давления. На первом этапе в уравнении движения учитываются только конвективные члены, в результате чего выделяется фиктивная переменная  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$  и записываются выражения для предиктора и корректора скорости.

$$u_i^* = u_i^n + f_i \Delta t + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial u_i^{*+1/2}}{\partial x_j} \Delta t, \quad (2)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^* - \frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} p^{n+1}. \quad (3)$$

Здесь  $[\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]^{*+1/2} = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t))$ ,  $\Delta t = t^{n+1} - t^n$  — шаг по времени.

На втором этапе решается уравнение Пуассона на давление:

$$\frac{\rho}{\Delta t} \frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_j}. \quad (4)$$

В соответствии с идеей метода расщепления алгоритм движения по времени метода естественных соседей состоит из следующих шагов:

- I) определение границы области и построение интерполяционных функций;
- II) вычисление предиктора скорости  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$  из системы (2);
- III) решение уравнения Пуассона (4) для определения давления  $p^{n+1}(\mathbf{x}, t)$ ;
- IV) вычисление нового значения скорости  $\mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}, t)$  из уравнения (3) с учетом найденного на шаге IV давления;
- V) вычисление нового положения узлов на  $(n + 1)$ -м временном шаге:  $\mathbf{x}(t)^{n+1} = \mathbf{x}^n(t) + \mathbf{u}^{n+1}(\mathbf{x}, t)\Delta t$  и далее на шаг I.

**Стабилизация условия несжимаемости.** Одной из главных трудностей численного моделирования нестационарных уравнений Навье-Стокса является регуляризация условия несжимаемости. В описанном выше методе расщепления по пространственным переменным условие несжимаемости представлено уравнением Пуассона для давления (4). Для устранения нефизических осцилляций функции давления используется метод конечных приращений (Finite Increment Calculus [11]).

Устойчивость решения системы Навье-Стокса методами, основанными на методе Галеркина, обеспечивается выбором конечно-элементных пространств для скорости и давления: степени интерполяционных полиномов компонент вектора скорости и давления должны удовлетворять условию Ладыженской-Бабушки-Бреззи (ЛББ). В данной работе для аппроксимации функции давления в уравнениях (4) и (3) использовались линейные базисные функции (функции формы расширенной интерполяции Лапласа), для аппроксимации компонент вектора скорости — квадратичные базисные функции (функции формы Сибсона). Построение такого обобщенного метода естественных соседей (GNEM — General Natural Element Method) приводит к удовлетворению условий ЛББ для совместной аппроксимации, что гарантирует невырожденность решения.

## § 2. Тестовые расчеты

Тестирование метода естественных соседей и обобщенного метода естественных соседей проводилось на решении следующих задач: задача Л. В. Овсянникова о деформации жидкого эллипса — со свободной границей [4] и задача о распределении давления в покоящейся жидкости конечной глубины — с твердыми границами.

**Задача Л. В. Овсянникова о деформации жидкого эллипса.** В начальный момент времени область расчета представляет собой круг единичного радиуса, в который заключена несжимаемая жидкость. Деформация круга в эллипс начинается под действием начального распределения скоростей  $u_1(0) = x$ ,  $u_2(0) = -y$  в отсутствии внешних сил.

Давление на границе круга постоянно:  $p = 0$ . Распределение поля скоростей следующее:  $u_1(t) = \alpha'(t)/\alpha(t) \cdot x$ ,  $u_2(t) = -\alpha'(t)/\alpha(t) \cdot y$ . С ростом  $t$  круг деформируется в эллипс  $x^2/\alpha^2(t) + \alpha^2(t)y^2 = 1$ , большая полуось которого  $\alpha(t) \rightarrow \infty$ , а малая —  $1/\alpha(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Коэффициент  $\alpha(t)$  находится из решения задачи

$$(\alpha^4(t) + 1) \alpha(t) \alpha''(t) = 2 (\alpha'(t))^2, \quad \alpha(0) = 1, \quad \alpha'(0) = 1. \quad (5)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (5) второго порядка решалось методом Рунге-Кутты. Полученные значения  $\alpha(t)$  на различных временных шагах использовались и для сравнения с численными результатами, найденными методом GNEM.

Общая постановка задачи, как правило, приводится для идеальной несжимаемой жидкости. Основное отличие моделирования течений вязкой и идеальной жидкостей заключается в постановке граничных условий для функции скорости на жесткой границе. Так как в задаче о деформации жидкого эллипса вся граница расчетной области является свободной, то данную задачу можно использовать для тестирования алгоритма движения по времени для вязкой жидкости, при значении коэффициента динамической вязкости  $\mu = 0$ .

Расчеты проводились с шагом по времени  $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3}$  для различного числа узлов области. Для числа узлов от 1350 до 2500 значение относительного отклонения длины главной полуоси не превосходило 0,2 %.

**Задача об определении давления в покоящейся жидкости.** Наиболее значимой характеристикой течения жидкости является давление. Такие бессеточные методы, как метод сглаженных частиц (SPH), не позволяют получить удовлетворительную картину поля давления в расчетной области. Модификация метода SPH – ISPH и метод MPS [9] в связи с использованием модели несжимаемой жидкости способны представить более качественное распределение поля давления, но и здесь не удалось найти надежных результатов. Метод GNEM при решении системы уравнений Навье-Стокса позволяет восстанавливать давление с высокой точностью.

В качестве тестовой рассматривается задача об определении давления в покоящейся жидкости в прямоугольной области  $\Omega$ , верхняя граница которой является свободной, а боковые и нижняя — твердыми стенками. Задача решалась для различного числа узлов области в отсутствие внешних сил, но при наличии ненулевого начального распределения скоростей. На свободной границе задавалось условие  $p = 0$ , на твердых границах —  $\partial p / \partial n = 0$ . Требовалось получить распределение давления на твердых стенках, а также нулевое значение компонент вектора скорости внутри области. Расчеты проводились до момента времени  $t = 5$  с, когда процесс устанавливался. К этому моменту численное давление было близко к гидростатическому. Относительная погрешность давления не превосходила 0,01 %, а отклонение скорости от нулевого значения не превысило 0,007 %.

### § 3. Численные расчеты

Применимость метода GNEM для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкости демонстрируется на решении задачи о колебаниях жидкости в прямоугольном бассейне и определении нагрузок на стенки бассейна. Задача формулируется следующим

образом. В расчетной области  $D : x \in [0; \pi], y \in [0; 1 + 0,25 \cos(x)]$  под действием силы тяжести происходит движение жидкости. В начальный момент времени распределение поля скоростей  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = 0$ . Моделирование колебаний движения жидкости проводилось для различных значений числа Рейнольдса:  $Re = 400, Re = 10\,000, Re = 50\,000$ . Выбранное в начальный момент времени возвышение жидкости не приводит к образованию нелинейных режимов движения, при которых происходит формирование и дальнейшее обрушение волновых структур. Профили свободной границы, а также значения гидродинамических нагрузок, создаваемых идеальной жидкостью на твердых стенках, сравнивались с результатами, полученными комплексным методом граничных элементов для потенциальной модели идеальной жидкости [1].

Расчет методом GNEM проводился для различного числа узлов расчетной области. Для расчетов, представленных на рис. 1, в методе GNEM использовалось 3 220 узлов области, из них на жесткой границе — 209, на свободной — 105. Число узлов на свободной границе области в методе КМГЭ также было выбрано равным 105. Шаг по времени в методе GNEM переменный, выбирался из условия [1]  $\Delta t = \min_{\mathbf{x}} \{s/|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)|\}$ , где  $s = \min_{i \neq j} |\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i|$  — минимальное расстояние между узлами расчетной области.

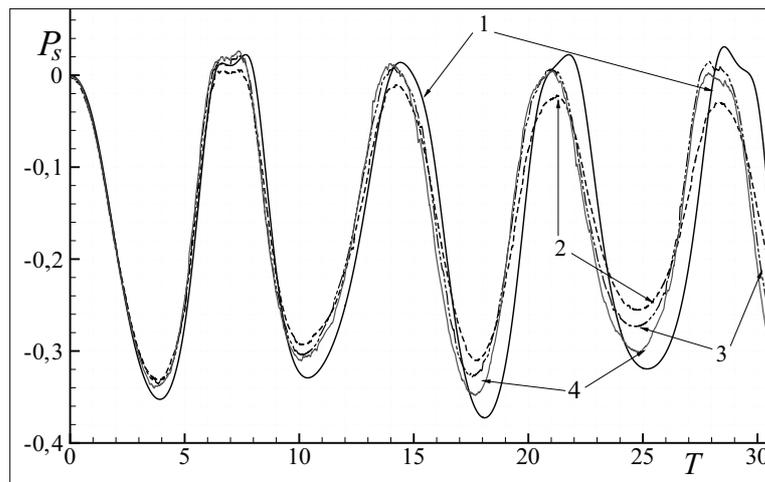


Рис. 1. Кривые динамических нагрузок  $P_s$  на левой стенке области в зависимости от времени  $t$  (сек): 1 — метод КМГЭ; 2–4 — GNEM:  $Re = 400, 10\,000, 50\,000$

На рис. 1 представлено сравнение хронограмм динамических нагрузок  $P_s$  в зависимости от времени  $t$  (сек) на левой вертикальной стенке области. Хронограммы динамической нагрузки вязкой жидкости на твердых стенках бассейна лежат ниже кривой 1, отражающей значение нагрузки идеальной жидкости. С увеличением числа Рейнольдса до 50 000 кривые нагрузок вязкой жидкости подходят ближе к кривой 1, рассчитанной комплексным методом граничных элементов.

Одним из важнейших преимуществ метода естественных соседей перед классическими сеточными методами является возможность численного моделирования течений, сопровождающихся большими деформациями расчетной области. Для получения моментов обрушения расчетная область задавалась следующим образом:  $D : x \in [0; \pi], y \in [0; 2 + 1,1 \cos(x)]$ . Решение задачи осуществлялось методами GNEM и КМГЭ для числа узлов области 3 690, из которых 145 узлов принадлежат свободной границе, 254 —

твердой. Шаг по времени также выбирался переменным. Комплексный метод граничных элементов позволяет проводить моделирование лишь до момента соприкосновения гребня волны с подошвой. Дальнейший расчет становится невозможен вследствие нарушения связности области. Обобщенный метод естественных соседей позволяет проводить моделирование течений, сопровождающихся сильными деформациями расчетной области. На рис. 2, *a* приведено сравнение профилей свободной границы, полученной различными методами. Результаты сравнения показывают достаточно точное совпадение профилей границ. Наибольшее расхождение соответствует моменту времени непосредственно перед обрушением гребня волны. Момент соприкосновения гребня волны с подошвой происходит для разных методов в разные моменты времени: для GNEM —  $t = 4,53$  сек, для КМГЭ —  $t = 4,61$  сек. На рис. 2, *b* приведены картины течения после моментов обрушения.

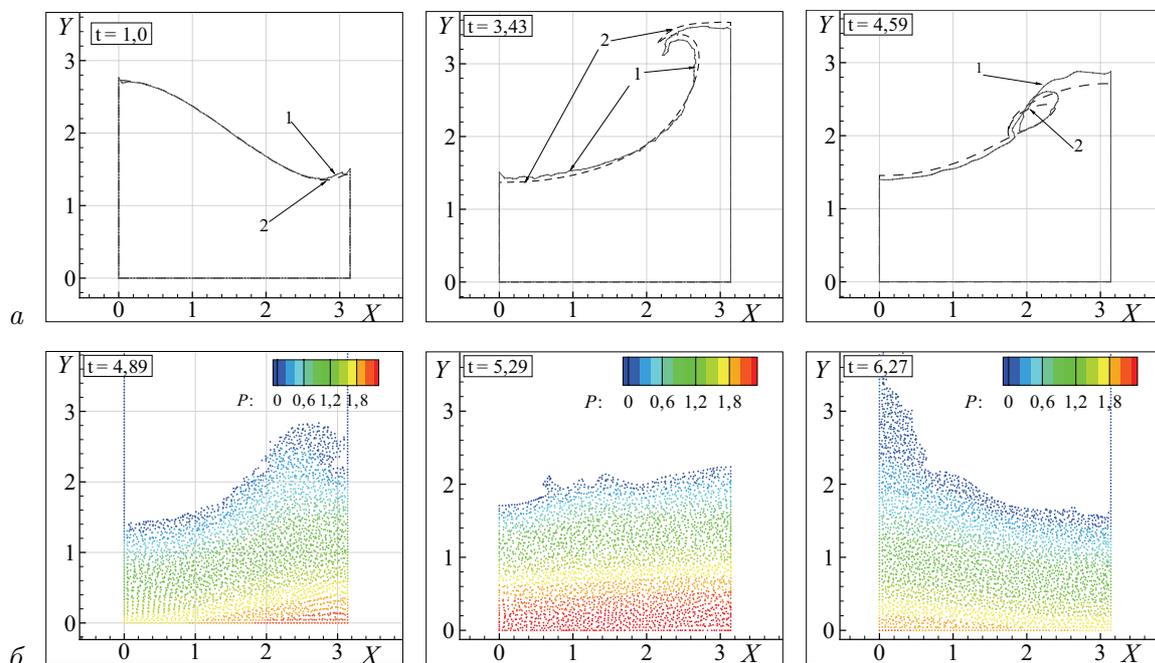


Рис. 2. *a* — профили свободной границы; *b* — картина течения после момента обрушения

На рис. 3 приведены хронограммы динамических нагрузок, создаваемых вязкой и идеальной жидкостями на правой и левой вертикальных стенках: кривая 1 (сплошная) — расчет методом GNEM, кривая 2 (пунктирная) — КМГЭ. Значения нагрузок после момента обрушения получены методом GNEM.

Для контроля консервативности метода GNEM в течение всего расчета проводилась проверка закона сохранения полной энергии системы. К концу расчета относительное отклонение энергии не превосходило 0,93 %.

### Заключение

В работе представлен обобщенный метод естественных соседей, позволяющий проводить численное моделирование задач динамики вязкой несжимаемой жидкости со свободными границами на всех этапах вычислительного эксперимента, включая эта-

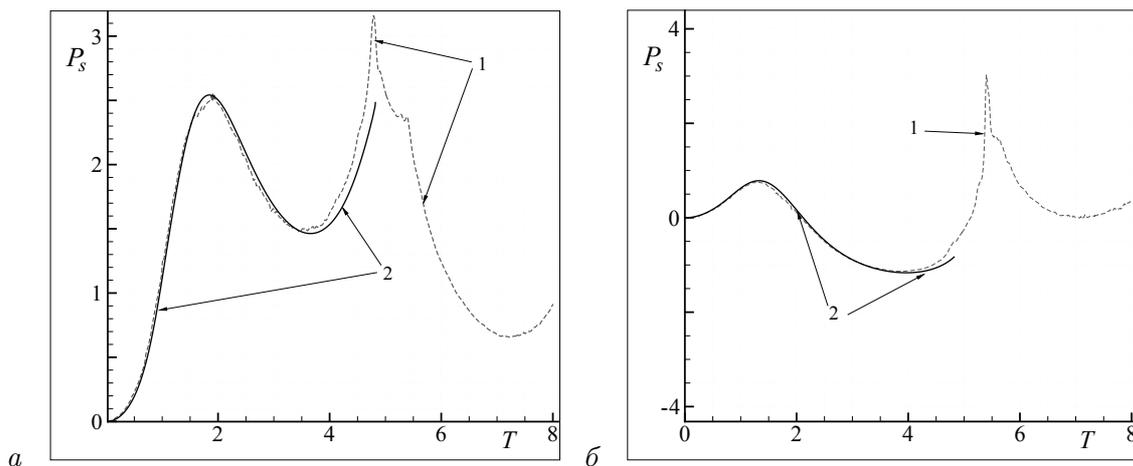


Рис. 3. Динамическая нагрузка: *a* — на правую стенку; *b* — на левую стенку

пы сильно нелинейного поведения течения с образованием многосвязности расчетной области. Характерной особенностью метода является возможность расчета давления жидкости в области и на границе, которое в дальнейшем может быть использовано для получения значений динамических нагрузок, создаваемых жидкостью на твердых стенках области.

Развитие условно-бессеточных численных методов, а именно метода естественных соседей, является важной и актуальной задачей для моделирования течений вязкой несжимаемой жидкостей, что дает возможность получать решение новых задач со свободными границами, решение которых традиционными методами или весьма затруднительно, или вообще невозможно.

### Список литературы

1. Афанасьев К. Е., Стуколов С. В. КМГЭ для решения плоских задач гидродинамики и его реализация на параллельных компьютерах: Учеб. пособие. Кемерово: Изд-во КемГУ, 2001.
2. Беликов В. В., Иванов В. Д., Конторович В. К. и др. Несибсоновская интерполяция — новый метод интерполяции значений функции на произвольной системе точек // Выч. мат. и мат. физика. 1997. Т. 37, № 1. С. 11–17.
3. Карабцев С. Н., Стуколов С. В. Эффективный алгоритм генерации конечноэлементной сетки для метода естественных соседей // Материалы III междунар. науч. летней школы «Гидродинамика больших скоростей и численное моделирование». Кемерово: ИНТ, 2006. С. 401–409.
4. Овсянников Л. В. Общие уравнения и примеры. Задача о неустановившемся движении жидкости со свободной границей. Новосибирск: Наука, 1967. С. 5–75.
5. Франк А. М. Дискретные модели несжимаемой жидкости. М: Физматлит, 2001.
6. Яненко Н. Н. Об экономичных неявных схемах (метод дробных шагов) // ДАН СССР. 1960. Т. 134.
7. Chorin A. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations // Math. comp. 1968. Vol. 22. P. 745–762.

8. *Farin G.* Surfaces over Dirichlet Tessellations // Computer Aided Geometric Design. 1990. Vol. 7. P. 281–292.
9. *Koshizuka S., Tamako H., Oka Y.* A Particle Method for Incompressible Viscous Flow with Fluid Fragmentation // Computational Fluid Dynamics J. 1995. Vol. 4. No. 1. P. 29–46.
10. *Monaghan J.* Smoothed Particle Hydrodynamics // Ann. Rev. Astron and Astrophysics. 1992. No. 30. P. 543–574.
11. *Onate E.* A Stabilized Finite Element Method for Incompressible Viscous Flows Using a Finite Increment Calculus Formulation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2000. Vol. 182. No. 1–2. P. 355–370.
12. *Sibson R.* A Brief Description a Natural Neighbor Interpolation // Interpret Multivariate Data. 1981. Chichester: John Wiley. P. 21–36.
13. *Sukumar N., Moran B., Belytschko T.* The Natural Element Method in Solid Mechanics // Int. J. Num. Methods Eng. 1998. Vol. 43. No. 5. P. 839–887.

Материал поступил в редколлегию 25.01.2008

**Адреса авторов**

АФАНАСЬЕВ Константин Евгеньевич  
РОССИЯ, 650043, Кемерово  
ул. Красная, 6, КемГУ, ЦНИТ  
e-mail: afa@kemsu.ru

РЕЙН Татьяна Сергеевна  
РОССИЯ, 650043, Кемерово  
ул. Красная, 6, КемГУ, ЦНИТ  
e-mail: rein@kemsu.ru