УДК 517.1+519.5

С. С. Гончаров

АЛГОРИТМИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ СИЛЬНО МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ*

Получено положительное решение гипотезы С. Лемппа. Доказано, что все счетные модели сильно минимальных теорий вычислимы с оракулом 0^2, если эта теория имеет хотя бы одну вычислимую модель.

Введение

В теории вычислимых моделей одно из направлений связано с изучением сложности теорий, имеющих вычислимые модели, и алгоритмической сложностью других моделей таких теорий. Пусть T — некоторая непротиворечивая теория первого порядка. Одно из направлений исследований связано с характеризацией теорий, которые могут быть реализованы на вычислимой модели. Еще один класс проблем связан с изучением сложности строения других счетных моделей таких теорий. Эта проблема относится к фундаментальной проблеме существования вычислимых моделей с заданными теоретико-модельными и алгоритмическими свойствами, т. е. с заданной спецификацией. С другой стороны, если теория T имеет вычислимую модель, то какова ее алгоритмическая сложность, т. е. какова тьюрингова степень теории T? Именно к этой проблеме и относится данная работа. Мы изучим алгоритмическую тьюрингову сложность сильно минимальных теорий, реализуемых на вычислимых моделях.

Напомним ключевые определения, используемые в этой статье. Пусть зафиксирован некоторый вычислимый язык L логики первого порядка. Алгебраическая система (модель) $\mathcal{A}$ этого языка над конечной сигнатурой (бесконечной вычислимой) называется **вычислимой**, если базисное множество, базисные операции и предикаты этой алгебраической системы (равномерно) вычислимы. Это эквивалентно тому, что атомная диаграмма этой модели $\mathcal{A}$ вычислима. Модель $\mathcal{A}$ языка L **разрешима**, если она вычислима и полная диаграмма $\mathcal{FD}(\mathcal{A})$ у этой модели вычислима, т. е. существует алгоритм проверки истинности для формул языка первого порядка на элементах этой модели. Мы будем обозначать через $\hat{\varphi}$ геделевский номер формулы φ. Алгебраическая система $\mathcal{B}$ называется **вычислимо (разрешимо) представимой**, если она изоморфна некоторой вычислимой (разрешимой) модели. В этом случае любой изоморфизм $\mathcal{B}$ на вычислимую модель $\mathcal{A}$ называется **вычислимым (разрешимым) представлением** модели $\mathcal{B}$. Полная теория T называется α_1**-категоричной**, если все модели теории T мощности α изоморфны. Модель $\mathcal{M}$ называется α_1**-категоричной**, если ее элементарная теория

*Исследования автора поддержаны грантами РФФИ (проект № 08-01-00336), РФФИ-DEG (проект № 06-01-04002) и грантом ведущих научных школ НШ-335.2008.1

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 38–53

$\mathrm{Th}(\mathcal{M})$ α-категорична. М. Морли [22, 23] доказал, что любая теория, категоричная в несчетной мощности, будет категорична и в мощности $\aleph_1$. Таким образом, среди моделей, категоричных в некоторой мощности, лишь два разных класса: $\aleph_0$-категоричные и $\aleph_1$-категоричные. Категоричные теории в какой-либо бесконечной мощности — один из классических объектов в теории моделей. Типичными примерами $\aleph_1$-категоричных теорий являются теории алгебраически замкнутых полей фиксированных характеристик, теория векторных пространств над фиксированным счетным полем, теория следования системы (ω, S). В [2] Дж. Балдвин и А. Лахлан получили полную алгебраическую характеризацию моделей несчетно-категоричных теорий. Они показали, что все счетные модели $\aleph_1$-категоричной теории T, которая не является счетно-категоричной, могут быть упорядочены в бесконечную последовательность $\mathcal{A}_0 \preceq \mathcal{A}_1 \preceq \mathcal{A}_2 \preceq \ldots \preceq \mathcal{A}_\omega$ с элементарными вложениями, где $\mathcal{A}_0$ — простая модель этой теории, а $\mathcal{A}_\omega$ — насыщенная модель этой теории, для любого i модель $\mathcal{A}_{i+1}$ является минимальным собственным расширением модели $\mathcal{A}_i$. Ключевым свойством несчетно-категоричных теорий, найденным в работе [2], были понятие сильно минимальной формулы и построение на множестве, выделяемой такой формулой оператора замыкания acl, аналога алгебраического замыкания в полях. Относительно этого оператора было определено понятие базиса, и мощность этого базиса определяет тип изоморфизма моделей теорий, категоричных в несчетной мощности с точностью до изоморфизма.

Формула $\varphi(x)$ называется *минимальной в модели* $\mathcal{M}$ *теории* T, если формульное множество $\varphi(\mathcal{M}) \rightleftharpoons \{a \in |\mathcal{M}| \mid \mathcal{M} \models \varphi(a)\}$ бесконечно, но не делится в ней никакой формулой языка этой теории T с параметрами из этой модели на две бесконечные части.

Формула $\varphi(x)$ называется *сильно минимальной в теории* T, если эта формула $\varphi(x)$ является минимальной в любой модели $\mathcal{M}$ этой теории T.

В [2] Дж. Балдвин и А. Лахлан показали, что любая теория, категоричная в несчетной мощности, но не категоричная в счетной мощности, имеет главное обогащение конечным числом констант, в котором существует сильно минимальная формула. Для сильно минимальной формулы $\varphi(x)$ на подмножествах X формульного множества $\varphi(\mathcal{M})$ для любой модели $\mathcal{M}$ этой теории значение $\mathrm{acl}(X)$ оператора acl равно объединению всех конечных формульных подмножеств $\varphi(\mathcal{M})$ с параметрами из X. Этот оператор ведет себя во многом аналогично оператору алгебраического замыкания в полях и линейного замыкания в векторных пространствах.

Важным подклассом несчетно-категоричных теорий является класс сильно минимальных теорий [3].

Полная теория T называется *сильно минимальной*, если в ней в любой ее модели любое формульное подмножество основного множества этой модели, определимое с параметрами из этой модели, является конечным, либо его дополнение конечно, т. е. в ней тождественно истинная формула является сильно минимальной формулой.

Сильно минимальная теория называется тривиальной, а более точно, с тривиальной предгеометрией, если для любого подмножества $A \subseteq M$ выполнено равенство

$$\mathrm{acl}(A) = \bigcup_{a \in A} \mathrm{acl}(\{a\}).$$

Мы называем теорию *слабо минимальной*, если в ней есть сильно минимальная формула такая, что в любой модели этой теории алгебраическое замыкание определяемого ею подмножества совпадает со всей моделью.

Хорошо известно [5–7], если теория T разрешима, то T имеет разрешимую модель, для которой отношение выполнимости разрешимо. С другой стороны, если теория T имеет вычислимую модель, то теория T разрешима с оракулом $\mathbf{0}^\omega$. Например, теория арифметики $\langle \omega, S, +, \times, \leq, 0\rangle$ эквивалентна, по Тьюрингу, множеству $\mathbf{0}^\omega$, но ее стандартная модель вычислима. Однако все ее другие счетные модели имеют уже неарифметическую сложность [6]. Добавим еще, что существуют примеры конечно аксиоматизируемых и отсюда вычислимо перечислимых теорий, которые не имеют вычислимых моделей [Там же]. Определим через $\mathrm{SCM}(T)$ [24] спектр конструктивных моделей теории T, положив $\mathrm{SCM}(T) = \{i \mid \mathcal{A}_i$ имеет вычислимое представление$\}$. Если теория T $\aleph_1$-категорична и разрешима, то Л. Харингтон [16] и Н. Г. Хисамиев [19] показали, что все счетные модели этой теории T имеют разрешимые представления. Таким образом, в этом случае $SCM(T) = \omega \bigcup \{\omega\}$. В [9] автором было показано, что существует $\aleph_1$-категоричная теория T, вычислимая с оракулом $\mathbf{0}'$, для которой $SCM(T) = \{0\}$, позднее, в 1999 г. был построен аналогичный спектр уже конечной сигнатуры [17]. К. Кудайбергенов [20] обобщил этот результат, показав, что для любого $n \geq 0$ существует $\aleph_1$-категоричная вычислимая с оракулом $\mathbf{0}'$ теория T такая, что $SCM(T) = \{0, 1 \ldots, n\}$. В [21] Б. Хусаинов, А. Нис и Р. Шор показали, что существуют $\aleph_1$-категоричные теории T_1 и T_2, вычислимые с оракулом $\mathbf{0}''$, такие что $\mathrm{SCM}(T_1) = \omega$ и $\mathrm{SCM}(T_2) = \omega \cup \{\omega\} \setminus \{0\}$. С. Гончаров и Б. Хусаинов [12–14], показали, что для любого натурального числа $n \geq 1$ существует $\aleph_1$-категоричная теория конечной сигнатуры T, имеющая вычислимую модель, такая, что T эквивалентна, по Тьюрингу, $\mathbf{0}^n$. Более того, все счетные модели теории T имеют вычислимые представления, и T слабо минимальна. Е. Фокина [8] обобщила этот результат, показав, что для любой арифметической тьюринговой степени a существует $\aleph_1$-категоричная теория конечной сигнатуры T, имеющая вычислимую модель, такая, что T эквивалентна, по Тьюрингу, a. В статье [13] авторы построили для любого данного натурального числа $n \geq 1$ примеры $\aleph_1$-категоричных вычислимых моделей, у которых теории эквивалентны, по Тьюрингу, множеству $\mathbf{0}^n$, но они имели бесконечную сигнатуру. В работах [11, 25] изучались вопросы алгоритмической тьюринговой сложности сильно минимальных теорий, имеющих реализации в вычислимых моделях. В [11] было показано, что все счетные модели сильно минимальной теории с тривиальной геометрией, имеющей вычислимую модель, имеют разрешимое с оракулом 0^2 представление, а сама теория также в этом случае разрешима с оракулом 0^2. В работе [25] была установлена точность этой оценки. Однако для случая произвольных сильно минимальных теорий вопрос о сложности счетных моделей этих теорий, а также о сложности этих теорий оставались открытыми. Решению проблемы тьюринговой сложности моделей сильно минимальных теорий, имеющих вычислимые модели, и посвящена данная работа.

Мы предполагаем, что читатель знаком с основами теории моделей и теории вычислимости. Мы используем некоторые стандартные понятия, такие как концепция X-вычислимых множеств (т. е. множеств, вычислимых с оракулом X), оператор скачка X' для подмножеств $X \subset \omega$. Стандартные ссылки следуют книгам [3, 4, 18, 26] по теории моделей, [27, 28] — по теории вычислимых функций и [6, 7] — по теории вычислимых моделей.

В представленной работе решается вопрос о сложности счетных моделей сильно минимальных теорий, имеющих вычислимую модель. Это положительно решает гипотезу С. Лемппа, а также проблемы 7 и 10 из [15].

Построим алгоритм по выяснению базисности формул в моделях сильно минимальных теорий, т. е. для формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ мы хотим определить ее истинность на наборе $a_1, \ldots, a_n$, состоящем из n различных элементов из базиса счетной насыщенной модели $\mathfrak{M}_\omega$.

Пусть $\mathfrak{M}$ — a-вычислимая модель сильно минимальной теории. Определим алгоритм $Bound^n_{m,a}$, вычислимый с оракулом $a^{(m+2)}$ на формулах в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$.

Алгоритм проверки независимости $\boldsymbol{Bound^n_m}$

Определим с помощью алгоритма $Bound^n_m$ по каждой формуле в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$, набор натуральных чисел $(l_1, \ldots, l_n)$, применив следующий алгоритм.

Шаг n. Перебирая $\ell \in \omega$ с оракулом $a^{(m+2)}$, мы можем проверить истинность в вычислимой сильно минимальной модели формулы

$$(\exists x_1, \ldots, \exists x_{n-1})\,((\exists^{\geq \ell} x_n)\,\varphi(x_1, \ldots, x_n)\ \&\ (\exists^{\geq \ell} x_n)\,\neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

по каждой формуле в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$.

В силу сильной минимальности теории T этой модели найдется наименьшее ℓ_n, для которого эта формула не верна.

Шаг $n-1$. Аналогично предыдущему шагу, перебирая ℓ, найдем теперь наименьшее число ℓ_{n-1} такое, что не верна формула

$$(\exists x_1, \ldots, x_{n-2})\,((\exists^{\geq \ell_{n-1}} x_{n-1})(\exists^{\geq \ell_n} x_n\, \varphi) \vee (\exists^{\geq \ell_{n-1}} x_{n-1})\,\neg\,(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\varphi)).$$

Заметим, что выполнимость формулы

$$(\exists x_1, \ldots, x_{n-2})\,((\exists^{\geq \ell} x_{n-1})(\exists^{\geq \ell_n} x_n\, \varphi) \vee (\exists^{\geq \ell} x_{n-1})\,\neg\,(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\varphi))$$

эквивалентна выполнимости формулы

$$(\exists x_1, \ldots, x_{n-2})\,((\exists^{\geq \ell} x_{n-1})(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\varphi) \vee (\exists^{\geq \ell} x_{n-1})(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\neg\,\varphi)),$$

так как по выбору ℓ_n формула $\neg\,\exists^{\geq \ell_n} x_n\,\varphi$ эквивалентна формуле $\exists^{\geq \ell_n} x_n\,\neg\,\varphi_n$. А истинность последней формулы в вычислимой сильно минимальной модели проверяется уже с оракулом $a^{(m+2)}$.

i) Пусть $0 \le i < n$ и мы уже нашли последовательность элементов $\ell_{n-i+1}, \ldots, \ell_n$ такую, что любого $n > j \ge i$ выполнено в вычислимой сильно минимальной модели

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_j)\,((\exists^{\ge \ell_{j+1}} x_{j+1})\,(\exists^{\ge \ell_{j+2}} x_{j+2}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \,\vee \\ \vee\,(\exists^{\ge \ell_{j+1}} x_{j+1}) \neg\,(\exists^{\ge \ell_{j+2}} x_{j+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi),$$

и эти элементы на каждом шаге выбираются наименьшими с таким свойством.

Перебирая ℓ, найдем первое, когда выполнится в нашей вычислимой сильно минимальной модели формула

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1})\,((\exists^{\ge \ell} x_i)\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \,\vee \\ \vee\,(\exists^{\ge \ell} x_i)\,\neg\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi).$$

Вновь из сильной минимальности нашей модели и минимальности выбранных чисел ℓ_j на каждом шаге мы можем заметить, что выполнимость этой формулы эквивалентна выполнимости формулы

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1})\,(\,(\exists^{\ge \ell} x_i)\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \,\vee \\ \vee\,(\exists^{\ge \ell} x_i)\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\neg\,\varphi).$$

А истинность последней формулы мы можем проверить с помощью оракула $a^{(m+2)}$.

Таким образом, мы находим на шаге i требуемое число ℓ_i, наименьшее с условием выполнимости в нашей вычислимой сильно минимальной модели формулы

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_{i-1})\,(\,(\exists^{\ge \ell_i} x_i)\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1}) \ldots (\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \,\vee \\ \vee\,(\exists^{\ge \ell_i} x_i)\,\neg\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi\,)\,.$$

И, наконец, мы вычислим последовательность элементов $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ с оракулом $a^{(m+2)}$ так, что для любого $0 \le i < n$

$$\neg(\exists x_1, \ldots, x_i)\,(\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \,\vee \\ \vee\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,\neg\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi\,).$$

В этом случае на $\mathfrak{M}$ должна быть выполнена формула

$$(\exists^{\ge \ell_1} x_1)\,(\exists^{\ge \ell_2} x_2) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi,$$

если и только если в модели истинна формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на наборе элементов $a_1, \ldots, a_n$, состоящем из различных элементов из базиса счетной насыщенной модели $\mathfrak{M}_\omega$. Если теория a-вычислимой модели $\mathfrak{M}$ сильно минимальна, то выполнены следующие два свойства:

(1) истинность формулы $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$, на наборе элементов $a_1, \ldots, a_n$, состоящем из различных элементов из базиса счетной насыщенной модели модели $\mathfrak{M}_\omega$, мы можем проверить с оракулом $a^{(m+2)}$;

(2) мы вычислим последовательность элементов $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$ с оракулом $a^{(m+2)}$ так, что для любого $0 \le i < n$ выполнена в модели формула

$$\neg\,(\exists x_1, \ldots, x_i)\,(\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi \vee$$
$$\vee\,(\exists^{\ge \ell_{i+1}} x_{i+1})\,\neg\,(\exists^{\ge \ell_{i+2}} x_{i+2})\,(\exists^{\ge \ell_{i+3}} x_{i+3}) \ldots (\exists^{\ge \ell_n} x_n)\,\varphi\,).$$

Теорема 1. *Если $\mathfrak{M}$ a-вычислимая модель сильно минимальной теории, то все ее счетные модели a^2-вычислимы.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства теоремы воспользуемся релятивизованной версией теоремы К. Эша о ω-системах из [1], которая позволяет по спецификации гиперарифметической сложности строить перечислимые множества, удовлетворяющие этой спецификации.

Прежде чем перейти к описанию конструкции, напомним основные понятия конструкции α-систем из [1], а также их релятивизацию для вычислений с оракулом X.

Мы будем рассматривать альтернативные деревья P на множествах L и U, $L \cap U = \varnothing$, состоящие из непустых конечных альтернированных последовательностей σ вида $\ell_0 u_1 \ell_1 u_2 \ell_2 \ldots \varepsilon_m$, где $\ell_i \in L$ и $u_i \in U$. Предполагается, что P не имеет концевых ветвей, т. е. каждая последовательность из P имеет собственное расширение в P.

Инструкцией для дерева P называется функция q из множества последовательностей нечетной длины, т. е. с последним символом из L такая, что если σ последовательность нечетной длины из P и $q(\sigma) = u$, то $\sigma u \in P$.

Путями в (P, q) называются бесконечные последовательности вида $\pi = \ell_0 u_1 \ell_1 u_2 \ell_2 \ldots$ такие, что начальные отрезки $\ell_0, \ldots, u_n, \ell_n$ этой последовательности лежат в P и $u_{n+1} = q(\ell_0, u_1, \ldots, u_n, \ell_n)$ для всех $n \in \omega$. Перечисляющей функцией на L называется функция E, сопоставляющая каждому элементу из L некоторое конечное множество.

Если $\pi = \ell_0 u_1 \ell_1 u_2 \ell_2 \ldots$ путь в (P, q), то определим

$$E(\pi) = \bigcup_{i \in \omega} E(\ell_i).$$

Мы полагаем, что множества L и U вычислимо перечислимы с оракулом X, альтернативное дерево $\mathcal{D}$ на L и U вычислимо перечислимо с оракулом X, а все последовательности из $\mathcal{D}$ начинаются с фиксированного $\hat{\ell}$ из L.

Пусть E будет частичная вычислимая с оракулом X функция, определенная на элементах из L, а q $\Delta^{0,X}_{\alpha}$ — инструкция на P, где α — вычислимый с оракулом X ординал.

Пусть на множестве L будет задана равномерно вычислимая на элементах L система бинарных отношений $\le_\beta$ для $\beta < \alpha$, равномерно перечислимых с оракулом X по β. Это означает, что существует функция, вычисляющая по β вычислимо перечислимый с оракулом X индекс для отношения $\le_\beta$.

Определенная выше структура $(L, U, \hat{l}, P, E(\le_\beta)_{\beta<\alpha})$ называется α-X-системой, если выполнены также следующие условия:

(1) отношения $\le_\beta$ рефлексивны и транзитивны для каждого $\beta < \alpha$;

(2) $\ell \le_\gamma \ell' \Rightarrow \ell \le_\beta \ell'$ для $\beta < \gamma < \alpha$;

(3) если $\ell \le_0 \ell'$, то $E(\ell) \sqsubseteq E(\ell')$;

(4) если $\sigma u \in P$, где σ заканчивается элементом ℓ^0 из L и

$$\ell^0 \leq_{\beta_0} \ell^1 \leq_{\beta_1} \ldots \leq_{\beta_{k-1}} \ell^k \quad \text{и} \quad \alpha > \beta_0 > \beta_1 > \ldots > \beta_k,$$

то существует ℓ^* такое, что $\sigma u \ell^* \in P$ и $\ell^i \leq_{\beta_i} \ell^*$ для каждого $i \leq k$.

Сформулируем теперь релятивизованную версию теоремы Эша [1], которая доказывается полностью аналогично оригинальному доказательству К. Эша [Там же].

Теорема 2. *Если $\mathfrak{B} = (L, U, \hat{\ell}, P, E, (\leq_\beta)_{\beta<\alpha})$ α-X-система, то для любой Δ^0_α-инструкции q существует путь (P, q) в π такой, что $E(\pi)$ вычислимо перечислимо с оракулом X. Более того, из $\Delta^{0,X}_\alpha$-индекса для q и всех вычислимо перечислимых индексов с оракулом X компонентов α-X-системы $\mathfrak{B}$ мы можем вычислить Δ^0_α-индекс для π и индекс вычислимо перечислимого с оракулом X множества $E(\pi)$.*

Мы применим эту теорему в случае $\alpha = \omega$ и в качестве оракула рассмотрим множество X степени $a^{(2)}$.

Построим искомую ω-X-систему

$$(L, U, \hat{\ell}, E, P(\leq_\beta)_{\beta<\alpha}).$$

Для этого рассмотрим сигнатуру Σ сильно минимальной теории T и ее представление в виде $\Sigma = \cup \Sigma_n$, где $\Sigma_0 = \{=\}$, Σ_n — конечная сигнатура, $\Sigma_n \subseteq \Sigma_{n+1}$ для любого n, и последовательность Σ_n равномерно строго вычислима по n.

Без ограничения общности, мы можем считать, что в простой модели $\mathfrak{N}_0$ теории T для любого элемента $a \in |\mathfrak{N}_0|$ найдется формула $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(\mathfrak{N}_0)$ конечно и $\mathfrak{N}_0 \models \varphi(a)$, а также, что Σ содержит только предикатные символы и константы.

Рассмотрим множества новых попарно различных констант $c_1, \ldots, c_n$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$, не лежащих в Σ.

Определим сигнатуру $\Sigma^*_n = \Sigma \cup \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$, а также конечные ее части $\Sigma^*_{n,m}$, равные $\Sigma^*_{n,m} = \Sigma_{n+m} \cup \{c_1, \ldots, c_n\} \cup \{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$.

Определим теперь для множества S^* всех предложений сигнатуры $\Sigma^* = \cup \Sigma^*_n$ с переменными из множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, находящихся в пренексной нормальной форме, т. е. имеющих вид

$$(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \ldots (Q_m x_{i_m})\, \psi,$$

где $m \in \omega$, формула ψ бескванторная, а Q_i квантор $\forall$ или $\exists$ для всех $1 \leq i \leq m$, вычислимое перечисление всех формул из этого множества $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ такое, что формула φ_i имеет не более чем i различных однородных групп кванторов. Определим также равномерно по n, m перечисления $D_0[n,m], D_1[n,m], \ldots, D_{h(n,m)}[n,m]$ всех атомарных диаграмм $\Sigma^*_{n,m}$ конечных моделей, в которых каждый элемент является значением некоторой константы сигнатуры $\Sigma^*_{n,m}$. Определим

$$\varphi_i[n,m] \rightleftharpoons \& D_i[n,m] \quad \text{для} \quad i \leq h(n,m).$$

Зафиксируем некоторые вспомогательные обозначения и конструкции. Для формулы φ в пренексной нормальной форме вида $(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \ldots (Q_m x_{i_m})\, \psi$, где $m \in \omega$, формула ψ бескванторная, а Q_i — один из кванторов $\forall$ или $\exists$ для всех $1 \le i \le m$, через $\overline{\varphi}$ обозначим формулу в пренексной нормальной форме $(\overline{Q_1}x_{i_1})(\overline{Q_2}x_{i_2})\dots(\overline{Q_m}x_{i_m})\neg\psi$, где квантор $\overline{Q_i}$ противоположный квантору Q_i.

Для каждой формулы $\varphi(x_0)$ с одной свободной переменной x_0 и натурального числа $l \ge 1$ определим формулу $(\forall x_1)(\forall x_2)\dots(\forall x_l)\Big((\&_{i=1}^{l+1}\varphi(x_i)) \to (\bigvee_{1\le i<j\le l+1} x_i = x_j)\Big)$ и обозначим через $[\varphi(x_0), l]$ пренексную нормальную форму от этой формулы.

Определим теперь для множества $S(x_0)$ всех формул сигнатуры $\Sigma \cup \{c_1,\dots,c_n\}$ с переменными из множества $\{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ и одной свободной переменной x_0, находящихся в пренексной нормальной форме, т. е. имеющих вид

$$(Q_1x_{i_1})(Q_2x_{i_2})\dots(Q_mx_{i_m})\,\psi,$$

где $m \in \omega$, формула ψ бескванторная, а Q_i — квантор $\forall$ или $\exists$ для всех $1 \le i \le m$, вычислимое перечисление всех формул из этого множества $\Delta_0(x_0), \Delta_1(x_0), \dots, \Delta_n(x_0), \dots$ такое, что формула $\Delta_i(x_0)$ имеет не более чем i различных однородных групп кванторов.

Определим в качестве множества U множество всех конечных последовательностей вида $u = \langle k, \varepsilon, u_0, u_1, \dots, u_k\rangle$, состоящих из $k \in \omega, \varepsilon \in \{0,1\}$ и конечных подмножеств u_k множества S^* таких, что выполнены следующие условия:

(1) Если $\varphi \in u_i$, то φ находятся в пренексной нормальной форме и имеет в пренексной нормальной форме не более i чередующихся групп однородных кванторов;

(2) Если $\varphi \in u_{s+1}$ и φ имеет вид $(\exists x_{i_1})\dots(\exists x_{i_s})\varphi'(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$, а формула $\varphi'(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$ имеет не более чем s чередующихся групп однородных кванторов, то существуют константы $a_{k_1},\dots,a_{k_s}$ такие, что

$$\Big[\varphi'\Big]^{x_{i_1}\dots x_{i_s}}_{a_{k_1}\dots a_{k_s}} \in u_s;$$

(3) Если $\varphi \in u_{s+1}$ и φ имеет вид $(\forall x_{i_1})\dots(\forall x_{i_s})\varphi'(x_{i_1},\dots,x_{i_s})$, а формула $\varphi'(x_{i_1},\dots x_{i_s})$ имеет не более чем s чередующихся групп однородных кванторов, то для любых константных символов $a_{k_1},\dots,a_{k_s}$, входящих в формулы из u_{s+1}, выполнено

$$\Big[\varphi'\Big]^{x_{i_1}\dots x_{i_s}}_{a_{k_1}\dots a_{k_s}} \in u_s;$$

(4) Если $\varphi \in u_{s+1}$ и φ — бескванторная формула, то она лежит и в u_s;

(5) Определим для последовательности u и i множество A^i_u, состоящее из всех константных символов, входящих в формулы из множеств u_i, и констант из множества $\{c_1,\dots,c_n\}$. Пусть $|A_n| = m$. Тогда для любого предикатного P символа местности k, включая равенство, и набора констант $d_1,\dots,d_k$ из A^0_u выполнено одно из условий: $P(d_1,\dots,d_k) \in u_0$ или $\neg P(d_1,\dots,d_k) \in u_0$.

(6) Рассмотрим u_0-первое множество, состоящее из бескванторных формул, в последовательности множеств u.

Определим формулы

$$\mathcal{D}_{u_0} = \mathop{\&}_{\varphi\in u_0} \varphi \quad \text{и} \quad \varphi_{u_0}(x_1,\dots,x_n) \leftrightharpoons (\exists y_0,\dots,y_k)\Big[\mathcal{D}_{u_0}\Big]^{c_1,\dots,c_n,a_0,\dots,a_k}_{x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_k},$$

где все константы типа $\{a_0,\dots,a_n,\dots\}$ из формул множества и лежат в множестве $a_0,\dots,a_k$.

С помощью алгоритма $Bound^n_{1,a}$, вычислимого с оракулом $a^{(2)}$ на формулах в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ с одним блоком однородных кванторов, найдем для формулы

$$\varphi_{u_0}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightharpoons (\exists y_0,\ldots,y_k)\Big[\mathcal{D}_{u_0}\Big]^{c_1,\ldots,c_n,a_0,\ldots,a_k}_{x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_k},$$

значения $\ell_1,\ldots,\ell_n$.

В этом случае на $\mathfrak{M}$ должна быть выполнена формула

$$(\exists^{\geq \ell_1} x_1)(\exists^{\geq \ell_2} x_2)\ldots(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\varphi,$$

что мы можем проверить с оракулом $a^{(2)}$.

Таким образом, построенное множество U является вычислимым с оракулом $a^{(2)}$.

Рассмотрим модель $\mathfrak{N}_n$ с базисом $b_1,\ldots,b_n$ из n-элементов сильно минимальной теории T.

Рассмотрим на $\{b_1,\ldots,b_n\} \cup \{$ зн$_{\mathfrak{M}_n}(d)$, где d — константные символы из $\Sigma_n\}$ подмодель $\mathfrak{M}^*_n$ модели $\mathfrak{N}_n$ сигнатуры Σ_n, доопределим в этой модели значение c_i через b_i. Рассмотрим u^*_0, состоящее из всех формул $P^\delta(d_1,\ldots,d_k)$ таких, что P предикатный символ сигнатуры Σ_n, $\delta\in\{0,1\}$, $d_1,\ldots,d_k$ константы из $\Sigma_n\cup\{c_1,\ldots,c_n\}$ и

$$\mathfrak{M}^*_n \models P^\delta(d_1,\ldots,d_k),$$

где $\varphi^0 = \neg\,\varphi$ и $\varphi^1=\varphi$ для формулы φ.

Заметим, что в таком случае $u^* \rightleftharpoons \langle 0,0,u^*_0\rangle$ принадлежит U.

Определим теперь множество L.

Определим теперь вершину нашего дерева $\hat{\ell}$. Рассмотрим множество A_0, состоящее из множества всех константных символов из $\Sigma_m\cup\{c_1,\ldots,c_n\}$. Определим через $\hat{\ell} = \langle\langle u^*\rangle, 0, A_0\rangle$ начальный элемент нашего альтернативного дерева P.

Определим теперь другие элементы L и дерево P.

$L = \{\,\ell = \langle u,m,A_\ell\rangle$, где $u=\langle k,\varepsilon,u_0,u_1,\ldots,u_k\rangle\in U, n\in\omega\,\}$ и A_ℓ состоит из констант из $\Sigma^*_{n,m}$, а во все формулы из u_0 входят константы только из A_ℓ.

Определим для $\ell=\langle u,m,A_\ell\rangle$ из L, где $u=\langle k,\varepsilon,u_0,u_1,\ldots,u_k\rangle\in U, n\in\omega\}$ и A_ℓ состоит из констант из $\Sigma^*_{n,m}$, значение

$$E(\ell) \leftrightharpoons \{\varphi \mid \varphi\in u_0 \text{ и } \varphi \text{ бескванторная формула сигнатуры } \Sigma^*_{n,m}\}.$$

Определим теперь отношения $\leq_n$ на элементах ℓ из L. Полагаем, $\ell^1\leq_n \ell^2$, если $\ell^1=\langle u^1,m^1,A_{\ell^1}\rangle, \ell^2=\langle u^2,m^2,A_{\ell^2}\rangle, A_{\ell^1}\subseteq A_{\ell^2}, u^1=\langle k^1,\varepsilon^1,u^1_0,u^1_1,\ldots,u_k\rangle, u^2=\langle k^2,\varepsilon,u^2_0, u^2_1,\ldots,u^2_{k^2}\rangle$ и $m^1\leq m^2$,$k^1\leq k^2$, а каждая формула, имеющая n различных групп однородных кванторов из u^1, лежит и в u^2, т. е. $u^1_i\subseteq u^2_i$ для всех $i\leq n$. Здесь мы принимаем соглашение, что для всех $i>k_i$ значения $u^S_i=0$ при $i>k^i$.

Определим теперь альтернативное дерево $\mathcal{D}$.

Последовательность типа $\hat{\ell}u^1\ell^1u^2\ell\ldots u^n\ell^n$ лежит в $\mathcal{D}$, где $u^i\in U, l^i\in L$, если $\hat{\ell}\leq_0 \ell^1\leq_0\ell^2\leq_0\ldots\leq_0\ell^n$ и $\ell^i=(u^i,m^i,A^i)$. Ясно, что дерево $\mathcal{D}$ является $a^{(2)}$-перечислимым деревом.

Проверим свойство ω –системы.

Свойства (1)–(3) — очевидны.

Проверим свойство (4).

Пусть $\ell^0 \leq_{m_1} \ell^1 \leq_{m_2} \ell^2 \leq \ldots \leq_{m_k} \ell^k$, $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_k$

$$\ell^i = \langle u^i, s^i, A_{u^i} \rangle, \quad \text{а} \quad u^i = \langle k^i, \varepsilon^0, u_0^i, \ldots, u_{k_i}^i \rangle.$$

Из условий следует, что $s^0 \leq s^1 \leq \ldots \leq s^k$.

Определим множества

$$u_s^* = (u_s^k)^{m_k} \cup (u_s^{k-1})^{m_{k-1}} \cup \ldots \cup (u_s^0)^{m_1},$$

и полагаем

$$\begin{aligned} u^* &= \langle k, \varepsilon^k, u_0^*, \ldots, u_k^* \rangle, \\ \ell^* &= \langle u^*, S_{k+1}, A_{u_k} \rangle, \end{aligned}$$

где

$$(u_s^j)^{m_j} \leftrightharpoons \begin{cases} \varnothing, \text{ если } s > m_j \\ u_s^j, \text{ если } s \leq m_j \end{cases}$$

и $k = \max\{k_i \mid 0 \leq i \leq k\}$.

Заметим, что $A_{u_o} \subseteq \mathcal{A}_{u_1} \subseteq \ldots \subseteq A_{u_k}$ по условию на отношении $\leq_i$.

Бескванторная часть u_0^* совпадает поэтому с u_0^k. Отсюда следует, что $u^* \in U$. А поэтому и $\ell^* \in L$. $(u_s^i)^{m_i} \subseteq (u_s^*)^{m_i}$ и для всех $(u_s^i) \subseteq (u_s^*)$ для $s \leq m_i$, следовательно, $\ell_i \leq_{m_i} \ell^*$.

Таким образом, выполнены все условия ω-X-системы для построенной нами структуры.

Определим теперь Δ_ω^0-инструкцию для нашей системы.

Пусть задана последовательность в нашем дереве $\hat{\ell} u^1 \ell^1 \ldots u^k \ell^k \in P$. Тогда

$$\hat{\ell} \leq_0 \ell^1 \leq_0 \ell^2 \leq \ldots \leq_0 \ell^k, \quad \ell^i = \langle u^i, s^i, A_{u^i} \rangle$$

и

$$u^i = \langle k^i, \varepsilon^i, u_0^i, u_1^i, \ldots, u_{k^i}^i \rangle, \quad i \leq k.$$

Заметим, что по условию на элементы из U все u_s^i — конечные множества.

Рассмотрим элемент $\ell^k = \langle u^k, m^k, \mathcal{A}_{\ell^k} \rangle$, где $u^k = \langle k^k, \varepsilon^k, u_0^k, u_1^k, \ldots, u_{k^k}^k \rangle \in U, n \in \omega$, и A_{ℓ^k} состоит из констант из Σ_{n,m^k}^*, а во все формулы из u_0^k входят константы только из A_{ℓ^k}.

Полагаем $p_k \rightleftharpoons k^k$.

Находим наибольшее $s \leq p_k$ такое, что для $(u^k)^s$ выполнено следующее определенное ниже условие $Cor[s]$.

Ранее мы построили алгоритм $Bound_m^n$, работающий с оракулом $a^{(m+2)}$, который по каждой формуле $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$, набор натуральных чисел $(l_1, \ldots, l_n)$, такие, что на a-вычислимой модели

$\mathfrak{M}$ должна быть выполнена формула $(\exists^{\geq \ell_1} x_1)(\exists^{\geq \ell_2} x_2)\ldots(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\varphi$, если и только если в насыщенной модели истинна формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ на наборе элементов $a_1,\ldots,a_n$, состоящем из различных элементов из базиса счетной насыщенной модели модели $\mathfrak{M}_\omega$. Таким образом, истинность формулы $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ с $(m+1)$-блоком однородных кванторов, начинающихся с квантора существования $\exists$, на наборе элементов $a_1,\ldots,a_n$, состоящем из различных элементов из базиса счетной насыщенной модели модели $\mathfrak{M}_\omega$, мы можем проверить с оракулом $a^{(m+2)}$ равномерно по m, если теория модели $\mathfrak{M}_\omega$ сильно минимальна и имеет a-вычислимую модель $\mathfrak{M}$.

По определению множества U для любого элемента $u=\langle k,\varepsilon,u_0,u_1,\ldots,u_k\rangle$ из этого множества рассмотрим формулу

$$\varphi_{u_0}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightharpoons (\exists y_0,\ldots,y_k)\Big[\mathcal{D}_{u_0}\Big]^{c_1,\ldots,c_n,a_0,\ldots,a_k}_{x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_k},$$

где все константы типа $\{a_0,\ldots,a_n,\ldots\}$ из формул множества и лежат в множестве $a_0,\ldots,a_k$, и где $\mathcal{D}_{u_0}=\mathop{\&}\limits_{\varphi\in u_0}\varphi$ для первого в последовательности множеств u множества u_0, состоящего из бескванторных формул. С помощью алгоритма $Bound^n_{m,a}$, вычислимого с оракулом $a^{(2)}$ на формулах в пренексной нормальной форме от n переменных $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ с 1-блоком однородных кванторов, найденных для формулы

$$\varphi_{u_0}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightharpoons (\exists y_0,\ldots,y_k)\Big[\mathcal{D}_{u_0}\Big]^{c_1,\ldots,c_n,a_0,\ldots,a_k}_{x_0,\ldots,x_n,y_0,\ldots,y_k},$$

значений $\ell_1,\ldots,\ell_n$ на $\mathfrak{M}$, должна быть выполнена формула

$$(\exists^{\geq \ell_1} x_1)(\exists^{\geq \ell_2} x_2)\ldots(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\,\varphi.$$

Определим для каждого $s\leq p^k$ множество $D^k_s \rightleftharpoons \bigcup\limits_{i\leq s} u^k_i$ и рассмотрим формулу

$$\Phi^s_{u^k}=\mathop{\&}\limits_{\varphi\in D^k_s}\varphi.$$

Пусть $a_0\ldots a_r$ — все константы, входящие в формулы из $\Phi^s_{u_k}$.

Определим формулу

$$\varphi^s_{u^k}(x_1,\ldots,x_n) \leftrightharpoons (\exists y_0,\ldots,y_k)\left[\Phi^s_{u^k}\right]^{c_1\ldots c_n,a_0,\ldots,a_k}_{x_1\ldots x_n y_0\ldots y_k}.$$

Используя алгоритм приведения к пренексной нормальной форме, легко заметить, что это формула сложности Σ_{s+1}. С оракулом $a^{(s+2)}$ мы определим $\ell^1,\ldots,\ell^n$ такие, что для формулы $\varphi^s_{u^k}(x_1,\ldots,x_n)$ сложности Σ_{s+1} на a-вычислимой модели $\mathfrak{M}$ должна быть выполнена формула $(\exists^{\geq \ell_1} x_1)(\exists^{\geq \ell_2} x_2)\ldots(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\varphi^s_{u^k}(x_1,\ldots,x_n)$, если и только если в насыщенной модели истинна формула $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ на наборе элементов $a_1,\ldots,a_n$, состоящем из различных элементов из базиса счетной насыщенной модели модели $\mathfrak{M}_\omega$.

Условие $Cor[s]$**:** Для формулы $\varphi^s_{u^k}(x_1,\ldots,x_n)$ должна быть выполнена на a-вычислимой модели $\mathfrak{M}$ формула $(\exists^{\geq \ell_1} x_1)(\exists^{\geq \ell_2} x_2)\ldots(\exists^{\geq \ell_n} x_n)\varphi^s_{u^k}(x_1,\ldots,x_n)$.

Мы можем проверить выполнимость условия $Cor[s]$ с оракулом $a^{(s+2)}$. Таким образом, с оракулом $a^{(p_k+2)}$ мы найдем искомое наибольшее $s_0\leq p_k$ такое, что выполнено условие $Cor[s]$.

Если $s_0 < p_k$, то полагаем в качестве значения нашей инструкции $u \rightleftharpoons \langle k^k+1, \varepsilon^k, u_0^k, u_1^k, \ldots, u_{s_0}^k, w_{s_0+1}, \ldots, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_i = \emptyset$ для всех $s_0+1 \le i \le k^k+1$.

Если $s_0 = p_k$, то в зависимости от значения ε^k мы организуем две различные конструкции.

Если $\varepsilon^k = 0$, то находим наименьшее i такое, что a_i лежит в A_{ℓ^k}, и нет формулы $\Delta_j(x_0), j \le k^k$ такой, что $\Delta_j(a_i)$ принадлежит $\cup_{s \le k^k} u_s^k$, и существует число $l \le \max\{k^k, k\}+1$, для которого формула $[\Delta_j(x_0), l]$, ранее определенная по $\Delta_j(x_0)$ и l, также принадлежит $\cup_{s \le k^k} u_s^k$.

Если такого i нет, то полагаем значением нашей инструкции элемент $u \rightleftharpoons \langle k^k+1, \varepsilon^k, u_0^k, u_1^k, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_{k^k+1} = \emptyset$.

Если же такое i найдется, то находим наименьшее $j \le k^k$, для которого найдется $l \le \max\{k^k, k\}+1$ такое, что для набора $u(i,j,l) \rightleftharpoons \langle k^k+1, \varepsilon^k, u_0^k, u_1, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_{k^k+1} = \{\Delta_j(a_i), [\Delta_j(x_0), l]\}$, что для всех $s \le k^k+1$ выполнено условие $Cor[s]$.

Если такого j нет, то полагаем значением нашей инструкции элемент $u \rightleftharpoons \langle k^k+1, \varepsilon^k, u_0^k, u_1^k, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_{k^k+1} = \emptyset$. Если есть, то взяв наименьшее j с такими условиями и для него наименьшее l, для которого на наборе $u(i,j,l) \rightleftharpoons \langle k^k+1, 1-\varepsilon^k, u_0^k, u_1, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_{k^k+1} = \{\Delta_j(a_i), [\Delta_j(x_0), l]\}$, что для всех $s \le k^k+1$ выполнено условие $Cor[s]$, применяем к набору $u(i,j,l)$ процедуру замыкания $w = Cl(u(i,j,l))$ и получаем искомое значение w нашей инструкции в этом случае.

Если $\varepsilon^k = 1$, то находим наименьшее $i \le \max\{k, k^k+1\}$, что оба предложения φ_i и $\overline{\varphi}_i$ имеют точно $m \le k^k+1$ групп однородных кванторов, но $\varphi_i \notin u_m^*$ и $\overline{\varphi}_i \notin u_m^*$. Напомним, что здесь для формулы φ в пренексной нормальной форме вида $(Q_1 x_{i_1})(Q_2 x_{i_2}) \ldots (Q_m x_{i_m})\,\psi$, где $m \in \omega$, формула ψ бескванторная, а Q_i один из кванторов $\forall$ или $\exists$ для всех $1 \le i \le m$, через $\overline{\varphi}$ мы обозначаем формулу в пренексной нормальной форме $(\overline{Q}_1 x_{i_1})(\overline{Q}_2 x_{i_2}) \ldots (\overline{Q}_m x_{i_m})\,\neg, \psi$.

Если такого i нет, то полагаем значением нашей инструкции элемент $u \rightleftharpoons \langle k^k+1, \varepsilon^k, u_0^k, u_1, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}\rangle$, где $w_{k^k+1} = \emptyset$.

Если такое i есть, то определим два элемента $u(i,0) \rightleftharpoons \langle k^k+1, 1-\varepsilon^k, u_0^k, u_1, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}^0\rangle$, где $w_{k^k+1}^0 = \{\varphi_i\}$, и $u(i,1) \rightleftharpoons \langle k^k+1, 1-\varepsilon^k, u_0^k, u_1, \ldots, u_{k^k}^k, w_{k^k+1}^1\rangle$, где $w_{k^k+1}^1 = \{\overline{\varphi}_i)\}$.

Так как для любого $s \le k^k$ выполнено условие $Cor[s]$ для набора u, то существует $\delta \in \{0,1\}$ такое, что выполнено для любого $s \le k^k+1$ условие $Cor[s]$ элемента $u(i,\delta)$. Применяем к набору $u(i,\delta)$ процедуру замыкания $w = Cl(u(i,\delta))$ и получаем искомое значение w нашей инструкции в этом случае.

Построим теперь процедуру замыкания Cl для набора $u = \langle k, \varepsilon, u_0, u_1, \ldots, u_k\rangle$ до элемента из U.

Мы определяем конструкцию по шагам $s \le k$. На каждом шаге s будет определяться последовательность $w^s \rightleftharpoons \langle k, \varepsilon, w_0^s, w_1^s, \ldots, w_k^s\rangle$ такая, что выполнены условия

(1) $w^0 = u$,

(2) для $s > 0$ $i \ne (k-s)$ выполнено равенство $w_i^s = u_i^{s+1}$,

(3) для $s > 0$ множество $w_{k-s}^s \subseteq w_{k-s}^{s+1}$.

Множество w^{s+1}_{k-s} строится на шаге $s > 0$, перебирая все формулы $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ из w^s_{k-s+1} и добавляя к w^s_{k-s} по каждой такой формуле ψ_i множество формул F_i, т. е. $w^{s+1}_{k-s} \rightleftharpoons w^s_{k-s} \cup \bigcup\limits_{1\le i\le m} F_i$.

Построим теперь по каждому $m \ge i \ge 1$ множество F_i. Пусть уже построены множества F_j для $j < i$.

Рассмотрим формулу ψ_i. По построению $\psi_i \in \Sigma_{k-s+1}$ или $\psi_i \in \Pi_{k-s+1}$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\psi_i \in \Sigma_{k-s+1}$, тогда формула ψ_i имеет вид $(\exists x_1)\dots(\exists x_r)\,\psi^0_i$, где $\psi^0_i \in \Pi_{k-s}$. В этом случае рассмотрим первые r новых констант $a_{p+1}, \dots, a_{p+r}$, которые не входят в формулы из $\bigcup\limits_{j\ge k-s+1} w^s_j \cup \bigcup\limits_{j<i} F_j$. Определим теперь $F_i \rightleftharpoons \{[\psi^0_i]^{x_1,\dots,x_r}_{a_{p+1},\dots,a_{p+r}}\}$.

Случай 2. Пусть $\psi_i \in \Pi_{k-s+1}$, тогда формула ψ_i имеет вид $(\forall x_1)\dots(\forall x_r)\,\psi^0_i$, где $\psi^0_i \in \Sigma_{k-s}$. В этом случае определим $F_i \rightleftharpoons \{[\psi^0_i]^{x_1,\dots,x_r}_{a_{j_1},\dots,a_{j_r}} \mid a_{j_1}, \dots, a_{j_r}$ — набор константных символов, имеющих вхождения в формулы из $w_{k-s+1}\}$.

В заключение рассмотрим построенную последовательность $w^k \rightleftharpoons \langle k, \varepsilon, w^k_0, w^k_1, \dots, w^k_k\rangle$. Пусть множество $B[u]$ состоит из всех константных символов, входящих в формулы из w^k_0, либо в множество $\{a_0, \dots, a_k\} \cup \{c_1, \dots, c_n\}$. Рассмотрим теперь число m такое, что сигнатура $\Sigma^*_{n,m}$ содержит все сигнатурные символы из формул множества w^k_0 и символы констант из множества $B[u]$. Построим теперь все множества $D_0, \dots, D_q$, состоящие из атомарных формул $P(d_1, \dots, d_e)$ или их отрицаний $\neg P(d_1, \dots, d_e)$ для предикатных символов P сигнатуры $\Sigma^*_{n,m}$ и константных символов $d_1, \dots, d_e$ сигнатуры $\Sigma^*_{n,m}$. Причем для каждого предикатного символа P сигнатуры $\Sigma^*_{n,m}$ и каждого набора константных символов $d_1, \dots, d_e$ сигнатуры $\Sigma^*_{n,m}$ в каждое из множеств входит только точно одна из этих формул.

Определим теперь последовательности

$$w^{k,i} \rightleftharpoons \langle k, \varepsilon, w^k_0 \cup D^{[n,m]}_{i_0}, w^k_1, \dots, w^k_k\rangle, \quad i \le h(n,m).$$

Применяя к ним алгоритмы $Bound^n_m$, работающие с оракулом $a^{(m+2)}$, мы находим наименьшее i_0 такое, что для всех $s \le k$ для последовательности $w^{k,i_0} \rightleftharpoons \langle k, \varepsilon, w^k_0 \cup D_{i_0}, w^k_1, \dots, w^k_k\rangle$ выполнено условие $Cor[s]$. Это и будет искомая последовательность $Cl(u) \rightleftharpoons w^{k,i_0}$, расширяющая множества из последовательности u, и принадлежащая множеству U.

Заметим, что это построение равномерно по n. Применим теперь к построенной ω-$u^{(2)}$-системе релятивизованный вариант теоремы Эша. Пусть π — путь в построенном альтернативном дереве $\mathcal{D}$ с Δ^0-инструкцией q такой, что множество

$$E(\pi) = \bigcup_{i\in\omega} E(\ell_i)$$

рекурсивно перечислимо с оракулом $u^{(2)}$. Пусть Th имеет вид

$$\pi = \hat{\ell} u^1 \ell^1_1 u^2 \dots \ell^n u^n \dots.$$

Тогда $u^{n+1} = q(\hat{\ell} u^1 \ell^1 \dots u^n \ell^n)$. В силу определения Δ_ω-инструкции q индукцией, мы можем показать, что для любого бескванторного предложения φ_i сигнатуры Σ^*

выполнено $\varphi_i \in E(\pi)$ или $\bar{\varphi}_i \in E(\pi)$. А в силу условия элементы из $\mathcal{U}$, множества u_0^{n+1} совместны и $u_0^n \subseteq u_0^{n+1}$ для любого n. Таким образом, $E(\ell)$ задает диаграмму модели на множестве констант из Σ^*.

Рассмотрим эту модель $\mathfrak{M}_n$. В таком случае, в силу определения множеств u_s^n по Δ_ω-инструкции q множества u_s^n совместны, а $u_s^n \subseteq u_s^{n+1}$ для всех n. Из определения Δ_ω-инструкции q следует, что для любого предложения φ_i сигнатуры Σ^* найдутся n и s такие, что $\varphi_i \in u_s^{n+1}$ или $\bar{\varphi}_i \in u_s^{n+1}$.

Индукцией по n и s мы можем показать, что для любой формулы φ из u_s^n она истинна в построенной модели $\mathfrak{M}_n$. Легко заметить, что для предложений φ сигнатуры Σ по построению следует, что из истинности на a-вычислимой модели $\mathfrak{M}$ следует, что найдутся m и s такие, что $\varphi \in u_s^n$ и, следовательно, $\mathfrak{M}_n$ модель теории $Th(\mathfrak{M})$.

Из определения q следует, что, если формула $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ истинна на базисных элементах $a_1, \ldots, a_n$ в счетной насыщенной модели теории $Th(\mathfrak{M})$, то предложение $\varphi(c_1, \ldots, c_n)$ лежит в u_s^{n+1} при подходящих n и s, но тогда в $\mathfrak{M}_n$ есть n независимых элементов, являющихся значениями $c_1, \ldots, c_n$, а из конструкции q о существовании для каждого константного символа d сигнатуры Σ^* некоторой формулы $\Delta_j(x_0)$ и числа ℓ таких, что $\Delta_j(d)$ и $[\Delta_j(x_0), \ell]$ принадлежат

$$\bigcup_{s \leq k_{n+1}} u_n^{n-s},$$

а это означает, что все другие элементы в построенной модели $\mathfrak{M}_n$ являются алгебраическими над элементами $c_1, \ldots, c_n$.

Таким образом, $\mathfrak{M}_n$ — модель сильно минимальной теории $Th(\mathfrak{M})$, а $c_1, \ldots, c_n$ задают базис этой модели. Следовательно, применив теорему Эша к этой системе, мы получаем $a^{(2)}$-вычислимую модель с базисом из n-элементов.

Для модели с бесконечным базисом сделаем небольшое изменение. Добавляя, начиная с последовательной длины n новую константу c_{n+1} в Δ_ω и в определении случая $\varepsilon = 1$, рассмотрим поиск относительно всех константных символов типа $c_1, \ldots, c_n, \ldots$, входящих в формулы из u. Таким образом, будет получена $a^{(2)}$-вычислимость насыщенной модели этой теории, причем базис у этой модели вычислим с оракулом $a^{(2)}$.

Из этой теоремы следует положительное решение проблемы 7, отрицательное — проблемы 10 [10], и вопрос 3.2 [15] в случае сильно минимальных теорий решается отрицательно, подтверждена гипотеза С. Лемппа о сильно минимальных теориях.

Следствие. *Если $\mathfrak{M}$ — вычислимая модель сильно минимальной теории, то все ее счетные модели 0^2-вычислимы.*

В заключение мне хочется выразить благодарность Стефану Лемппу, Майклу Ласковски, Валентине Харизановой и Чарли МакКою, а также Джулии Найт за многолетнее сотрудничество, обсуждения этих проблем и методов построения вычислимых моделей по различным их спецификациям высокой сложности, сыгравших существенную роль в решении представленных вопросов.

Список литературы

1. *Ash C. J., Knight J. F.* Computable Structures and the Hyperarithmetical Hierarchy. Elsevier Science, 2000.

2. *Baldwin J. T., Lachlan A. H.* On strongly minimal sets // J. Symbolic Logic. 1971. Vol. 36. P. 79–96.

3. *Buechler S. A.* Essential Stability Theory. Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.

4. *Кейслер Г., Чен Ч. Ч.* Теория моделей. М.: Мир, 1977.

5. *Ершов Ю. Л.* Конструктивные модели // Избранные вопросы алгебры и логики. 1974. С. 111–130.

6. *Ershov Yu. L., Goncharov S. S.* Constructive Models // Siberian School of Algebra and Logic. N. Y.: Consultants Bureau, 2000.

7. *Ershov Yu., Goncharov S.* Elementary Theories and Their Constructive Models. Handbook of Recursive Mathematics. Vol. 1 // Stud. Logic Found. Math. Amsterdam. 1998. Vol. 138. P. 261–287.

8. *Фокина Е.* О сложности категоричных теорий с вычислимыми моделями // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика и информатика. 2005. Т. 5, вып. 2. С. 78–86.

9. *Гончаров С. С.* Конструктивные модели ω_1-категоричных теорий // Математические заметки. 1978. Т. 23. С. 885–888.

10. *Goncharov S. S.* Computability and Models // Mathematical Problems from Applied Logic II. International Mathematical. Springer. 2007. Vol. 5. P. 99–216.

11. *Goncharov S., Harizanov V., Lempp S. et al.* Trivial, Strongly Minimal Theories are Model Complete after Naming Constants // Proc. Amer. Math. Soc. 2003. Vol. 131. P. 3901–3912.

12. *Гончаров С., Хусаинов Б.* Сложность категоричных теорий с вычислимыми моделями // ДАН. 2002. Т. 385, № 3. С. 299–301.

13. *Гончаров С., Хусаинов Б.* О сложности теорий вычислимых $\aleph_1$-категоричных моделей // Вестн. Новосиб. гос. ун-та. Серия: Математика, механика и информатика. 2001. Т. 1, вып. 2. С. 63–76.

14. *Гончаров С., Хусаинов Б.* Сложность теорий вычислимых категоричных моделей // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 6. С. 650–665.

15. *Goncharov S., Khoussainov B.* Open Problems in the Theory of Constructive Algebraic Systems // Contemporary Mathematics (AMS). 2000. Vol. 257. P. 145-170.

16. *Harrington L.* Recursively Presented Prime Models // J. Symbolic Logic. 1974. Vol. 39. P. 305–309.

17. *Herwig B., Lempp St., Ziegler M.* Constructive Models of Uncountably Categorical Theories // Proc. Amer. Math. Soc. 1999. Vol. 127. P. 3711–3719.

18. *Hodges W.* A Shorter Model Theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.

19. *Хисамиев Н.* Сильно конструктивные модели разрешимых теорий // Изв. АН Каз. ССР. Серия. Физ.-Мат. 1974. Т. 1. С. 83–84.

20. *Кудайбергенов К.* О конструктивных моделях неразрешимых теорий // Сиб. мат. журн. 1980. Т. 21, № 5. С. 155–158.

21. *Khoussainov B., Nies A., Shore R.* On Recursive Models of Theories // Notre Dame J. Formal Logic. 1997. Vol. 38. No. 2. P. 165–178.

22. *Morley M.* Categoricity in Power // Trans. Amer. Math. Soc. 1965. Vol. 114. P. 514–538.

23. *Morley M.* Countable Models of $\aleph_1$-categorical Theories // Israel J. Math. 1967. Vol. 5. P. 65–72.

24. *Nies A. O.* A New Spectrum of Recursive Models // Notre Dame J. Formal Logic. 1999. Vol. 40. P. 307–314.

25. *Khoussainov B., Lempp S., Laskowski M. et al.* On the Computability-Theoretical Complexity of Trivial Strongly Minimal Models // Proc. of Amer. Math. Soc. 2007. Vol. 135. No. 11. P. 3711–3721.

26. *Pillay A.* Geometric Stability Theory. Oxford: Clarendon Press, 1996.

27. *Роджерс Х.* Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. М.: Мир, 1972.

28. *Soare R. I.* Recursively Enumerable Sets and Degrees. Berlin: Springer-Verlag, 1987.

Материал поступил в редколлегию 20.12.2007

Адреса авторов

ГОНЧАРОВ Сергей Савостьянович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: gonchar@math.nsc.ru