

*А. А. Долгун, М. П. Федорук, Э. П. Шурина*

## МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕ-ВОЛНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ВОЛНОВОДЕ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

Работа посвящена использованию векторного метода конечных элементов для моделирования распространения ТЕ-волны в оптическом волокне. При анализе полученных численных результатов было обнаружено присутствие ложных решений. Анализ аналитического решения данной задачи показал, что ложные решения отличаются наличием ненулевой  $E_r$ -компоненты и не удовлетворяют условию непрерывности поля  $\mathbf{H}$  на границе сердцевины и оболочки волокна.

### Введение

Моделирование распространения электромагнитных волн в оптических волноводах имеет важное практическое значение, так как разнообразные виды оптических волокон в настоящее время являются основой для построения современных линий связи. В данной работе моделирование производится с помощью векторного метода конечных элементов. В простейшем случае волновод представляет собой двухслойную цилиндрическую кварцевую нить, состоящую из сердцевины и оболочки [4]. Показатель преломления сердцевины больше, чем оболочки, поэтому волна, распространяющаяся в сердцевине, испытывает полное внутреннее отражение на границе сердцевины и оболочки и не выходит за границы сердцевины. Прохождение электромагнитных волн в оптическом волокне на заданной частоте возможно только в виде мод — дискретных режимов распространения волн. Моды отличаются друг от друга распределением амплитуды волны в сечении волновода и постоянной распространения, которая определяет скорость моды. ТЕ-волна (transverse electric) состоит из мод, не имеющих компоненты электрического поля вдоль оси волокна. Это позволяет решать задачу как двумерную, и областью, в которой ищется решение, будет являться поперечное сечение волновода.

В данной работе рассматривается простейший волновод, состоящий из двух областей с различными постоянными показателями преломления. В этом случае задача имеет аналитическое решение, что позволяет проверить правильность результатов конечно-элементного моделирования. При этом сам предложенный метод позволяет производить моделирование в областях со значительно более сложной конфигурацией.

---

\*Работа выполнена при финансовой поддержке совместного международного проекта NWO и РФФИ (проект № 047.016.003).

### § 1. Аналитическое решение

Рассмотрим аналитическое решение задачи нахождения напряженности электрического поля ТЕ-волны в волноводе. Область моделирования  $\Omega$  (рис. 1) с границей  $\Gamma$  состоит из сердцевины  $\Omega_1$  с показателем преломления  $n_1$  и оболочки  $\Omega_2$  с показателем преломления  $n_2$ ,  $n_1 > n_2$ . Показатель преломления выражается через диэлектрическую проницаемость как  $n = \sqrt{\varepsilon}$ .

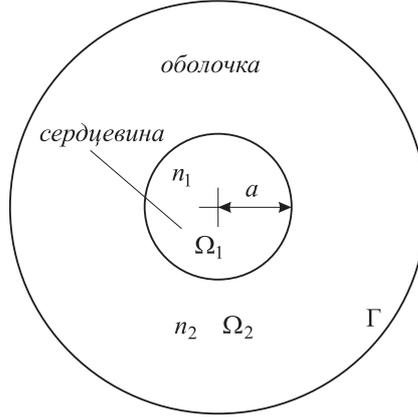


Рис. 1. Область моделирования

Стекло, из которого состоит волновод, является непроводящим неферромагнитным материалом и не содержит электрических зарядов. Поэтому уравнения Максвелла, описывающие распространение электромагнитных волн, для волновода выглядят следующим образом:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad (4)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \quad (6)$$

Заменим в (1)  $\mathbf{B}$  на  $\mathbf{H}$  при помощи (5) и в (2)  $\mathbf{D}$  на  $\mathbf{E}$  при помощи (6). Затем возьмем  $\operatorname{rot}$  от правой и левой частей (1) и (2). Подставим в (1) вместо  $\operatorname{rot} \mathbf{H}$  его выражение (2). Аналогично, в (2) вместо  $\operatorname{rot} \mathbf{E}$  подставим (1). В результате получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}. \quad (8)$$

Искать решения будем в цилиндрических координатах в виде гармонической волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  (оси волокна):

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{E}}(r, \varphi) e^{i(\omega t - \beta z)} \right\}, \quad (9)$$

$$\mathbf{H} = \operatorname{Re} \left\{ \hat{\mathbf{H}}(r, \varphi) e^{i(\omega t - \beta z)} \right\}. \quad (10)$$

Здесь  $\hat{\mathbf{E}} = (E_r, E_\varphi, E_z)$ ,  $\hat{\mathbf{H}} = (H_r, H_\varphi, H_z)$ ,  $\omega$  — циклическая частота,  $\beta$  — постоянная распространения волны вдоль оси  $z$ .

Будем решать уравнения (7) и (8) отдельно в сердцевине и отдельно в оболочке. Подставим (9), (10) в (7), (8). Так как в обеих областях по отдельности  $\mu$  и  $\varepsilon$  постоянны, то из (3) и (4) следует, что  $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$  и  $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ . Воспользовавшись этим, можно показать, что  $z$ -компоненты полей  $\hat{\mathbf{E}}$  и  $\hat{\mathbf{H}}$  удовлетворяют следующим уравнениям. В сердцевине:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} E_z + (n_1^2 k_0^2 - \beta^2) E_z &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} H_z + (n_1^2 k_0^2 - \beta^2) H_z &= 0.\end{aligned}$$

В оболочке:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \operatorname{grad} E_z + (n_2^2 k_0^2 - \beta^2) E_z &= 0, \\ \operatorname{div} \operatorname{grad} H_z + (n_2^2 k_0^2 - \beta^2) H_z &= 0.\end{aligned}$$

Здесь обозначено  $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ . Решая эти уравнения методом разделения переменных и учитывая, что решение в сердцевине должно иметь характер колебаний и быть ограниченным, а решение в оболочке должно убывать с увеличением радиуса, получим, что  $n_1^2 k_0^2 - \beta^2 > 0$ ,  $n_2^2 k_0^2 - \beta^2 < 0$ . Обозначим  $u = a \sqrt{n_1^2 k_0^2 - \beta^2}$ ,  $w = a \sqrt{\beta^2 - n_2^2 k_0^2}$ . Здесь  $a$  — радиус сердцевины волокна. Тогда решение  $H_z$  будет иметь вид

$$H_z = A J_q \left( \frac{ur}{a} \right) \sin(q\varphi + \alpha_1) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (11)$$

в сердцевине и

$$H_z = B K_q \left( \frac{wr}{a} \right) \sin(q\varphi + \alpha_2) e^{i(\omega t - \beta z)} \quad (12)$$

в оболочке. Выражения для  $E_z$  аналогичны. Здесь  $q = 0, 1, \dots$  — константа, называемая круговым номером моды, квадрату которой приравнивались обе части уравнения в методе разделения переменных.  $J_q$  — функции Бесселя первого рода,  $K_q$  — модифицированные функции Бесселя первого рода.  $A, B, \alpha_1, \alpha_2$  — константы.

Перейдем теперь к  $TE$ -волне и найдем напряженность электрического поля в сечении волновода. Для этого запишем (1) и (2) в цилиндрических координатах. Учитывая вид решений (9)–(10), получим

$$\frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} + i\beta E_\varphi = -\mu i \omega H_r, \quad (13)$$

$$-i\beta E_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} = -\mu i \omega H_\varphi, \quad (14)$$

$$\frac{\partial E_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} E_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} = -\mu i \omega H_z,$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi} + i\beta H_\varphi = \varepsilon i \omega E_r, \quad (15)$$

$$-i\beta H_r - \frac{\partial H_z}{\partial r} = \varepsilon i \omega E_\varphi, \quad (16)$$

$$\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} H_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \varphi} = \varepsilon i \omega E_z.$$

Для  $TE$ -волны  $E_z = 0$ . Тогда из (13) и (14) получим

$$H_r = -\frac{\beta}{\mu \omega} E_\varphi,$$

$$H_\varphi = \frac{\beta}{\mu\omega} E_r.$$

Подставив эти выражения в (15) и (16), получим выражения для компонент  $E_r$  и  $E_\varphi$  через производные  $H_z$ :

$$E_r = \frac{\mu\omega}{ri(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}, \quad (17)$$

$$E_\varphi = -\frac{\mu\omega}{i(\omega^2\varepsilon\mu - \beta^2)} \frac{\partial H_z}{\partial r}. \quad (18)$$

В соответствии с (11) и (12)  $H_z$  в сердцевине ( $r < a$ ) и оболочке ( $r > a$ ) имеет вид

$$H_z(r < a) = AJ_q \left( \frac{ur}{a} \right) \cos(q\varphi),$$

$$H_z(r > a) = BK_q \left( \frac{wr}{a} \right) \cos(q\varphi).$$

В обоих уравнениях множитель  $e^{i(\omega t - \beta z)}$  опущен. Фазовые сдвиги  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  выбраны так, чтобы решение, которое будет получено, не было тождественно равно нулю при  $q = 0$ . Дифференцируем  $H_z$  в соответствии с (17) и (18):

$$E_r(r < a) = -\frac{\mu\omega}{i(u/a)^2} \frac{q}{r} AJ_q \left( \frac{ur}{a} \right) \sin(q\varphi), \quad (19)$$

$$E_r(r > a) = \frac{\mu\omega}{i(w/a)^2} \frac{q}{r} BK_q \left( \frac{wr}{a} \right) \sin(q\varphi), \quad (20)$$

$$E_\varphi(r < a) = -\frac{\mu\omega}{i(u/a)^2} \frac{u}{a} AJ'_q \left( \frac{ur}{a} \right) \cos(q\varphi), \quad (21)$$

$$E_\varphi(r > a) = \frac{\mu\omega}{i(w/a)^2} \frac{w}{a} BK'_q \left( \frac{wr}{a} \right) \cos(q\varphi), \quad (22)$$

$$H_\varphi(r < a) = -\frac{\beta}{i(u/a)^2} \frac{q}{r} AJ_q \left( \frac{ur}{a} \right) \sin(q\varphi), \quad (23)$$

$$H_\varphi(r > a) = \frac{\beta}{i(w/a)^2} \frac{q}{r} BK_q \left( \frac{wr}{a} \right) \sin(q\varphi). \quad (24)$$

На границе сердцевины и оболочки, как сред с различными диэлектрическими проницаемостями, тангенциальные компоненты полей  $\hat{\mathbf{E}}$  и  $\hat{\mathbf{H}}$  должны быть непрерывны. В случае ТЕ-волны  $E_z = 0$ , и остается потребовать только непрерывность  $H_z$ ,  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$ . Приравняем компоненты полей  $H_z$ ,  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$  со стороны сердцевины и со стороны оболочки на границе, подставив в уравнения (19)–(24)  $r = a$ . Для  $H_z$ ,  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$  соответственно получим

$$AJ_q(u) = BK_q(w), \quad (25)$$

$$-\frac{\mu\omega}{i(u/a)^2} \frac{u}{a} AJ'_q(u) = \frac{\mu\omega}{i(w/a)^2} \frac{w}{a} BK'_q(w), \quad (26)$$

$$-\frac{\beta}{i(u/a)^2} \frac{q}{a} AJ_q(u) = \frac{\beta}{i(w/a)^2} \frac{q}{a} BK_q(w). \quad (27)$$

Необходимо найти такие  $u$ ,  $w$  и константы  $A$  и  $B$ , которые удовлетворяют всем уравнениям. Легко показать, что  $u$  и  $w$  удовлетворяют соотношению  $u^2 + w^2 = V^2$ , где  $V = n_1 a k_0 \sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_1^2}}$  — постоянная для данного волновода и частоты. Другими словами,  $w$  выражается через  $u$ . Из анализа этой системы уравнений видно, что если удовлетворяется (25), то (27) при  $q \neq 0$  удовлетворено быть не может из-за различия констант

перед  $J_q(u)$  и  $K_q(w)$ . Таким образом,  $q = 0$  и из (19)–(24) следует, что ТЕ-волна имеет только одну ненулевую компоненту электрического поля —  $E_\varphi$ .

Для того чтобы решить (25)–(26), запишем эти уравнения в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} J_q(u) & -K_q(w) \\ \frac{J'_q(u)}{u} & \frac{K'_q(w)}{w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0.$$

Так как константы  $A$  и  $B$  не могут быть равны нулю, то для того, чтобы система имела решения, необходимо, чтобы определитель матрицы был равен нулю. Из этого условия получается выражение, из которого можно найти значения  $u$  и  $w$ :

$$\frac{J_q(u)}{J'_q(u)} = -\frac{w K_q(w)}{u K'_q(w)}. \quad (28)$$

Из (25) определим  $B = \frac{AJ_q(u)}{K_q(w)}$ . Обозначим  $E_0 = A\frac{\mu\omega}{i}$ . Тогда окончательные выражения для компонент электрического поля ТЕ-волны имеют вид

$$\begin{aligned} E_r(r < a) &= -E_0 \left(\frac{a}{u}\right)^2 \frac{q}{r} J_q\left(\frac{ur}{a}\right) \sin(q\varphi) e^{i(\omega t - \beta z)}, \\ E_r(r > a) &= E_0 \left(\frac{a}{w}\right)^2 \frac{q}{r} \frac{J_q(u)}{K_q(w)} K_q\left(\frac{wr}{a}\right) \sin(q\varphi) e^{i(\omega t - \beta z)}, \\ E_\varphi(r < a) &= -E_0 \frac{a}{u} J'_q\left(\frac{ur}{a}\right) \cos(q\varphi) e^{i(\omega t - \beta z)}, \\ E_\varphi(r > a) &= E_0 \frac{a}{w} \frac{J_q(u)}{K_q(w)} K'_q\left(\frac{wr}{a}\right) \cos(q\varphi) e^{i(\omega t - \beta z)}. \end{aligned}$$

Так как ТЕ-волна возможна только при  $q = 0$  и в выражениях для  $E_r$  присутствует множитель  $q$ , то компонента  $E_r$  равна нулю, что соответствует полученным выше результатам.

## § 2. Решение векторным методом конечных элементов

Теперь решим ту же задачу нахождения электрического поля ТЕ-волны в поперечном сечении волновода векторным методом конечных элементов [1]. Исходным уравнением будет (7). Для решения используются декартовы координаты. Решение ищется в виде

$$\mathbf{E} = \text{Re} \left\{ \hat{\mathbf{E}}(x, y) e^{i(\omega t - \beta z)} \right\}, \quad (29)$$

где вектор  $\hat{\mathbf{E}}$  имеет только  $x$  и  $y$ -компоненты. Подставим (29) в (7). Учитывая, что  $E_z = 0$ , и сокращая на  $e^{i(\omega t - \beta z)}$ , получим

$$\text{rot rot } \hat{\mathbf{E}} - (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \hat{\mathbf{E}} = 0. \quad (30)$$

Поле  $\hat{\mathbf{E}}$  равно нулю на границе области, так как электромагнитное поле практически не проникает в оболочку волновода. Поэтому выполняется условие равенства нулю тангенциальной компоненты поля  $\hat{\mathbf{E}}$ :  $\mathbf{n} \times \hat{\mathbf{E}} \Big|_{\Gamma} = 0$ .

Так как дифференциальный оператор  $L = \text{rot rot} - (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2)I$  при выполнении условия равенства тангенциальной компоненты  $\hat{\mathbf{E}}$  на границе области нулю является

самосопряженным, то решение (30) будет эквивалентно минимизации функционала

$$F = \int_{\Omega} \left[ \text{rot } \hat{\mathbf{E}} \cdot \text{rot } \hat{\mathbf{E}} - (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \hat{\mathbf{E}} \cdot \hat{\mathbf{E}} \right] d\Omega \quad (31)$$

на пространстве функций  $\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{\hat{\mathbf{E}} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega); \hat{\mathbf{E}} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0\}$ . В качестве конечных элементов выберем треугольные элементы.

Представим  $\hat{\mathbf{E}}$  в виде

$$\hat{\mathbf{E}} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{N}_i, \quad (32)$$

где  $\mathbf{N}_i$  — векторные базисные функции (edge-элементы).

Подставим (32) в функционал (31) и продифференцируем по  $a_i$ . Приравняв к нулю производные, получим систему уравнений, решение которой даст минимум функционала.  $j$ -уравнение этой системы выглядит следующим образом:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \left[ \text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j - (\omega^2 \mu \varepsilon - \beta^2) \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \right] d\Omega = 0.$$

Так как  $\varepsilon$  в расчетной области изменяется, оставим член с  $\varepsilon$  слева, а искомое  $\beta^2$  перенесем вправо:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \left[ \text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j - \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \right] d\Omega = -\beta^2 \sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega.$$

Таким образом, если перейти к матричным обозначениям, получим обобщенную проблему на собственные значения

$$Aa = -\beta^2 Ba,$$

где элементы локальных матриц, составляющих матрицы  $A$  и  $B$ , имеют вид

$$A_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \left[ \text{rot } \mathbf{N}_i \cdot \text{rot } \mathbf{N}_j - \omega^2 \mu \varepsilon \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j \right] d\Omega^e,$$

$$B_{ij}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_i \cdot \mathbf{N}_j d\Omega^e.$$

$a = (a_1, \dots, a_n)^T$  — собственный вектор,  $\beta^2$  — постоянная распространения волны вдоль оси  $z$ . Задавая характеристики волновода и рабочую частоту, можно найти постоянную распространения  $\beta$  и распределение напряженности электрического поля ТЕ-мод.

### § 3. Решение проблемы на собственные значения неявно перезапускаемым методом Ланцоша

Рассмотрим обычную задачу нахождения собственных значений

$$Ax = \lambda x.$$

Идея метода Ланцоша [2, 3] состоит в приведении исходной симметричной матрицы  $A$  ортогональным преобразованием подобия к трехдиагональной симметричной матрице  $T$ , собственные значения которой совпадают с собственными значениями матрицы  $A$ :

$$Q^T A Q = T.$$

$Q$  — ортогональная матрица.

Затем собственные значения и собственные векторы матрицы  $T$  ищутся каким-либо методом. В этой работе используется  $QR$ -итерация с неявным сдвигом для симметричной трехдиагональной матрицы. Собственные векторы исходной системы выражаются через собственные векторы  $y_i$  матрицы  $T$  и матрицу  $Q$ :

$$x_i = Q y_i.$$

Пусть  $q_i$  — столбцы матрицы  $Q$  (векторы Ланцоша):  $Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$ . Элементы трехдиагональной матрицы  $T$  обозначим следующим образом:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & & & \\ \beta_1 & \alpha_2 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} & \\ & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Приравняв столбцы в равенстве  $AQ = QT$ , можно получить формулы метода Ланцоша:

$$(1) \quad q_1 = b / \|b\|_2, \quad \beta_0 = 0, \quad q_0 = 0$$

$$(2) \quad \text{for } j = 1, 2, \dots$$

$$(a) \quad z = A q_j$$

$$(b) \quad \alpha_j = q_j^T z$$

$$(c) \quad z = z - \alpha_j q_j - \beta_{j-1} q_{j-1}$$

$$(d) \quad \beta_j = \|z\|_2$$

$$(e) \quad \text{Если } \beta_j = 0, \text{ то прекратить выполнение алгоритма}$$

$$(f) \quad q_{j+1} = z / \beta_j$$

$$(g) \quad \text{Вычислить собственные значения и собственные векторы матрицы } T_j$$

*end*

Для вычисления небольшого числа собственных значений матрицы алгоритм Ланцоша выполняется не до полного вычисления матриц  $Q$  и  $T$ , а прерывается после выполнения некоторого числа итераций. Тогда собственные значения вычисленной части матрицы  $T$  являются приближениями к некоторой части собственных значений матрицы  $A$ . При этом используется свойство метода Ланцоша, которое состоит в том, что в матрице  $T$  первыми появляются собственные значения с максимальными модулями.

Иначе говоря, после останова вычислений собственные значения матрицы  $A$  с максимальными модулями будут лучше всех аппроксимированы собственными значениями матрицы  $T$ . Таким образом, метод Ланцоша позволяет находить собственные значения с краев спектра.

На каждой итерации метода Ланцоша вычисляется новый вектор Ланцоша. Для вычисления собственных векторов задачи необходимо хранить весь набор векторов Ланцоша. Это требует большого объема памяти при работе алгоритма. Кроме того, этот объем нельзя определить заранее, так как неизвестно число итераций, обеспечивающее вычисление собственных значений с требуемой точностью. Для решения этой проблемы используется перезапуск метода Ланцоша [5]. Выполняется он следующим образом.

Пусть нам надо вычислить  $k$  собственных значений и собственных векторов матрицы  $A$ . Выберем некоторое  $p \geq 1$  и выполним  $k + p$  итераций метода Ланцоша. Запишем полученное разложение:

$$AQ_{k+p} = Q_{k+p}T_{k+p} + f_{k+p}e_{k+p}^T.$$

Здесь  $e_{k+p}^T = [0, \dots, 0, \underset{k+p}{1}]$  — единичный вектор,  $f_{k+p} = \beta_{k+p}q_{k+p+1}$  — вектор, остающийся после сокращения полного разложения Ланцоша до размерности  $k + p$ . Вычислим собственные значения матрицы  $T_{k+p}$ . Здесь используется  $QR$ -итерация. Разделим собственные значения на два множества: одно размерности  $k$  — собственные значения, которые мы хотим найти (например, максимальные), другое размерности  $p$  — все остальные. Выполним последовательность шагов  $QR$ -итерации с неявными сдвигами, равными нежелательным собственным значениям, над матрицей  $T_{k+p}$  для исключения из нее этих значений.

В результате получим модифицированное разложение Ланцоша:

$$AQ'_{k+p} = Q'_{k+p}T'_{k+p} + f_{k+p}e_{k+p}^T V,$$

где  $Q'_{k+p} = Q_{k+p}V$ ,  $T'_{k+p} = V^T T_{k+p} V$ ,  $V = V_1 V_2 \dots V_p$ . Здесь  $V_i$  — ортогональная матрица, соответствующая  $QR$ -шагу с неявным сдвигом, равным одному из нежелательных собственных значений. После проведения последовательности  $QR$ -шагов производится сокращение разложения до размерности  $k$ . Для этого модифицируется вектор  $f$ :

$$f_k = \mu f_{k+p} + \beta_k q_{k+1},$$

где  $\mu$  —  $k$ -й компонент вектора  $e_{k+p}^T V_1 \dots V_p$ . Последние  $p$  модифицированных векторов Ланцоша отбрасываются. При этом собственные значения полученной после сокращения  $T_k$  будут являться приближениями к искомым собственным значениям. После этого разложение Ланцоша размерности  $p$  опять дополняется до размерности  $k + p$  и процесс повторяется. Таким образом, для хранения векторов Ланцоша требуется фиксированный объем памяти.

Далее приведен алгоритм неявно перезапускаемого метода Ланцоша.

- (1) Выбрать  $q_0$  — начальный вектор для алгоритма Ланцоша.

(2) Выполнить разложение Ланцоша до размерности  $k + p$  :

$$AQ_{k+p} = Q_{k+p}T_{k+p} + f_{k+p}e_{k+p}^T.$$

(3) Найти собственные значения  $T_{k+p}$  и разделить их на искомые и нежелательные.

(4) *while* не достигнем сходимости искомым собственным значениям

(a) *for*  $i = 1 \dots p$

Выполнить  $QR$ -шаг со сдвигом  $\sigma_i$ , равным нежелательному собственному значению:

$$\begin{aligned} T_{k+p} - \sigma_i I &= V_i R \\ T_{k+p} &= R V_i + \sigma_i I \end{aligned}$$

*end for*

(b) Выполнить сокращение разложения Ланцоша до размерности  $k$ , (вычислив  $f$ ).

(c) Расширить разложение Ланцоша до размерности  $k + p$ .

(d) Найти собственные значения  $T_{k+p}$  и разделить их на искомые и нежелательные.

*end while*

Для того чтобы иметь возможность находить не только максимальные по модулю собственные значения, а также для решения обобщенной проблемы на собственные значения

$$Ax = \lambda Bx,$$

применяется преобразование спектра.

Преобразование спектра, называемое Shift-Invert [6], задается следующей формулой:

$$(A - \sigma B)^{-1} Bx = \mu x, \quad \mu = \frac{1}{\lambda - \sigma}. \quad (33)$$

Здесь  $\sigma$  — сдвиг, близкий к собственному значению, которое необходимо найти.

Пусть у нас есть метод, находящий наибольшее собственное значение некоторой матрицы (например, метод Ланцоша). В случае преобразования спектра это матрица  $(A - \sigma B)^{-1} B$ . Если сдвиг  $\sigma$  будет ближе к искомому собственному значению  $\lambda$ , чем ко всем остальным, то собственное значение  $\mu$  в (33) будет наибольшим собственным значением. Найдя  $\mu$ , мы можем вычислить  $\lambda$  по формуле

$$\lambda = \frac{1}{\mu} + \sigma.$$

#### § 4. Численные результаты

**Тест 1. Неявно перезапускаемый метод Ланцоша.** Первый тест предназначен для проверки работоспособности метода Ланцоша (тестирование программы). Найдём 10 максимальных собственных значений матрицы с заданными собственными значениями. В качестве такой матрицы выберем диагональную матрицу размерности  $1\,000 \times 1\,000$ . Так как собственных значений должно быть 10, то  $k = 10$ . Выберем  $p = 20$  дополнительных векторов. В табл. 1 показаны результаты работы метода.

Таблица 1. Точные и вычисленные собственные значения тестовой матрицы

Точные собственные значения	Вычисленные собственные значения
10,0	10,00000000000000
9,6	9,600000000000004
9,3	9,300000000000002
9,0	9,000000000000004
8,7	8,700000000000000
8,4	8,399999999999996
8,0	7,999999999999981
7,6	7,599999999999999
7,4	7,399999999999998
7,2	7,199999999999996

**Тест 2. Моделирование распространения ТЕ-волны в неоднородном волноводе.** Пусть  $k_0^2 = 100$ , радиус сердцевины  $a = 1$ , относительная диэлектрическая проницаемость в сердцевине  $\epsilon_1 = 2,56$ , в оболочке —  $\epsilon_2 = 1,536$ . Вычисления проводились на трех сетках. Были определены 5 максимальных собственных значений. По формуле (28) были вычислены точные решения (собственные значения) и определено, каким модам (мода определяется круговым номером  $q$  и номером корня) они соответствуют. В табл. 2–4 представлены полученные результаты, из которых следует, что с измельчением сетки наблюдается сходимость к точным собственным значениям.

Таблица 2. Решение на сетке, состоящей из 792 ребер

$q$	Номер корня	Точное решение, $\beta^2$	Вычисленное решение, $\tilde{\beta}^2$	$\frac{\beta^2 - \tilde{\beta}^2}{\beta^2}$
1	1	253,419738949271	253,060483246629	0,001417631097449
2	1	249,445635634539	248,308262483234	0,004559603331651
3	1	244,609487242341	242,917781075889	0,006915946660630
0	1	243,883116863818	242,117915274451	0,007237899909048
4	1	239,390986987832	235,377233307740	0,016766519619621

Анализ представленных результатов также показывает, что несмотря на то, что ТЕ-волна возможна только при  $q = 0$ , в численном решении присутствуют ложные собственные значения и соответствующие собственные функции, для которых круговой номер моды  $q > 0$ . Это становится возможным, так как в вариационной постановке метода

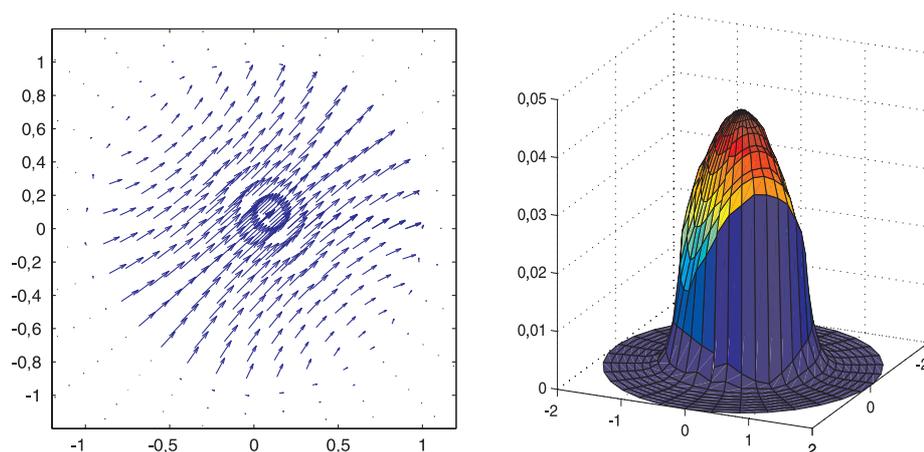
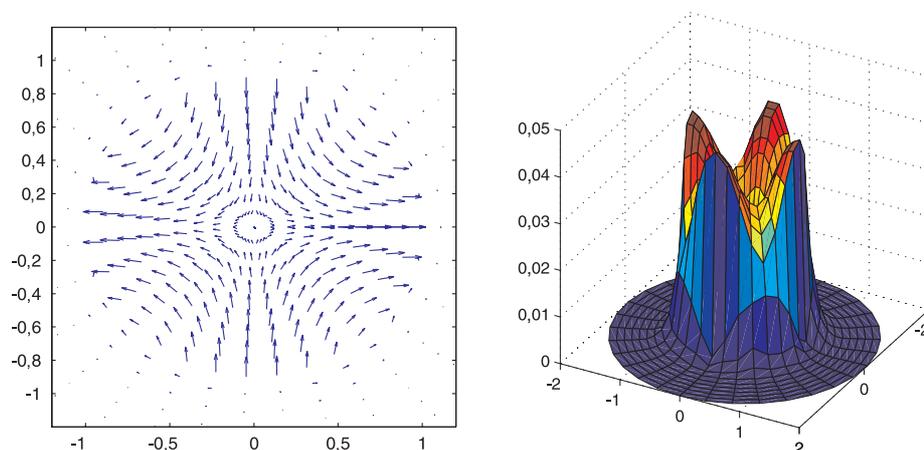
Таблица 3. Решение на сетке, состоящей из 12 540 ребер

$q$	Номер корня	Точное решение, $\beta^2$	Вычисленное решение, $\tilde{\beta}^2$	$\frac{\beta^2 - \tilde{\beta}^2}{\beta^2}$
1	1	253,419738949271	253,381152424025	0,000152263298060
2	1	249,445635634539	249,320489749102	0,000501696031356
3	1	244,609487242341	244,334262475514	0,001125159820781
0	1	243,883116863818	243,777606702382	0,000432625934886
4	1	239,390986987832	238,916810907337	0,001980759954505

Таблица 4. Решение на сетке, состоящей из 49 968 ребер

$q$	Номер корня	Точное решение, $\beta^2$	Вычисленное решение, $\tilde{\beta}^2$	$\frac{\beta^2 - \tilde{\beta}^2}{\beta^2}$
1	1	253,419738949271	253,409662067878	0,000039763601031
2	1	249,445635634539	249,412942488287	0,000131063212106
3	1	244,609487242341	244,537435595429	0,000294557859240
0	1	243,883116863818	243,855711277117	0,000112371807665
4	1	239,390986987832	239,266460563032	0,000520180088511

конечных элементов равно нулю компоненты  $E_r$  не учитывалось. На приведенных векторных диаграммах напряженности электрического поля (рис. 2–6) видно, что в решениях, соответствующих  $q > 0$ , компонента  $E_r$  не равна нулю.

Рис. 2. Векторная диаграмма и модуль напряженности электрического поля для  $q = 1$ Рис. 3. Векторная диаграмма и модуль напряженности электрического поля для  $q = 2$

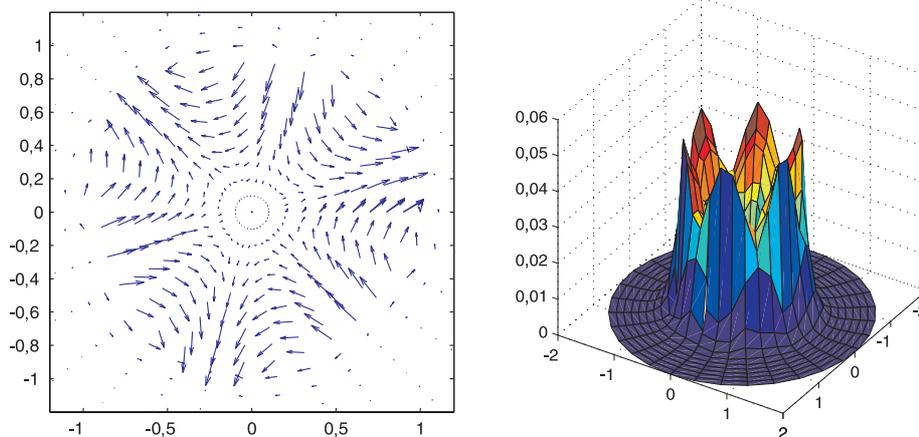


Рис. 4. Векторная диаграмма и модуль напряженности электрического поля для  $q = 3$

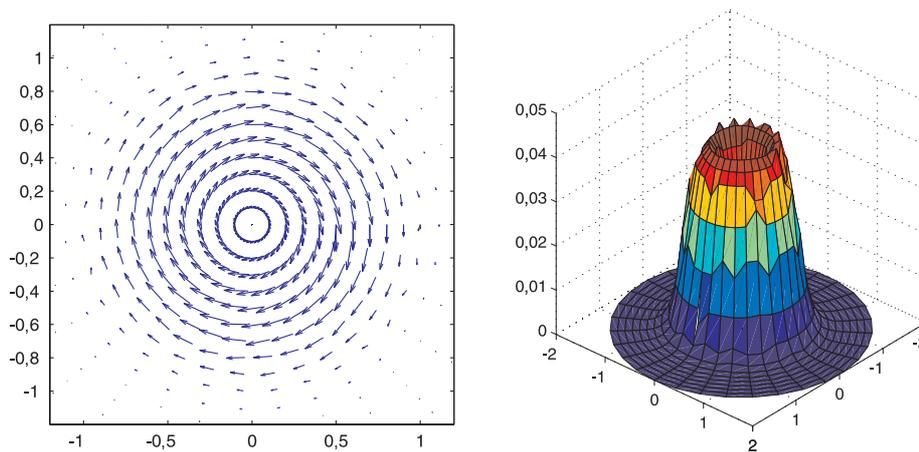


Рис. 5. Векторная диаграмма и модуль напряженности электрического поля для  $q = 0$

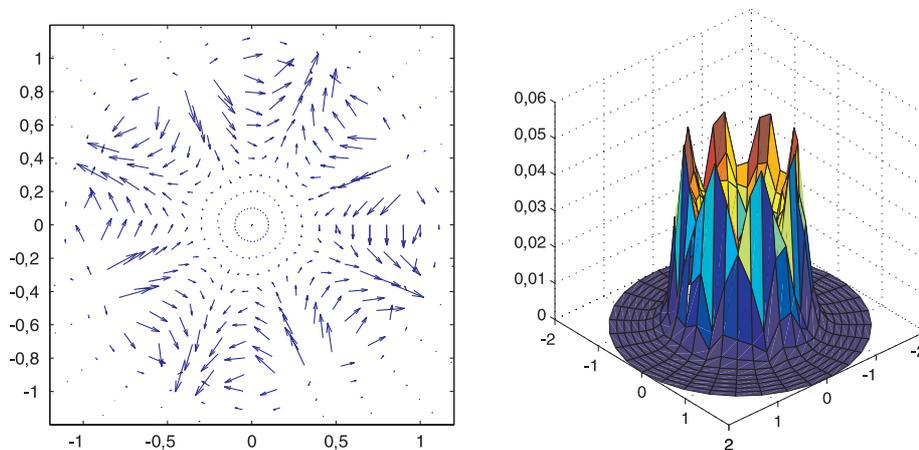


Рис. 6. Векторная диаграмма и модуль напряженности электрического поля для  $q = 4$

### Заключение

В работе представлен метод численного моделирования распространения ТЕ-волны в волноводе, состоящем из двух областей с постоянными показателями преломления. В результате анализа полученных результатов было обнаружено присутствие ложных решений, которые не удовлетворяют условию равенства нулю  $E_z$ -компоненты поля.

### Список литературы

1. Баландин М. Ю., Шурина Э. П. Векторный метод конечных элементов: Учеб. пособие. Новосибирск: НГТУ, 2001.
2. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983.
3. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра. Теория и приложения. М.: Мир, 2001.
4. Buck J. A. Fundamentals of Optical Fibers. N.Y.: John Wiley and Sons, 1995.
5. Lehoucq R. B., Sorensen D. C., Yang C. ARPACK Users' Guide: Solution of Large Scale Eigenvalue Problems with Implicitly Restarted Arnoldi Methods. 1997.
6. Arbenz P., Geus R., Adam S. Solving Maxwell Eigenvalue Problem for Accelerating Cavities // Phys. Rev. ST Accel. Beams. 2001. Vol. 4. Is. 3.

Материал поступил в редколлегию 11.06.2007

### Адреса авторов

ДОЛГУН Алексей Александрович  
РОССИЯ, 630092, Новосибирск  
пр. К. Маркса, 20  
Новосибирский государственный  
технический университет  
e-mail: a\_dolgun@ngs.ru

ФЕДОРУК Михаил Петрович  
РОССИЯ, 630090, Новосибирск  
ул. Пирогова, 2  
Новосибирский государственный  
университет  
e-mail: mife@ict.nsc.ru

ШУРИНА Элла Петровна  
РОССИЯ, 630092, Новосибирск  
пр. К. Маркса, 20  
Новосибирский государственный  
технический университет  
e-mail: shurina@online.sinor.ru