УДК 510.6 + 510.5

М. В. Коровина, О. В. Кудинов

ЭФФЕКТИВНО ПЕРЕЧИСЛИМЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА*

В данной статье мы даем положительный ответ на вопрос, поставленный Дана Скоттом, о существовании класса топологических пространств, расширяющего класс вычислимых метрических пространств и класс ω-непрерывных областей, и для которого понятие вычислимости совпадает с эффективной непрерывностью. В статье введен и изучен класс эффективно перечислимых топологических пространств, обладающий выше перечисленными свойствами.

Введение

Проблемы, исследуемые в предложенной статье, органично возникают в теории вычислимости на несчетных пространствах. Мы предлагаем и исследуем класс эффективно перечислимых топологических пространств. С одной стороны, класс эффективно перечислимых топологических пространств является естественным собственным расширением ω-непрерывных областей и вычислимых метрических пространств. С другой стороны, на классе эффективно перечислимых топологических пространств понятие вычислимости функции является эффективизацией ее непрерывности. Так, вычислимые функции совпадают с эффективно непрерывными.

§ 1. Основные определения и свойства

Пусть (X, τ, ν) — топологическое пространство с носителем X и топологией τ. Обозначим через $\tau^* \subseteq 2^X$ счетную базу топологии и через $\nu : \omega \to \tau^*$ ее нумерацию.

Определение 1. Топологическое пространство (X, τ, ν) называется *эффективно перечислимым*, если:

(1) Существует вычислимая функция $g : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$ такая, что

$$\nu i \cap \nu j = \bigcup_{n \in \omega} \nu g(i, j, n).$$

(2) Множество $\{i \mid \nu i \neq \emptyset\}$ вычислимо перечислимо.

Определение 2. Эффективно перечислимое топологическое пространство (X, τ, ν) называется *строго эффективно перечислимым*, если существует вычислимая функция

*Исследования поддержаны грантом РФФИ 08-01-00336, грантом РФФИ-ННИО 6-01-04002-ННИОа и грантом Научные Школы 335.2008.1, поддержанным советом по грантам при президенте РФ.

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 74–83

$h : \omega \times \omega \to \omega$ такая, что

$$X \setminus cl(\nu i) = \bigcup_{j \in \omega} \nu h(i, j).$$

Следующие утверждения показывают, что вычислимые метрические пространства и ω-непрерывные области являются подклассами множества эффективно перечислимых топологических пространств.

Определение вычислимых метрических пространств можно найти в [2, 11, 15, 18].

Теорема 1. *Если $\mathcal{M} = (M, \nu, \mathbf{B}, d)$ — вычислимое метрическое пространство, то (M, τ_d, ν^*) — строго эффективно перечислимое топологическое пространство.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{M} = (M, \nu, \mathbf{B}, d)$ — вычислимое метрическое пространство и $\mathbf{B} \subseteq M$ — счетное, плотное в M множество. Зафиксируем нумерацию $\nu : \omega \to \mathbf{B}$ и функцию расстояния $d : M \times M \to \mathbb{R}$, вычислимую на $(\mathbf{B}, \nu)$. В дальнейшем мы используем стандартное представление рациональных чисел $(\mathbb{Q}^+, \mu)$, функцию, кодирующую пары, $c : \omega \times \omega \to \omega$ и обратные к ней функции $(l, r) : \omega \to \omega \times \omega$. Обозначим через $B(x, y)$ открытый шар с центром x и радиусом y. Пусть τ_d — топология, индуцированная d, ν^* — нумерация базы топологии τ_d такая, что $\nu^* n = B(\nu l(n), \mu r(n))$. Легко заметить, что

$$\nu^* n \cap \nu^* m = \cup \{B(x, q) \mid x \in \mathbf{B},\ q \in \mathbb{Q}^+,\ d(\nu l(n), x) + q < d(\nu l(n), \mu r(n)) \text{ и } d(\nu l(m), x) + q < d(\nu l(m), \mu r(m))\}$$

является эффективно открытым множеством. Поэтому существует вычислимая функция χ такая, что

$$\nu^* n \cap \nu^* m = \bigcup_{k \in \omega} \nu^* \chi(n, m, k).$$

Так как $\nu^* n \neq \emptyset \leftrightarrow \mu r(n) > 0$, множество $\{n \mid \nu^* n \neq \emptyset\}$ эффективно открыто.

Из того, что множество

$$M \setminus cl(\nu^* n) = M \setminus \bar{B}(\nu l(n), \mu r(n)) = \cup \{B(x, q) \mid x \in \mathbf{B},\ q \in \mathbb{Q}^+,\ d(\nu l(n), x) > q + \mu r(n)\}$$

эффективно открыто, следует, что

$$M \setminus cl(\nu^* i) = \bigcup_{j \in \omega} \nu^* h(i, j) \quad \text{для некоторой вычислимой функции } h.$$

Поэтому (M, τ_d, ν^*) — строго эффективно перечислимое топологическое пространство.

Сравним перечислимые открытые топологические пространства и ω-непрерывные области [1, 3, 6, 14, 17]. Для этого напомним свойства ω-непрерывных областей.

Лемма 1. *Для любой ω-непрерывной области $\mathcal{D} = (D, \{b_i\}_{i \in \omega} \sqsubseteq)$ выполняются следующие свойства:*

(1) *Если $a \ll x$, то существует $n \in \omega$, такое что $a \ll b_n \ll x$.*

В следующем параграфе мы расширим понятие вычислимости [7, 9, 10] *на эффективно перечислимые топологические пространства.*

(2) (D, τ, ν) *является* T_0*-пространством с топологией* τ*, обладающей базой* $\tau^* = \{U_{b_n}\} \cup \{\emptyset\}$*. Нумерация базы* $\nu : \omega \to \tau^*$ *определена следующим образом:* $\nu 0 = \emptyset$, $\nu k = U_{b_{k-1}} = \{x \mid b_{k-1} \ll x\}$, $k > 0$.

Определение 3. Назовем ω-непрерывную область $\mathcal{D} = (D, \{b_i\}_{i\in\omega}, \sqsubseteq)$ *слабо эффективной*, если множество $\{\langle n, m\rangle \mid b_n \ll b_m\}$ вычислимо перечислимо.

Теорема 2. *Каждая слабо эффективная* ω*-непрерывная область является эффективно перечислимым топологическим пространством.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим слабо эффективную ω-непрерывную область $\mathcal{D} = (D, \{b_i\}_{i\in\omega}, \sqsubseteq)$. Зафиксируем топологию τ, определенную базой $\tau^* = \{U_{b_n} \mid n \in \omega\} \cup \{\emptyset\}$, где $U_a = \{x \mid a \ll x\}$, и стандартную нумерацию $\nu : \omega \to \tau^*$. Покажем, что

$$U_{b_n} \cap U_{b_m} = \bigcup_{b_s \gg b_n,\, b_m} U_{b_s}.$$

Если $x \in U_{b_s}$ для $b_s \gg b_n, b_m$, то, по определению, $x \gg b_s$. Поэтому $x \in U_{b_n} \cap U_{b_m}$. Допустим $x \in U_{b_n} \cap U_{b_m}$. По определению, $x \gg b_n$ и $x \gg b_m$, поэтому существуют s_1 и s_2 такие, что $x \gg b_{s_1} \gg b_n$ и $x \gg b_{s_2} \gg b_m$.

Из того, что множество $\{b_i | b_i \ll x\}$ направлено, следует, что существует $b_s \gg b_n, b_m$ такое, что $x \in U_{b_s}$. Из слабой эффективности следует, что множество $\{n \mid U_{b_n} \neq \emptyset\}$ вычислимо перечислимо.

§ 2. Вычислимость на эффективно перечислимых топологических пространствах

Напомним определение оператора перечисления.

Определение 4 [13]. Функция $\Gamma_e : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ называется *оператором перечисления*, если

$$\Gamma_e(A) = B \leftrightarrow B = \{j \mid \exists i\, c(i, j) \in W_e,\ D_i \subseteq A\},$$

где W_e — рекурсивно перечислимое множество с номером e, D_i — конечное множество с номером i.

Определение 5. Пусть $\mathcal{X} = (X, \tau, \alpha)$ — эффективно перечислимое топологическое пространство, и $\mathcal{Y} = (Y, \lambda, \beta)$ — эффективно перечислимое T_0-пространство. Частичная функция $F : X \to Y$ называется *слабо вычислимой*, если существует оператор перечисления $\Gamma_e : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ такой, что для любого $x \in X$ выполняется следующее:

(1) Если $x \in dom(F)$, то

$$\Gamma_e(\{i \in \omega \mid x \in \alpha i\}) = \{j \in \omega \mid F(x) \in \beta j\}.$$

(2) Если $x \notin dom(F)$, то для любого $y \in Y$

$$\bigcap_{j\in\omega} \{\beta j \mid j \in \Gamma_e(A_x)\} \neq \bigcap_{j\in\omega} \{\beta j \mid j \in B_y\},$$

где $A_x = \{i \in \omega \mid x \in \alpha\, i\}$, $B_y = \{j \in \omega \mid y \in \beta j\}$.

Определение 6. Пусть $\mathcal{X} = (X, \tau, \alpha)$ — эффективно перечислимое топологическое пространство, и $\mathcal{Y} = (Y, \lambda, \beta)$ — эффективно перечислимое T_0-пространство. Частичная функция $F : X \to Y$ называется *сильно вычислимой*, если существует оператор перечисления $\Gamma_e : \mathcal{P}(\omega) \to \mathcal{P}(\omega)$ такой, что для любого $x \in X$:

(1) Если $x \in dom(F)$, то

$$\Gamma_e(\{i \in \omega \mid x \in \alpha i\}) = \{j \in \omega \mid F(x) \in \beta j\}.$$

(2) Если $x \notin dom(F)$, то для любого $y \in Y$

$$\bigcap_{j \in \omega} \{\beta j \mid j \in \Gamma_e(A_x)\} \nsubseteq \bigcap_{j \in \omega} \{\beta j \mid j \in B_y\},$$

где $A_x = \{i \in \omega \mid x \in \alpha i\}$, $B_y = \{j \in \omega \mid y \in \beta j\}$.

Предложение 1. *Для всюду определенных функций понятия сильной и слабой вычислимости совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из определений.

Замечание 1. В дальнейшем в случае всюду определенной функции будем использовать термин «вычислимая», если функция слабо или сильно вычислима.

Предложение 2. *Для частичных функций класс сильно вычислимых функций является собственным подклассом слабо вычислимых функций.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим эффективно перечислимое T_0-пространство

$$(\mathbb{N}, \tau, \nu),$$

где $\mathbb{N}$ —натуральные числа, τ — дискретная топология, ν — ее нумерация, определенная следующим образом:

$$\nu\, 0 = \emptyset; \quad \nu\, n + 1 = \{n\}.$$

Нетрудно убедится в том, что слабо вычислимые функции это в точности $h_1 \setminus h_2$, где h_1, h_2 — частично рекурсивные функции, тогда как сильно вычислимые функции совпадают с частично рекурсивными, как видно из следующего предложения.

Предложение 3. *Частичная функция* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *является частично рекурсивной если и только если сильно вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно следует из определений.

Теорема 3. *Пусть* $\mathcal{X} = (X, \tau, \alpha)$ *— эффективно перечислимое топологическое пространство, и* $\mathcal{Y} = (Y, \lambda, \beta)$ *— эффективно перечислимое* T_0*-пространство. Всюду определенная функция* $F : X \to Y$ *вычислима тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция* $h : \omega \times \omega \to \omega$ *такая, что* $F^{-1}(\beta j) = \bigcup_{i \in \omega} \alpha h(i, j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $F : X \to Y$ слабо вычислима. По определению, существует $\Gamma_e(\{i \mid x \in \alpha i\}) = \{j \mid F(x) \in \beta j\}$.

Из того, что $\mathcal{X}$ — эффективно перечислимое топологическое пространство, следует существование вычислимой функции $H : \omega \times \omega \to \omega$ такой, что

$$\bigcap_{i \in D_k} \alpha i = \bigcup_{s \in \omega} \alpha H(k, s).$$

Поэтому

$$x \in F^{-1}(\beta j) \leftrightarrow F(x) \in \beta j \leftrightarrow \exists k\,(D_k \subseteq \{i \mid x \in \alpha i\} \wedge c(k, j) \in W_e) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \bigvee_{c(k,j) \in W_e} x \in \alpha i \leftrightarrow \bigvee_{c(k,j) \in W_e} \exists s x \in \alpha H(k, s) \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow x \in \bigcup_{c(k,j) \in W_e, s \in \omega} \alpha H(k, s) \leftrightarrow x \in \bigcup_{m \in \omega} \alpha h(j, m)$$

для некоторой вычислимой функции $h : \omega \times \omega \to \omega$.

Предположим $F^{-1}(\beta j) = \bigcup\limits_{i \in \omega} \alpha h(i, j)$. Тогда найдется e такое, что для $A_x = \{x \mid x \in \alpha i\}$ выполняется

$$\Gamma_e(A_x) = \{j \mid \exists s\, h(j, s) \in A_x\} = \{j \mid x \in F^{-1}(\beta j)\} = \{j \mid F(x) \in \beta j\}.$$

Предложение 4. *Пусть $\mathcal{X} = (X, \tau, \alpha)$ — эффективно перечислимое топологическое пространство, и $\mathcal{Y} = (Y, \lambda, \beta)$ — эффективно перечислимое T_0-пространство. Всюду определенная функция $F : X \to Y$ вычислима тогда и только тогда, когда эффективно непрерывна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение является прямым следствием теоремы 3.

Нижеследующие результаты показывают инвариантность понятия строгой вычислимости относительно эквивалентных нумераций баз топологий [4].

Определение 7. Пусть (τ_1^*, α) и (τ_2^*, β) — базы топологии τ T_0-пространства X, и α, β — их нумерации. Назовем α и β эквивалентными, $\alpha \equiv \beta$, если $id : (X, \tau_1^*, \alpha) \to (X, \tau_2^*, \beta)$ и $id : (X, \tau_2^*, \beta) \to (X, \tau_1^*, \alpha)$ вычислимы.

Предложение 5. *Если $\beta_1 \equiv \beta_2$ и $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_1)$ вычислима, то $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_2)$ вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\beta_1 \equiv \beta_2$. По определению эквивалентности нумераций найдутся вычислимые функции $g : \omega^2 \to \omega$ и $h : \omega^2 \to \omega$ такие, что

$$\alpha n = \bigcup_{l \in \omega} \beta g(n, l) \quad \text{и} \quad \beta m = \bigcup_{l \in \omega} \alpha h(n, l).$$

Допустим, $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_1)$ вычислима, и Γ_e — соответствующий оператор перечисления. Определим оператор перечисления Γ_s для $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_2)$ следующим образом:

$$k \in \Gamma_s(A) \leftrightarrow \exists\, l\, g(k, l) \in \Gamma_e(A).$$

Если $x \in dom(F)$, то по построению

$$\Gamma_s(\{i \in \omega \mid x \in \alpha i\}) = \{j \in \omega \mid F(x) \in \beta j\}.$$

Для $x \notin dom(F)$ покажем, что

$$\bigcap_{j \in \Gamma_e(A_x)} \beta_1 j \subseteq \bigcap_{i \in \Gamma_s(A_x)} \beta_2 i,$$

где $A_x = \{i \in \omega \mid x \in \alpha i\}$. Пусть $z \in \bigcap_{j \in \Gamma_e(A_x)} \beta_1 j$. Тогда для $i \in \Gamma_s(A_x)$ имеем $g(i, l_i) \in \in \Gamma_e(A_x)$, и поэтому, в силу $z \in \beta_1 g(i, l_i)$, имеем $z \in \beta_2 i$. Следовательно, $z \in \bigcap_{i \in \Gamma_s(A_x)} \beta_2 i$.

Предложение 6. *Если* $\alpha_1 \equiv \alpha_2$ *и* $F : (X, \tau, \alpha_1) \to (Y, \lambda, \beta)$ *вычислима, то и* $F : (X, \tau, \alpha_2) \to (Y, \lambda, \beta)$ *вычислима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_1)$ вычислима, и Γ_e — соответствующий оператор перечисления. Определим опратор перечисления Γ_s для $F : (X, \tau, \alpha) \to (Y, \lambda, \beta_2)$ следующим образом: зададим

$$\Gamma_a(\{i \mid x \in \alpha_2 i\}) = \{i \mid x \in \alpha_1 i\}.$$

Тогда легко видеть, что композиция $\Gamma_s = \Gamma_e \circ \Gamma_a$ является искомым оператором перечисления.

Для того чтобы показать, что понятие вычислимостей, введенное в этой статье, является естественным, рассмотрим вычислимость функций на вычислимых метрических пространствах и ω-непрерывных областях. Сравним сильную вычислимость и сильную (ρ^c_X, ρ^c_Y)-вычислимость для $F : X \to Y$, где X и Y — вычислимые метрические пространства и ρ^c_X, ρ^c_Y — их Коши-представление [2, 18].

Теорема 4. *Пусть* $\mathcal{X} = (X, \lambda, B_X, d_X)$, $\mathcal{Y} = (Y, \beta, B_Y, d_Y)$ *—вычислимые метрические пространства и* (X, τ_X, α^*), (Y, τ_Y, β^*) *– соответствующие им эффективно перечислимые топологические пространства. Для частичных функций* $F : X \to Y$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) F *— сильно* (ρ^c_X, ρ^c_Y)*-вычислимая функция;*
(2) F *— сильно вычислимая функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Хорошо известно, что существуют дуальные эффективные процедуры, преобразующие Коши-представление $\rho^c_X(z)$ в $A_z = \{i \mid z \in \alpha^* i\}$ и обратно.

Из определений сильной вычислимости и сильной (ρ^c_X, ρ^c_Y)-вычислимости следует их совпадение [18].

Обозначим через *dt-вычислимость* вычислимость в смысле теории областей [5, 14].

Теорема 5. *Пусть* $\mathcal{D}_1 = (D_1, \{b_i\}_{i \in \omega}, \sqsubseteq)$ *и* $\mathcal{D}_2 = (D_2, \{c_i\}_{i \in \omega}, \sqsubseteq)$ *— слабо эффективные* ω*-непрерывные области и* (D_1, τ, α), (D_2, λ, β) *— соответствующие им эффективные топологические пространства. Для любой функции* $F : D_1 \to D_2$ *следующие условия эквивалентны:*

(1) F *—* dt*-вычислимая функция;*
(2) F *— вычислимая функция.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) $\to$ 2). Предположим $F : D_1 \to D_2$ — dt-вычислима. Сначала покажем, что $y \ll F(x)$ тогда и только тогда, когда существует $n \in \omega$ такое, что $y \ll F(b_n)$, где $b_n \in \{b_k | b_k \ll x\}$. Действительно, если $y \ll F(x)$, по лемме 1, существует c_k такое, что $y \ll c_k \ll F(x)$. Так как $F(x) = \sup\{F(b_n) | b_n \ll x\}$, существует $n \in \omega$ такое, что $y \ll c_k \sqsubseteq F(b_n)$, т. е., $y \ll F(b_n)$.

Обратное утверждение следует из монотонности F. Отсюда следует эквивалентность

$$i \in \{i \mid c_{i-1} \ll F(x)\} = B_{F(x)} \leftrightarrow \exists k \,(k \in A_x \wedge c_{i-1} \ll F(b_{k-1}))$$

для $A_x = \{i \mid x \in \alpha i\} = \{k \mid b_{k-1} \ll x\}$. Поэтому существует оператор перечисления Γ_e такой, что $\Gamma_e(A_x) = B_{F(x)}$. По определению, F — вычислим.

2) $\to$ 1). Предположим, $F : D_1 \to D_2$ — вычислим. По определению, существует оператор перечисления Γ_e такой, что $\Gamma_e(\{k+1 \mid x \in \alpha i\}) = \{i+1 \mid F(x) \in \beta i\}$. По построению α и β из теоремы 3, $\Gamma_e(\{k \mid b_k \ll x\}) = \{i \mid c_i \ll F(x)\}$. Это означает, что

$$c_i \ll F(x) \;\leftrightarrow\; \exists j \,\forall k \in D_j \,(c(j,i) \in W_e \;\wedge\; b_k \ll x)\,.$$

Поэтому множество $\{c(m,n) \mid c_m \ll F(b_n)\}$ — рекурсивно перечислимо, и, как следствие, F — dt-вычислима.

§ 3. Структуры и эффективно перечислимые топологические пространства

В данной части статьи мы рассмотрим примеры эффективно перечислимых топологических пространств, которые показывают, что вычислимые метрические пространства и ω-непрерывные области являются собственными подклассами класса эффективно перечислимых топологических пространств. Для этого сначала мы покажем дуальность понятий «структура» и «топологическое пространство».

Рассмотрим структуру $\mathcal{A} = \langle A, \sigma_0 \rangle = \langle A, \sigma_P, \neq \rangle$. Предположим, что множество A содержит больше одного элемента и σ_P — предикатный язык, который может не содержать равенства.

Назовем топологией $\tau_\Sigma^{\mathcal{A}}$ топологию на A, определенную базой, состоящей из $\exists$-определимых подмножеств A.

Следующее утверждение является прямым следствием определения эффективно открытого топологического пространства.

Теорема 6. *Для любой структуры $\mathcal{X}$ выполняются следующие свойства:*

(1) *Топологическое пространство $\left(X, \tau_\Sigma^{\mathcal{X}}\right)$ эффективно перечислимо тогда и только тогда, когда теория $Th_\exists(X)$ вычислимо перечислима;*

(2) *Если теория $Th_\exists(X)$ разрешима, то пространство $\left(X, \tau_\Sigma^{\mathcal{X}}\right)$ строго эффективно перечислимо.*

Ниже мы рассмотрим, как по топологическому пространству определить структуру. Пусть (X, τ, ν) — топологическое пространство, где X — непустое множество, $\tau^* \subseteq 2^X$ — база топологии τ с нумерацией $\nu : \omega \to \tau^*$.

Определим структуру для данного топологического пространства следующим образом: $\mathcal{X} = (X, \sigma_P, \neq)$, где $\sigma_P = \{P_i\}_{i\in\omega}$ — предикатный язык, и предикаты $P_i(x)$ интерпретируются как

$$\mathcal{X} \models P_i(x) \quad \text{тогда и только тогда, когда} \quad x \in \nu i.$$

Данные наблюдения показывают дуальность понятий «структура» и «топологическое пространство». Рассмотрим $C(\mathbb{R})$ как один из примеров пространств, не являющихся метризуемыми и не являющихся ω-непрерывными областями.

Наша задача — выбрать подходящий конечный язык так, чтобы топология $\tau_\Sigma^{\mathcal{C}(\mathbb{R})}$ совпадала с классической топологией τ_{c-o}, определенной ниже. Для этого рассмотрим структуру $\mathcal{C}(\mathbb{R}) = (C(\mathbb{R}), P_1, \ldots, P_{12}, \neq)$, где предикаты $P_1, \ldots, P_{12}$ интерпретируются следующим образом.

Первая группа предикатов формализует отношения между супремумом и инфимумом функций, ограниченных на отрезке $[0,1]$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_1(f,g) &\leftrightarrow \sup f|_{[0,1]} < \sup g|_{[0,1]};\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_2(f,g) &\leftrightarrow \sup f|_{[0,1]} < \inf g|_{[0,1]};\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_3(f,g) &\leftrightarrow \sup f|_{[0,1]} > \inf g|_{[0,1]};\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_4(f,g) &\leftrightarrow \inf f|_{[0,1]} > \inf g|_{[0,1]}.
\end{aligned}$$

Вторая группа формализует свойства операций на $C(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_5(f,g,h) &\leftrightarrow f(x)+g(x) < h(x) \text{ для любого } x \in [0,1];\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_6(f,g,h) &\leftrightarrow f(x)\cdot g(x) < h(x) \text{ для любого } x \in [0,1];\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_7(f,g,h) &\leftrightarrow f(x)+g(x) > h(x) \text{ для любого } x \in [0,1];\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_8(f,g,h) &\leftrightarrow f(x)\cdot g(x) > h(x) \text{ для любого } x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Третья группа формализует отношение между f и $\lambda x.x$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_9(f) &\leftrightarrow f(x) > x \text{ для любого } x \in [0,1];\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_{10}(f) &\leftrightarrow f(x) < x \text{ для любого } x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Четвертая группа формализует отношение между h и композицией двух функций f и g:

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_{11}(f,g,h) &\leftrightarrow f(g(x)) < h(x) \text{ для всех } x \in [0,1];\\
\mathcal{C}(\mathbb{R}) \models P_{12}(f,g,h) &\leftrightarrow f(g(x)) > h(x) \text{ для всех } x \in [0,1].
\end{aligned}$$

Напомним определение компактно открытой топологии τ_{c-o} на множестве функций $C(X,Y)$. Пусть (X,α), (Y,β) — топологические пространства, и $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{X}$ — компакт, $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{Y}$ — открытое множество. Тогда предбаза компактно открытой топологии определяется множествами вида

$$U_{\mathcal{O}}^{\mathcal{K}} = \{f \in C(X,Y) \mid f(K) \subset O\}.$$

Так как по теореме Вейерштрасса [19] $\mathbb{Q}[x]$ плотно в $C(\mathbb{R})$, базу τ^*_{c-o} топологии τ_{c-o} и ее нумерацию можно определить следующим образом:

(1) База τ^*_{c-o} — это конечные пересечения множеств типа

$$U^{a,b}_{p,n} = \{f \mid p - \frac{1}{n} < f|_{[a,b]} < p + \frac{1}{n}\}, \quad \text{где } b \in \mathbb{Q},\ p \in \mathbb{Q}[x] \text{ и } \deg(p) = n.$$

(2) Нумерация $\nu : \omega \to \tau^*$ определена стандартным образом.

Предложение 7. *На структуре $\mathcal{C} = (C(\mathbb{R}), P_1, \ldots, P_{12}, \neq)$ компактно открытая топология τ_{c-o} совпадает с $\tau^{\mathcal{C}}_{\Sigma}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\subseteq$). Легко заметить, что для $1 \leq i \leq 12$ множества $\{\bar{x} \mid C(\mathbb{R}) \models P_i(\bar{x})\}$ и их проекции принадлежат τ_{c-o}. По индукции, $\tau_{\Sigma}^{\mathcal{C}(\mathbb{R})} \subseteq \tau_{c_o}$.
$\supseteq$). Из определения базы топологии следует, что достаточно показать, что отношения $f|_{[a,b]} > g|_{[a,b]}$ и $f|_{[a,b]} < g|_{[a,b]}$ являются $\exists$-определимыми. Легко видеть, что $W_{a,b} = \{\chi \mid \chi(0) < a \text{ и } \chi(1) > b\} \subseteq C[0,1]$ — $\exists$-определимое множество в языке $\{P_i, \neq\}_{i \leq 12}$. Так как

$$f|_{[a,b]} < g|_{[a,b]} \leftrightarrow \exists \chi \in W_{a,b} \exists h\, (f \circ \chi < h < g \circ \chi)\,,$$

то $f|_{[a,b]} > g|_{[a,b]}$ и $f|_{[a,b]} < g|_{[a,b]}$ $\exists$-определимы.

Теорема 7. *Топологическое пространство $(C(\mathbb{R}), \tau_{c-o}, \nu)$ является эффективно перечислимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Существование вычислимой функции $g : \omega \times \omega \times \omega \to \omega$ такой, что

$$\nu i \cap \nu j = \bigcup_{n \in \omega} \nu g(i, j, n),$$

следует из определения ν. Элиминация кванторов на $\mathbb{R}$ влечет рекурсивную перечислимость множества $\{i \mid \nu i \neq \emptyset\}$. Действительно, по теореме Вейерштрасса [19], существование $g \in C(\mathbb{R})$ такой, что $g \in \bigcup_{i \in I} U^{a_i,b_i}_{p_i,n_i}$, эквивалентно существованию $m \in \omega$ и полинома $p \in (Q)[x]$ степени m таких, что $p \in \bigcup_{i \in I} U^{a_i,b_i}_{p_i,n_i}$. По элиминация кванторов на $\mathbb{R}$ мы можем эффективно проверить это свойство.

Из следующих утверждений видно, что в случае конечного языка топология $\tau^{\mathcal{A}}_{\Sigma}$ согласована с Σ-определимостью.

Теорема 8. *Любое подмножество A является эффективно открытым тогда и только тогда, когда является Σ-определимым.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следует из семантической характеризации Σ-определимости [8].

Следствие 1. *Любое подмножество $C(\mathbb{R})$ является Σ-определимым тогда и только тогда, когда является эффективно открытым.*

Список литературы

1. *Abramsky S., Jung A.* Domain Theory // Handbook of Logic in Computer Science / Eds. S. Abramsky, D. Gabbay, T. S. E. Maibaum. Oxford: Oxford Univ. Press, 1994. P. 1–168.

2. *Brattka V., Presser G.* Computability on Subsets of Metric Spaces // Theor. Comput. Sci. 2003. Vol. 305. No. 1–3. P. 43–76.

3. *Edalat A., Sönderhauf P.* A Domain-theoretic Approach to Real Number Computation // Theor. Comput. Sci. 1998. Vol. 210. P. 73–98.

4. *Ershov Yu. L.* Numbering Theorey (in Russian). M.: Nauka, 1977.

5. *Ershov Yu. L.* Model $\mathbb{C}$ of Partial Continuous Functionals // Logic Colloquium 76. North-Holland, Amsterdam. 1977. P. 455–467.

6. *Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K. et al* Continuous Lattices and Domains. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2003.

7. *Korovina M., Kudinov O.* The Uniformity Principle for Σ-definability with Applications to Computable Analysis / Eds. S.B. Cooper, B. Löwe, A. Sorbi // CiE'07. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2007. Vol. 4497. P. 416–425.

8. *Korovina M., Kudinov O.* Basic Principles of Σ-definability and Abstract Computability // Fachbereich Mathematik. 2008. No. 08–01. P. 1–24.

9. *Korovina M., Kudinov O.* Towards Computability of Higher Type Continuous Data / Eds. S.B. Cooper, B. Löwe, L. Torenvliet // CiE. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 2005. Vol. 3526. P. 235–241.

10. *Korovina M., Kudinov O.* Characteristic Properties of Majorant-Computability over the Reals / Eds. G. Gottlob, E. Grandjean, K. Seyr // CSL. Lecture Notes in Computer Science. Springer, 1998. Vol. 158. P. 188–203.

11. *Moschovakis Y. N.* Recursive Metric Spaces // Fund. Math. 1964. Vol. 55. P. 215–238.

12. *Myhill J., Shepherdson J. C.* Effective Operators on Partial Recursive Functions // Zeitschrift fur Mathematische Logik Grundlagen def Mathematik. 1955. Vol. 1. P. 310–317.

13. *Rogers H. Jr.* Theory of Recursive Functions and Effective Computability. N.Y.: McGraw-Hill, 1967.

14. *Scott D.* Outlines of Mathematical Theory of Computation // Proc. 4$^{\text{th}}$ Annual Princeton Conf. on Information Sciences and Systems. Princeton: Princeton Univ. Press. 1970. P. 169–176.

15. *Spreen D.* On Effective Topological Spaces // JSL. 1998. Vol. 63. No. 1. P. 185–221.

16. *Spreen D., Young P.* Effective Operators in a Topological Setting // Lecture Notes in Mathematics. 1984. Vol. 1104. P. 436–451.

17. *Weihrauch K.* Berechenbarkeit auf cpo's // Schriften zur Angewandten Mathematik und Informatik. Aachen. 1980. No. 63.

18. *Weihrauch K.* Computable Analysis. Berlin: Springer Verlag, 2000.

19. *Weierstrass K.* Sitzungsber // Acad. Berlin. 1885-S. 633-9. P. 789–805.

Материал поступил в редколлегию 05.05.2008

Адреса авторов

КОРОВИНА Маргарита Владимировна
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Лаврентьева, 6
Институт систем информатики
им. А.П. Ершова СО РАН
e-mail: ritakor@yandex.ru

КУДИНОВ Олег Викторович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
пр. Акад. Коптюга, 4
Институт математики СО РАН
e-mail: kud@math.nsc.ru