УДК 512.54

А. И. Ковыршина

НЕПОДВИЖНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В СВОБОДНЫХ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУППАХ РАНГА ТРИ*

Рассматриваются неподвижные точки в свободных нильпотентных группах относительно всех автоморфизмов этой группы. Известно, что такие элементы существуют, но их нахождение является технически сложным процессом. В данной работе приведены примеры неподвижных элементов свободной нильпотентной группы ступени 12, с двумя и тремя образующими.

Введение

В работе рассматриваются неподвижные элементы в свободных нильпотентных группах относительно любого автоморфизма этой группы. Такие элементы имеют большое значение в изучении групп, так как они играют роль констант при решении уравнений. А. Мясников в проекте MAGNUS[1] поставил вопрос № 1: Пусть G — свободная нильпотентная группа конечного ранга r. Пусть элемент $g \in G$ неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G. Верно ли, что $g = 1$? Ранее аналогичные вопросы рассматривались в алгебрах Ли Ф. Вефером [1] и М. Барроу [2, 3]. Если множество однородных элементов степени n алгебры Λ, инвариантных относительно всех унимодулярных подстановок множества r образующих, имеет ранг 1, то его базисный элемент называется инвариантом Ли степени n. В этих работах были найдены условия на n и r, при которых инварианты Ли существуют. На языке теории групп это означает, что были определены ступень n и ранг r свободной нильпотентной группы, в которой существует элемент, переходящий при любом автоморфизме группы в себя или в свой обратный [4]. Для $r = 2$ в 1998 г. В. В. Блудов [5] привел примеры элементов, являющихся неподвижными относительно любого автоморфизма свободной нильпотентной группы $G \in N^{4k}$, $k > 1$. Эти элементы представлены в виде комбинации трех базисных коммутаторов: $[a, b]$, $[a, b, b]$, $[a, b, a]$, например, элемент $[a, b, a, [a, b, b], [a, b]]$ неподвижен относительно любого автоморфизма свободной нильпотентной группы ранга два и ступени восемь. Затем, в 2001 г., на основании указанных выше работ Вефера и Барроу, А. Папистас [6] и Е. Форманек [4] классифицировали все пары (r, n), при которых существуют неединичные неподвижные элементы относительно любого автоморфизма свободной нильпотентной группы ранга r и ступени n. Так, для $r = 3$ ступень $n = 2kr$, $k \geq 2$. При этом вопрос о конкретном виде неподвижного элемента в этих группах остался открытым.

В данной работе приведены конкретные элементы, неподвижные относительно всех автоморфизмов свободных нильпотентных групп рангов 2, 3 и ступени нильпотентно-

---

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 03-01-00320).

[1] http://www.grouptheory.org/grouptheory.org/projects-and-problems

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 84–90

сти 12. В примере 1 неподвижный элемент свободной нильпотентной группы ранга 2 представлен в виде произведения четырех базисных коммутаторов, что дает другой вид неподвижного элемента по сравнению с работой [5]. В примере 2 неподвижный элемент свободной нильпотентной группы ранга 3 представлен в виде произведения 22 базисных коммутаторов. Отметим, что при этом элемент принадлежит четвертому коммутанту группы. В примере 3 представлен неподвижный элемент в относительно свободной нильпотентной группе ступени 12, ранга 3, являющейся трехступенно разрешимой группой.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора В. В. Блудова за постановку задачи, ценные советы и полезные замечания. Признателен доценту В. Ф. Клейменову за обсуждения, способствовавшие разъяснению неясных и спорных вопросов.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

Основные определения можно найти в книгах [7, 8]. В основном мы используем стандартные обозначения, но поскольку основные вычисления происходят в центре группы, то для более наглядного восприятия формул для умножения используем знак $+$, а коммутаторы записываем как принято в алгебрах Ли: вместо $[a,b]$ пишем (ab), вместо $[a,b,a]$ — (aba) и т. д.

Напомним определение базисных коммутаторов. Пусть a_1, a_2, a_3 — образующие группы G, считаем их базисными коммутаторами веса один и полагаем $a_1 > a_2 > a_3$. Базисными коммутаторами веса два являются

$$c_1 = (a_1a_2), \quad c_2 = (a_1a_3), \quad c_3 = (a_2a_3), \tag{1}$$

упорядоченные по правилу: $c_1 > c_2 > c_3$. Предполагая, что все базисные коммутаторы веса меньшего n, $n \geq 3$ построены и упорядочены, построим базисные элементы, являющиеся коммутаторами веса n и упорядочим их. Для того чтобы получить базисный коммутатор z веса n, выберем базисный элемент $t = (uv)$ веса k, $2 \leq k \leq n$, где u, v в свою очередь являются базисными элементами, и возьмем такой базисный элемент w степени $n-k$, что $v \leq w < t$, после чего полагаем $z = (tw)$. Считаем далее, что базисные элементы веса меньшего, чем n, предшествуют элементам веса n, а для двух элементов веса n полагаем $(tw) < (pq)$, если $w < q$ или $w = q$ и $t < p$. Таким образом, коммутаторы

$$b_1 = (a_1a_2a_1), \quad b_2 = (a_1a_2a_2), \quad b_3 = (a_1a_3a_1), \quad b_4 = (a_1a_3a_2), \tag{2}$$

$$b_5 = (a_1a_3a_3), \quad b_6 = (a_2a_3a_1), \quad b_7 = (a_2a_3a_2), \quad b_8 = (a_2a_3a_3) \tag{3}$$

являются базисными веса три.

Введем обозначения для автоморфизмов группы G:

$$\varphi_{21} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \to a_1 \\ a_2 \to a_2a_1 \\ a_3 \to a_3 \end{array} \right., \quad \tau_{12} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \to a_2 \\ a_2 \to a_1 \\ a_3 \to a_3 \end{array} \right., \quad \tau_{13} = \left\{ \begin{array}{l} a_1 \to a_3 \\ a_2 \to a_2 \\ a_3 \to a_1 \end{array} \right. .$$

Известно, что φ_{ij}, $i \neq j$ являются порождающими группы $SL_3(Z)$ [9]. Так как τ_{12}, τ_{13} порождают группу S_3, а φ_{21} и элементы из S_3 порождают все φ_{ij}, то для того, чтобы проверить, является ли элемент g свободной нильпотентной группы ранга 3 неподвижным относительно всех ее автоморфизмов, достаточно проверить, что g принадлежит центру и неподвижен относительно автоморфизмов φ_{21}, τ_{12}, τ_{13}.

§ 2. Нахождение неподвижного элемента

Занумеруем базисные коммутаторы u_i, $i \in I$ из центра свободной нильпотентной группы G с образующим a_1, a_2, a_3. Под действием автоморфизма φ_{21} элемент $g = \sum n_i u_i$ переходит в сумму $g + \sum n_i v_i + w$, где элементы v_i получены из u_i заменой одного образующего a_2 на a_1, w — сумма коммутаторов, полученных из u_i заменой более одного образующего a_2 на a_1. Коммутаторы v_i и w могут потерять базисный вид, поэтому их необходимо преобразовать в базисные. Преобразуем v_i в линейную комбинацию базисных коммутаторов $\sum\limits_j m_{ij} v_{ij}$, тогда $g^{\varphi_{21}} = g + \sum\limits_{ij} n_i m_{ij} v_{ij} + w$. Необходимым условием неподвижности элемента g является условие $\sum\limits_{ij} n_i m_{ij} v_{ij} = 0$. Среди коммутаторов v_{ij} могут быть равные. Приведем подобные коэффициенты и запишем систему уравнений для них. Если она имеет ненулевое решение, то применяем другой автоморфизм, чтобы получить кандидата на неподвижный элемент. Рассмотрим элемент w с найденными коэффициентами, при этом должно выполняться условие $w = 0$. Таким образом, проделав описанную процедуру для φ_{21}, τ_{12}, τ_{13}, находим все решения для коэффициентов n_i. Вычисления с частичным использованием компьютера дали кандидатов на неподвижные элементы, которые мы рассматриваем ниже в примерах $1, 2, 3$.

Пример 1. Пусть $G = G(a,b)$ — свободная нильпотентная группа ранга 2, ступени 12. Обозначим

$$u_1 = ((abbb)(ab)(aba)(aba)), \quad u_2 = ((abaa)(ab)(abb)(abb)),$$
$$u_3 = ((abba)(ab)(abb)(aba)), \quad u_4 = ((aba)(abb))((abba)(ab)).$$

Покажем, что элемент

$$g = u_1 + u_2 - 2u_3 + u_4$$

неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G. Так как ранг группы G равен 2, то достаточно проверить, является ли он неподвижным относительно автоморфизмов $\varphi : a \to a,\ b \to ba$; $\tau : a \leftrightarrow b$.

Применим автоморфизм φ:

$$\begin{aligned} u_1^{\varphi} &= ((abbb)(ab)(aba)(aba)) + ((abab)(ab)(aba)(aba)) + ((abba)(ab)(aba)(aba)) + \\ &\quad + ((abaa)(ab)(aba)(aba)) = ((abbb)(ab)(aba)(aba)) + 2((abba)(ab)(aba)(aba)) + \\ &\qquad + ((abaa)(ab)(aba)(aba)) + (((ab)(ab))(ab)(aba)(aba))) = u_1 + 2v_1 + v_2, \end{aligned}$$

где $v_1 = ((abba)(ab)(aba)(aba))$, $v_2 = ((abaa)(ab)(aba)(aba))$.

$$u_2^{\varphi} = u_2 + v_2 + 2v_3 - v_4, \quad -2u_3^{\varphi} = -2u_3 - 2v_3 - 2v_1 - 2v_2, \quad u_4^{\varphi} = u_4 + v_4,$$

где $v_3 = ((abaa)(ab)(abb)(aba))$, $v_4 = ((aba)(abb))((abaa)(ab))$. Складывая полученные равенства, получаем $g^{\varphi} = g$.

Применим автоморфизм τ. В этом случае

$$u_1^\tau = u_2,\ u_2^\tau = u_1, \quad -2u_3^\tau = -2u_3 + 2u_4, \quad u_4^\tau = -u_4.$$

Следовательно, $g^\tau = g$, и элемент g неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G.

Пример 2. Пусть $G = G(a_1, a_2, a_3)$ — свободная нильпотентная группа ранга 3, ступени 12.

Обозначим $r = t + \frac{(15-q)q}{2} - 8$ и рассмотрим элементы $d_r = (b_q, b_t)$, $\quad 1 \le q < t \le 8$, где коммутаторы b_q, b_t определены в (2), (3).

Например, $d_1 = (b_1, b_2)$, $d_2 = (b_1, b_3)$, $d_{28} = (b_7, b_8)$. При этом, d_8, d_{11}, d_{22}, d_{23} и d_{24} отличаются от базисных коммутаторов только знаком. Остальные 23 элемента базисные.

Занумеруем коммутаторы

$$(d_i, d_j) = \tilde{u}_s, \quad \text{где } s = 28(i-1) + j;\ \ i, j = \overline{1, 28}.$$

Всего элементов такого вида 784, включая коммутаторы, которые отличаются от базисных лишь знаком, например, $\tilde{u}_{80}$ — небазисный, а коммутатор $-\tilde{u}_{80}$ — базисный.

Обозначим $u_s = \tilde{u}_s$, если $\tilde{u}_s$ — базисный и $u_s = -\tilde{u}_s$, если $\tilde{u}_s$ — небазисный. Рассмотрим $g = \sum n_s u_s$, где коэффициенты $n_s \in Z$ определены следующим образом: $n_s = 1$, при $s = 56, 78, 163, 218, 247, 303, 433, 446, 539, 542, 549, 564$; $n_s = -1$, при $s = 25, 80, 83, 134, 298, 299, 323, 377, 385, 704$; остальные $n_s = 0$. Покажем, что в этом случае, элемент g неподвижен относительно всех автоморфизмов группы G. Проверим действие автоморфизмов φ_{21}, τ_{12}, τ_{13}.

Применим автоморфизм φ_{21}:

$$\begin{aligned}
u_{56}^{\varphi_{21}} = {} & (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_2a_3a_2)(a_2a_3a_3))) + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_1a_3a_2)(a_2a_3a_3))) + \\
& + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_2a_3a_1)(a_2a_3a_3))) + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_2a_3a_2)(a_1a_3a_3))) + \\
& + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_1a_3a_1)(a_2a_3a_3))) + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_2a_3a_1)(a_1a_3a_3))) + \\
& + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_1a_3a_2)(a_1a_3a_3))) + (((a_1a_2a_1)(a_1a_3a_1))((a_1a_3a_1)(a_1a_3a_3))) = \\
& = u_{43} + u_{46} + u_{47} + u_{50} + u_{51} + u_{52} + u_{55} + u_{56},
\end{aligned}$$

и далее

$$\begin{gathered}
-u_{25}^{\varphi_{21}} = -u_{25}, \quad u_{78}^{\varphi_{21}} = u_{43} + u_{46} + u_{47} + u_{50} + u_{71} + u_{74} + u_{75} + u_{78}, \\
-u_{80}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{47} - u_{51} - u_{52} - u_{71} - u_{75} - u_{79} - u_{80}, \\
-u_{83}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{46} - u_{51} - u_{55} - u_{71} - u_{74} - u_{79} - u_{83}, \\
-u_{134}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{46} - u_{47} - u_{50} - u_{127} - u_{130} - u_{131} - u_{134}, \\
u_{163}^{\varphi_{21}} = u_{43} + u_{51} + u_{71} + u_{79} + u_{127} + u_{135} + u_{155} + u_{163}, \\
u_{218}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{46} - u_{47} - u_{50} + u_{211} + u_{214} + u_{215} + u_{218}, \\
u_{247}^{\varphi_{21}} = u_{43} + u_{51} + u_{71} + u_{79} - u_{211} - u_{219} + u_{239} + u_{247}, \\
-u_{298}^{\varphi_{21}} = u_{43} + u_{46} + u_{127} + u_{130} - u_{211} - u_{214} - u_{295} - u_{298}, \\
-u_{299}^{\varphi_{21}} = u_{43} + u_{47} + u_{127} + u_{131} - u_{211} - u_{215} - u_{295} - u_{299}, \\
u_{303}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{51} - u_{127} - u_{135} + u_{211} + u_{219} + u_{295} + u_{303},
\end{gathered}$$

$$-u_{323}^{\varphi_{21}} = -u_{43} - u_{71} - u_{127} - u_{155} + u_{211} - u_{239} + u_{295} - u_{323},$$
$$-u_{377}^{\varphi_{21}} = -u_{368} - u_{371} - u_{374} - u_{377}, \quad -u_{385}^{\varphi_{21}} = u_{380} - u_{381} + u_{384} - u_{385},$$
$$u_{433}^{\varphi_{21}} = u_{424} + u_{427} + u_{430} + u_{433}, \quad u_{446}^{\varphi_{21}} = u_{380} + u_{437} + u_{440} + u_{446},$$
$$u_{539}^{\varphi_{21}} = u_{368} + u_{371} - u_{424} - u_{427} + u_{536} + u_{539},$$
$$u_{542}^{\varphi_{21}} = u_{368} + u_{374} - u_{424} - u_{430} + u_{536} + u_{542},$$
$$u_{549}^{\varphi_{21}} = -2u_{380} + u_{381} - u_{384} - u_{437} - u_{440} + u_{549},$$
$$u_{564}^{\varphi_{21}} = -u_{368} + u_{368} + u_{424} + u_{452} - u_{536} + u_{564},$$
$$-u_{704}^{\varphi_{21}} = u_{368} + u_{424} - u_{424} - u_{452} - u_{536} - u_{704}.$$

Складывая полученные равенства, получаем $g^{\varphi_{21}} = g$.

Проверим действие автоморфизма τ_{12} на коммутаторах u_s:

$$-u_{25}^{\tau_{12}} = -u_{25}, \quad u_{56}^{\tau_{12}} = -u_{323}, \quad u_{78}^{\tau_{12}} = u_{303}, \quad -u_{80}^{\tau_{12}} = -u_{298}, \quad -u_{83}^{\tau_{12}} = -u_{299},$$
$$-u_{134}^{\tau_{12}} = u_{247}, \quad u_{163}^{\tau_{12}} = u_{218}, \quad u_{218}^{\tau_{12}} = u_{163}, \quad u_{247}^{\tau_{12}} = -u_{134}, \quad -u_{298}^{\tau_{12}} = -u_{80},$$
$$-u_{299}^{\tau_{12}} = -u_{83}, \quad u_{303}^{\tau_{12}} = u_{78}, \quad -u_{323}^{\tau_{12}} = u_{56}, \quad -u_{377}^{\tau_{12}} = -u_{704},$$
$$-u_{385}^{\tau_{12}} = u_{446}, \quad u_{433}^{\tau_{12}} = u_{564}, \quad u_{446}^{\tau_{12}} = -u_{385}, \quad u_{539}^{\tau_{12}} = u_{542},$$
$$u_{542}^{\tau_{12}} = u_{539}, \quad u_{549}^{\tau_{12}} = u_{549}, \quad u_{564}^{\tau_{12}} = u_{433}, \quad -u_{704}^{\tau_{12}} = -u_{377}.$$

Отсюда следует $g^{\tau_{12}} = g$. И, наконец,

$$-u_{25}^{\tau_{13}} = u_{56}, \quad u_{56}^{\tau_{13}} = -u_{25}, \quad u_{78}^{\tau_{13}} = -u_{78}, \quad -u_{80}^{\tau_{13}} = u_{218}, \quad -u_{83}^{\tau_{13}} = u_{78} - u_{134},$$
$$-u_{134}^{\tau_{13}} = u_{78} - u_{83}, \quad u_{163}^{\tau_{13}} = -u_{377} + u_{433}, \quad u_{218}^{\tau_{13}} = -u_{80}, \quad u_{247}^{\tau_{13}} = -u_{385} + u_{542},$$
$$-u_{298}^{\tau_{13}} = u_{564} - u_{704}, \quad -u_{299}^{\tau_{13}} = -u_{385} + u_{390}, \quad u_{303}^{\tau_{13}} = u_{385} - u_{390} + u_{446} - u_{542},$$
$$-u_{323}^{\tau_{13}} = -u_{323}, \quad -u_{377}^{\tau_{13}} = u_{159}, \quad -u_{385}^{\tau_{13}} = u_{243}, \quad u_{433}^{\tau_{13}} = -u_{159} + u_{163},$$
$$u_{446}^{\tau_{13}} = -u_{243} + u_{247} - u_{299} + u_{303}, \quad u_{539}^{\tau_{13}} = u_{539}, \quad u_{542}^{\tau_{13}} = u_{549},$$
$$u_{549}^{\tau_{13}} = u_{542}, \quad u_{564}^{\tau_{13}} = u_{242}, \quad -u_{704}^{\tau_{13}} = -u_{242} - u_{298}.$$

Отсюда $g^{\tau_{13}} = g$.

Таким образом, g — неподвижный элемент группы G.

Пример 3. Пусть $G = G(a_1, a_2, a_3)$ — относительно свободная группа из пересечения многообразий 12-ступенных нильпотентных групп и трехступенно разрешимых групп.

Обозначим базисные коммутаторы веса 4:

$$(b_m, a_l) = f_s, \text{ где } s = \begin{cases} 2m - l, \text{ для } l \neq 3 \\ 2m - 6, \text{ для } l = 3, \end{cases}$$

а коммутаторы b_m определены в (2), (3). Используя полученные коммутаторы f_s и коммутаторы b_i, c_k, определенные в (1), (2), (3), построим и занумеруем базисные коммутаторы $y_s = (b_i, c_k, b_j, f_l)$

$$s = 360i + 120k + 15j + l - 495; \quad i, j = \overline{1, 8}; \quad k = \overline{1, 3}; \quad l = \overline{1, 15}$$

Всего элементов такого вида 2880.

Рассмотрим $g = \sum n_s y_s$, где коэффициенты $n_s \in Z$ определены следующим образом: $n_s = 1$, при $s =$ 68, 79, 124, 219, 278, 415, 480, 539, 625, 690, 792, 809, 854, 943, 1002, 1153, 1170, 1215, 1301, 1363, 1498, 1502, 1566, 1653, 1708, 1712, 1883, 1928, 2017, 2076, 2227, 2244, 2289, 2375, 2437, 2572, 2606, 2626, 2651, 2688, 2782, 2836;
$n_s = -1$, при $s =$ 49, 114, 173, 259, 324, 434, 445, 490, 585, 644, 779, 838, 897, 989, 1048, 1140, 1196, 1258, 1350, 1406, 1491, 1528, 1548, 1573, 1607, 1701, 1758, 1853, 1912, 1971, 2063, 2122, 2214, 2270, 2332, 2424, 2480, 2576, 2583, 2602, 2647, 2731, 2786, 2793;
$n_s = 2$, при $s =$ 1133, 1192, 1251, 1343, 1402, 1860, 1916, 2070, 2126, 2668;
$n_s = -2$, при $s =$ 1163, 1208, 1297, 1356, 1873, 1890, 935, 2021, 2083; остальные $n_s = 0$.

Пусть $g_2 = \sum n_s y_s$, где $n_s = 1$, при $s =$ 75, 79, 145, 232, 278, 294, 311, 415, 473, 539, 578, 598, 604, 660, 666, 683, 792, 818, 854, 927, 943, 947, 1179, 1192, 1215, 1258, 1301, 1383, 1402, 1498,1521, 1587, 1653, 1687, 1712, 1883, 1912, 1949, 1978, 2076, 2103, 2122, 2231, 2244, 2310, 2386, 2437, 2450, 2563, 2615, 2651, 2718, 2782, 2806;
$n_s = -1$, при $s =$ 40, 114, 180, 203, 236, 259, 285, 324, 352, 434, 454, 490, 569, 585, 591, 673, 779, 831, 897, 936, 968, 1018, 1022, 1041, 1140, 1153, 1297, 1308, 1329, 1376, 1482, 1537, 1573, 1637, 1701, 1728, 1844, 1873, 2001, 2028, 2063, 2083, 2205, 2270, 2336, 2362, 2424, 2441, 2461, 2480, 2576, 2602, 2668, 2731, 2765, 2793;
$n_s = 2$, при $s =$ 210, 1011, 1124, 1281, 1343, 1363, 1860, 2017, 2049, 2096, 2366;
$n_s = -2$, при $s =$ 653, 1163, 1229, 1356, 1899, 1935, 2021;
$n_s = -3$, при $s = 1288, 2092$; остальные $n_s = 0$.

Пусть $g_3 = \sum n_s y_s$, где $n_s = 1$, при $s =$ 145, 193, 278, 294, 350, 598, 604, 666, 683, 699, 730, 792, 809, 825, 975, 1048, 1061, 1068, 1124, 1140, 1196, 1215, 1242, 1301, 1363, 1376, 1383, 1469, 1498, 1528, 1687, 1708, 1712, 1771, 1912, 1928, 1949, 1982, 2001, 2017, 2049, 2076, 2135, 2179, 2227, 2310, 2316, 2332, 2386, 2529, 2556, 2615, 2651, 2661, 2688, 2718;
$n_s = -1$, при $s =$ 164, 180, 236, 259, 352, 490, 552, 569, 585, 712, 838, 968, 1022, 1041, 1057, 1105, 1153, 1229, 1258, 1288, 1329, 1350, 1415, 1426, 1455, 1482, 1541, 1691, 1701, 1728, 1758, 1804, 1866, 1883, 1899, 1962, 2028, 2063, 2092, 2122, 2198, 2214, 2270, 2303, 2323, 2336, 2343, 2543, 2572, 2602, 2647, 2668, 2672, 2731;
$n_s = 2$, при $s =$ 210, 539, 1011, 1343, 1853, 2244, 2366;
$n_s = -2$, при $s =$ 324, 653, 779, 1018, 1170, 1356, 1406, 1935, 1971, 2021, 2362;
$n_s = 3$, при $s = 1402, 1978$; остальные $n_s = 0$.

Обозначим $g_4 = \sum n_s y_s$, где $n_s = 1$, при $s =$ 124, 164, 180, 186, 203, 219, 236, 625, 673, 712, 968, 1002, 1018, 1022, 1041, 1057, 1105, 1153, 1192, 1229, 1308, 1448, 1482, 1498, 1502, 1521, 1537, 1804, 1844, 1860, 1866, 1883, 1899, 1916, 2070, 2146, 2289, 2323, 2336, 2343, 2362, 2375, 2550, 2626;
$n_s = -1$, при $s =$ 145, 193, 232, 604, 644, 683, 660, 666, 699, 716, 989, 1068, 1084, 1124, 1140, 1146, 1179, 1196, 1208, 1242, 1258, 1262, 1281, 1297, 1469, 1548, 1825, 1873, 1912, 2049, 2083, 2096, 2103, 2122, 2135, 2310, 2386, 2529, 2563, 2576, 2583, 2602, 2615;
$n_s = 2$, при $s =$ 173, 653, 690, 1133, 1170, 1251, 1288, 2092, 2126, 2572, 2606; $n_s = -2$, при $s =$ 2366, 2332, 1048, 1528, 1853, 173, 1011, 1491, 1890, 210; остальные $n_s = 0$.

Значения коэффициентов n_s были найдены с помощью компьютера в результате решения системы линейных однородных уравнений. После этого на компьютере, а затем и в ручную было проверено, что все $g_i, i = \overline{1,4}$ неподвижны относительно автоморфизмов φ_{21}, τ_{12}, τ_{13} . Таким образом, элементы $g = t_1g_1 + t_2g_2 + t_3g_3 + t_4g_4$, $t_i \in Z$ – неподвижны относительно всех автоморфизмов группы G.

Список литературы

1. *Wever F.* Ueber Invarianten in Lieschen Ringen // Mathematische Annalen. 1949. Bd. 120.

2. *Burrow M. D.* Invariants of Free Lie Rings // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1958. Vol. 11.

3. *Burrow M. D.* The Enumeration of Lie Invariants // Communications on Pure and Applied Mathematics. 1967. Vol. 20. P. 401–411.

4. *Formanek E.* Fixed Points and Centers of Automorphism Groups of Free Nilpotent Groups // Communications in Algebra. 2002. Vol. 30. P. 1033–1038.

5. *Блудов В. В.* Неподвижные точки относительно всех автоморфизмов в свободных нильпотентных группах // Третий Сибирский конгресс по прикладной и индустриальной математике: Тез. докл. Новосибирск, 1998. Ч. 5.

6. *Papistas A.* A Note on Fixed Points of Certain Relatively Free Nilpotent Groups // Comm. Algebra. 2001. Vol. 29.

7. *Магнус В., Каррас А., Солитэр Д.* Комбинаторная теория групп. М.: Наука, 1974.

8. *Линдон Р., Шупп П.* Комбинаторная теория групп. М.: Мир, 1980.

Материал поступил в редколлегию 21.06.2004

Адрес автора

КОВЫРШИНА Анна Ивановна
РОССИЯ, 664011, Иркутск
ул. Нижняя набережная, 6
Иркутский государственный
педагогический университет
e-mail: annkow@mail.ru