УДК 517.956.8; 517.958 : [531.746.24 + 539.3(4)]

С. А. Саженков

ЭФФЕКТИВНАЯ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТЬ НАСЫЩЕННОГО ПОРИСТОГО ГРУНТА*

Рассматривается линеаризованная модель совместного движения упругого пористого грунта и целиком заполняющей поровое пространство вязкой сжимаемой жидкости с учетом теплопроводности. Считается, что поровое пространство обладает периодической геометрией и что модель содержит малый параметр — отношение характерных размеров микро- и макроуровней, а именно длины ребра ячейки периодичности и характерного размера полной термомеханической системы. Проводится процедура усреднения, т. е. предельный переход в уравнениях модели при стремлении малого параметра к нулю. При этом предполагается, что физические характеристики отдельных фаз от малого параметра не зависят. В результате конструируется корректно поставленная начально-краевая задача для модели линейной термовязкоупругости с памятью формы и тепла, решением которой являются пределы решений исходной задачи, и коэффициенты которой однозначно определяются микроструктурой. Усреднение проводится методом двухмасштабной сходимости и математически строго обосновано.

Введение

Рассматривается линеаризованная модель термопороупругости, а именно, модель совместного движения упругого пористого грунта и вязкой сжимаемой жидкости, целиком заполняющей поровое пространство, с учетом эффектов переноса тепла. Уравнения термопороупругости привлекают внимание специалистов в различных областях механики по ряду причин [1,2]: от поведения пороупругих структур зависят характеры процессов экстракции нефти, газа и геотермальных вод из скважин, свойства гидроакустики в придонных слоях океанов, скорости и направления распространения загрязнений при утечках жидкого топлива или отходов из подземных хранилищ и т. д.; также имеется гипотеза, что активность поровых жидкостей играет существенную роль в инициации землетрясений.

Одна из центральных проблем, связанных с изучением термопороупругости, состоит в том, что твердый скелет грунта и поровая жидкость обладают сильно различающимися термомеханическими свойствами, а размер пор весьма мал по отношению к размеру всего пористого тела. Поэтому, если различать области, занятые твердой и жидкой фазами, т. е. использовать описание на микроскопических масштабах, то в соответствующих математических моделях появляются быстро осциллирующие режимы. Это вносит большие трудности в приложениях, прежде всего при численном моделировании, поскольку объем вычислений часто оказывается невыполнимым даже при использовании суперкомпьютеров.

Вместе с этим хорошо известно (см., например, [3]), что в макроскопических масшта-

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 07-01-00309).

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 2. С. 105–129

бах, т. е. в масштабах, значительно превышающих диаметры отдельных пор, пористые среды обладают устойчивыми физическими характеристиками (типа сжимаемости, теплопроводности и т. п.), которые называются средними или эффективными и, вообще говоря, отличаются от соответствующих характеристик отдельных фаз. Поэтому возникает задача расчета эффективных характеристик и построения эффективных макроскопических уравнений, исходя из микроструктуры. Эта задача называется проблемой усреднения (или гомогенизации), и состоит она в обосновании предельного перехода в уравнениях микроструктуры при стремлении малого параметра (далее обозначаемого через ε) — отношения характерных микро- и макроскопических масштабов — к нулю.

Основная цель настоящей работы состоит в решении проблемы усреднения для рассматриваемой модели на строгом математическом уровне в предположениях, что пористый скелет обладает связной геометрически периодической структурой, и основные физические характеристики в каждой из фаз (коэффициенты вязкости, упругости, теплопроводности, теплоемкости и т. д.) не зависят от ε.

Снабжение микроструктуры свойством геометрической периодичности является стандартным приемом в задачах усреднения, и таким задачам посвящено множество работ. Классическим инструментом выполнения процедур гомогенизации служит разработанный в 70–80-х гг. метод асимптотических разложений [2, 4–6], который остается главным орудием теории усреднения и в настоящее время. Его применяют преимущественно только для формального нахождения эффективных макроскопических уравнений и физических характеристик гомогенных сред, а для строгого доказательства сходимости последовательности решений микроструктуры приходится использовать дополнительные методы функционального анализа, в первую очередь, метод компенсированной компактности Тартара–Мюра [7, 8, гл. IV]. В 1989 г. Нгуетсенг [9] предложил интересную концепцию двухмасштабной сходимости, что привело к развитию нового способа выполнения и одновременно строгого обоснования процедур усреднения — *метода двухмасштабной сходимости* (см., например, обзоры [10–12]). Этот метод оказался в ряде случаев очень удобным при усреднении периодических структур, поскольку двухмасштабная сходимость позволяет установить предельные режимы последовательностей периодических функций при стремлении длины периода к нулю более точно, чем слабая (в L^2, например) сходимость.

Проведение и обоснование процедуры усреднения в настоящей статье основано именно на методе двухмасштабной сходимости. Итоговым результатом является построение корректной модели термовязкоупругости с памятью формы и тепла. При этом коэффициенты в уравнениях модели или, иными словами, эффективные характеристики гомогенной среды, однозначно определяются данными микроструктуры. Настоящее исследование по своим методам близко к работе [13], посвященной усреднению пороупругости методом двухмасштабной сходимости при отсутствии тепловых эффектов, и является ее продолжением на случай, когда тепловые эффекты являются существенными. Также настоящее исследование хорошо согласовано с недавно опубликованной работой [14]. В этой работе изучена та же модель неизотермической микроструктуры, что и в настоящей статье (т. е. задача A), но рассмотрен другой асимптотический режим. А именно, в [14] было показано, что если коэффициенты упругости и модуль гидростатического сжатия стремятся к бесконечности при $\varepsilon \searrow 0$, то эффективным макроскопическим поведением термомеханической системы является фильтрация несжимаемой жидкости через абсолютно твердый пористый грунт, и описывается это поведение системой, состоящей из неизотермического закона Дарси и неизотропных неизотермических уравнений Ламэ.

Дальнейшее содержание статьи построено следующим образом. В § 1 излагается описание исходной модели гетерогенной микроструктуры, содержащей малый параметр $\varepsilon > 0$. Приводятся известные результаты о корректности этой модели и оценки на решения, равномерные по ε. В § 2 основные результаты работы формулируются в виде теорем 1 и 2 и постановки усредненной задачи Б. Делаются выводы о физическом смысле и математической корректности задачи Б. В § 3–4 проводятся доказательство теоремы 1 и конструирование усредненной модели, т. е. постановки задачи Б. Завершает статью § 5, посвященный доказательству теоремы 2.

§ 1. Гетерогенная модель линейной термопороупругости на микроуровне

Из фундаментальных положений механики сплошных сред [15, гл. 1] следует, что совместное движение термоупругого пористого тела и вязкой теплопроводной жидкости описывается моделью, состоящей из уравнений баланса массы, количества движения и энергии, первого и второго законов термодинамики в каждой из фаз, индивидуальных уравнений состояния, описывающих термомеханическое поведение отдельных фаз, и дополнительных условий на межфазной границе. Предполагая априори, что возмущения рассматриваемой термомеханической системы малы в окрестности некоторого состояния покоя, применяя на основании этого классический формализм линеаризации [16, § 8.1] к уравнениям модели, проводя подходящим образом обезразмеривание получающихся линеаризованных уравнений и накладывая на геометрию пористого тела дополнительные условия связности и периодичности, приходим в итоге к замкнутой системе уравнений линейной термопороупругости:

Задача A. (Модель линейной термопороупругости на микроуровне)

В пространственно-временном цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где T — положительная постоянная, а Ω – открытый единичный куб в $\mathbb{R}^3$ (т. е. $\Omega = (0,1)^3$), разбитый на два непересекающихся открытых множества Ω_f^ε и Ω_s^ε и границу $\Gamma_\varepsilon = \bar{\Omega}_f^\varepsilon \cap \bar{\Omega}_s^\varepsilon$ между ними, требуется определить поле перемещений $\boldsymbol{w}^\varepsilon = \boldsymbol{w}^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ и распределение температур $\theta^\varepsilon = \theta^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha_\tau \rho_f \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}_x \Big\{ \alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + \Big(\alpha_p \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon + \alpha_\nu \operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} - \alpha_{\theta f} \theta^\varepsilon\Big)\mathbb{I}\Big\} = \alpha_F \rho_f \boldsymbol{F},$$
$$(\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f^\varepsilon \times (0, T), \quad (1)$$

$$c_{pf} \frac{\partial \theta^\varepsilon}{\partial t} = \operatorname{div}_x(\varkappa_f \nabla_x \theta^\varepsilon) - \alpha_{\theta f} \operatorname{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} + \Psi_f^\varepsilon, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_f^\varepsilon \times (0, T), \quad (2)$$

$$\alpha_\tau \rho_s \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \operatorname{div}_x \big\{ \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) + (\alpha_\eta \operatorname{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon - \alpha_{\theta s} \theta^\varepsilon)\mathbb{I} \big\} = \alpha_F \rho_s \boldsymbol{F}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in \Omega_s^\varepsilon \times (0, T), \quad (3)$$

$$c_{ps}\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t} = \mathrm{div}_x(\varkappa_s\nabla_x\theta^\varepsilon) - \alpha_{\theta s}\mathrm{div}_x\frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} + \Psi_s^\varepsilon, \quad (\boldsymbol{x},t)\in\Omega_s^\varepsilon\times(0,T), \tag{4}$$

и соотношениям на границе Γ_ε

$$\theta^\varepsilon_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t) = \theta^\varepsilon_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t), \quad \boldsymbol{w}^\varepsilon_{(s)}(\boldsymbol{x}_0,t) = \boldsymbol{w}^\varepsilon_{(f)}(\boldsymbol{x}_0,t), \quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma_\varepsilon, \quad t\geq 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\Big\{\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(s)}) + (\alpha_\eta\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(s)} - \alpha_{\theta s}\theta^\varepsilon_{(s)})\mathbb{I}\Big\}\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon = \\ = \Big\{\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(f)}}{\partial t}\Big) + \Big(\alpha_p\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(f)} + \alpha_\nu\mathrm{div}_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon_{(f)}}{\partial t} - \alpha_{\theta f}\theta^\varepsilon_{(f)}\Big)\mathbb{I}\Big\}\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon,\ \boldsymbol{x}_0\in\Gamma_\varepsilon,\ t\geq 0,\end{gathered} \tag{6}$$

$$\varkappa_s\nabla_x\theta^\varepsilon_{(s)}\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon = \varkappa_f\nabla_x\theta^\varepsilon_{(f)}\cdot\boldsymbol{n}^\varepsilon, \quad \boldsymbol{x}_0\in\Gamma_\varepsilon, \quad t\geq 0. \tag{7}$$

Модель снабжается начальными данными

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0^\varepsilon, \quad \frac{\partial\boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0^\varepsilon, \quad \theta^\varepsilon|_{t=0} = \theta_0^\varepsilon, \quad \boldsymbol{x}\in\Omega, \tag{8}$$

и однородными граничными условиями на $\partial\Omega$:

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon = 0, \quad \theta^\varepsilon = 0, \quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega, \quad t\geq 0. \tag{9}$$

Геометрия областей Ω_f^ε и Ω_s^ε задана и зависит от малого параметра $\varepsilon > 0$ — отношения характерных размеров l_0 и L_0 микро- и макроскопического уровней, соответственно. Поскольку Ω — единичный куб, имеем $l_0 = \varepsilon$, $L_0 = 1$. Формальное описание геометрии задается аналогично [13] и состоит в следующем. Сначала постулируется структура внутри шаблонной ячейки $\mathcal{Y} = (0,1)^3$: полагаем, что $\mathcal{Y}_s$ — «твердая часть» — это некоторое открытое подмножество $\mathcal{Y}$, а $\mathcal{Y}_f$ — «жидкая часть» — дополнение в $\mathcal{Y}$ его замыкания, т. е. $\mathcal{Y}_f = \mathcal{Y}\setminus\bar{\mathcal{Y}}_s$. Затем конструируется периодическое повторение $\mathcal{Y}_s$ по всему $\mathbb{R}^3$ и полагается $\mathcal{Y}_s^k = \mathcal{Y}_s + \boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}^3$. Очевидно, получаемое множество $E_s = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^3}\mathcal{Y}_s^k$ и дополнение его замыкания $E_f = \mathbb{R}^3\setminus\bar{E}_s$ являются открытыми множествами в $\mathbb{R}^3$. Накладываются следующие требования на $\mathcal{Y}_s$ и E_s:

- $\mathcal{Y}_s$ является связным множеством строго положительной меры с липшицевой границей; и $\mathcal{Y}_f$ также имеет строго положительную меру в $\mathcal{Y}$;
- E_s и E_f являются открытыми множествами в $\mathbb{R}^3$ с липшицевой границей раздела между ними; E_s и E_f локально расположены по одну сторону от своих границ; E_s связно.

Исходя из этой конструкции, вводим в рассмотрение регулярную ε-сетку, покрывающую Ω, каждая ячейка которой является кубом $\mathcal{Y}_i^\varepsilon$ с длиной ребра, равной ε. При этом для простоты считаем, что $1/\varepsilon$ является натуральным числом. Каждый куб $\mathcal{Y}_i^\varepsilon$, $i = 1,2,3,\ldots 1/\varepsilon^3$ получается из шаблонной ячейки $\mathcal{Y}$ посредством линейного гомеоморфизма Π_i^ε, состоящего из сжатия в $1/\varepsilon$ раз и переноса. Теперь определяем $\mathcal{Y}_{si}^\varepsilon = \Pi_i^\varepsilon(\mathcal{Y}_s)$, $\mathcal{Y}_{fi}^\varepsilon = \Pi_i^\varepsilon(\mathcal{Y}_f)$ и, наконец,

$$\Omega_s^\varepsilon = \bigcup_{1\leq k\leq 1/\varepsilon^3}\mathcal{Y}_{sk}^\varepsilon, \quad \Omega_f^\varepsilon = \bigcup_{1\leq k\leq 1/\varepsilon^3}\mathcal{Y}_{fk}^\varepsilon, \quad \Gamma_\varepsilon = \bar{\Omega}_s^\varepsilon\cap\bar{\Omega}_f^\varepsilon.$$

Очевидно, что $\Omega_f^\varepsilon = \varepsilon E_f \cap \Omega$ и $\Omega_s^\varepsilon = \varepsilon E_s \cap \Omega$.

Область Ω_f^ε занята вязкой сжимаемой жидкостью, и область Ω_s^ε — упругим телом. Уравнение (1) — это система трех скалярных уравнений Стокса, (3) — система трех скалярных уравнений Ламэ, а (2) и (4) — уравнения теплопроводности в жидкой и твердой компонентах, соответственно. Соотношения (5)–(7) выражают собой непрерывность полей температуры, перемещений, нормальных напряжений и потоков тепла на межфазной границе, соответственно. В (1) и (3) и далее в статье через $\mathbb{D}(x, \boldsymbol{\varphi})$ обозначается симметричная часть градиента какой-либо достаточно гладкой вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x})$: $\mathbb{D}_{ij}(x, \boldsymbol{\varphi}) = (1/2)(\partial_{x_i}\varphi_j + \partial_{x_j}\varphi_i)$, $i, j = 1, 2, 3$, а в остальном обозначения для дифференциальных операторов стандартны. Через $\mathbb{I}$ обозначается тождественное преобразование в $\mathbb{R}^3$: $\mathbb{I} = (\delta_{ij})$, где δ_{ij} — символ Кронекера. В (5)–(7) используются следующие обозначения для значений на границе Γ_ε: для любого $\boldsymbol{x}_0 \in \Gamma_\varepsilon$ и для любой функции $\varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x})$, непрерывной внутри Ω_s^ε и внутри Ω_f^ε, полагаем

$$\varphi^\varepsilon_{(s)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_s^\varepsilon}} \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}), \quad \varphi^\varepsilon_{(f)}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{\substack{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0 \\ \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon}} \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}).$$

Вектор $\boldsymbol{n}^\varepsilon(\boldsymbol{x}_0)$ – это единичная нормаль к Γ_ε в точке $\boldsymbol{x}_0$, направленная внутрь Ω_f^ε.

Коэффициенты α_τ, α_μ, α_λ, α_p, α_η, α_ν, $\alpha_{\theta f}$, $\alpha_{\theta s}$, α_F, $\varkappa_f$, $\varkappa_s$, ρ_f, ρ_s, c_{pf}, c_{ps} не зависят от ε и являются безразмерными, постоянными и положительными. Они, а также безразмерные функции $\Psi_s^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$, $\Psi_f^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t)$ и $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, t)$, заданы и связаны с размерными физическими характеристиками задачи следующими соотношениями:

$$\begin{array}{lllll}
\alpha_\nu = \dfrac{1}{p_0\tau_0}\Big(\nu - \dfrac{2}{3}\mu\Big), & \alpha_\mu = \dfrac{2\mu}{p_0\tau_0}, & \alpha_\lambda = \dfrac{2\lambda}{p_0}, & \alpha_p = \dfrac{K}{p_0}, & \alpha_F = \dfrac{\gamma_0 g L_0}{c_0^2}, \\
\alpha_\eta = \dfrac{1}{p_0}\Big(\eta - \dfrac{2}{3}\lambda\Big), & \alpha_\tau = \dfrac{\gamma_0 L_0^2}{c_0^2\tau_0^2}, & \alpha_{\theta s} = \dfrac{\gamma_s \eta \vartheta_0}{p_0}, & \alpha_{\theta f} = \dfrac{\gamma_f K \vartheta_0}{p_0}, & \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}'/g, \\
\varkappa_f = \dfrac{\tau_0\vartheta_0}{L_0^2 p_0}\varkappa'_f, & \varkappa_s = \dfrac{\tau_0\vartheta_0}{L_0^2 p_0}\varkappa'_s, & \rho_f = \dfrac{\rho'_f}{\rho_0}, & \Psi_s^\varepsilon = \dfrac{\tau_0}{p_0}\Psi'_{s\varepsilon}, & \\
\rho_s = \dfrac{\rho'_s}{\rho_0}, & c_{pf} = \dfrac{\vartheta_0}{p_0}c'_{pf}, & c_{ps} = \dfrac{\vartheta_0}{p_0}c'_{ps}, & \Psi_f^\varepsilon = \dfrac{\tau_0}{p_0}\Psi'_{f\varepsilon}. &
\end{array}$$

Здесь $L_0 = 1$ — характерный размер области Ω; τ_0 — характерная продолжительность физических процессов; g — ускорение свободного падения; p_0 — атмосферное давление; ρ_0, c_0 и $\gamma_0 = 7/5$ — соответственно средняя плотность, скорость звука и показатель политропы в воздухе при температуре 273 K и атмосферном давлении; ϑ_0 — разность температур между точками кипения и замерзания воды при атмосферном давлении. Далее, μ, ν, K, ρ'_f, γ_f, $\varkappa'_f$ и c'_{pf} — соответственно коэффициент вязкости, второй коэффициент вязкости, модуль гидростатического сжатия, средняя плотность и коэффициенты теплового расширения, теплопроводности и удельной теплоемкости при постоянном давлении в жидкости; λ, η, ρ'_s, γ_s, $\varkappa'_s$ и c'_{ps} — соответственно упругие модули сдвига и всестороннего сжатия, средняя плотность и коэффициенты теплового расширения, теплопроводности и удельной теплоемкости при постоянном давлении в твердом теле. Эти физические размерные характеристики жидкости и твердого тела постоянны и соответствуют состоянию покоя, на котором была проведена линеаризация базовой нелинейной модели. Наконец, $\boldsymbol{F}'$ – плотность распределенных массовых сил, а функции $\Psi'_{f\varepsilon}$ и $\Psi'_{s\varepsilon}$ — это объемные плотности внешнего подвода тепла в жидкой и твердой фазах.

Введем теперь некоторые обозначения и сформулируем определение обобщенного решения задачи A. Через χ обозначим характеристическую функцию множества E_f в $\mathbb{R}^3$, а через χ^ε — характеристическую функцию множества Ω_f^ε в Ω:

$$\chi(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \boldsymbol{x} \in E_f, \\ 0, & \text{если} \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus E_f, \end{cases} \qquad \chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega_f^\varepsilon, \\ 0, & \text{если} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \setminus \Omega_f^\varepsilon. \end{cases}$$

В силу структуры множеств E_f и Ω_f^ε имеет место равенство

$$\chi^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \chi\left(\frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\right), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega,$$

и χ является 1-периодической функцией в $\mathbb{R}^3$. Положим

$$\rho^\varepsilon = \chi^\varepsilon \rho_f + (1-\chi^\varepsilon)\rho_s, \quad \alpha_\theta^\varepsilon = \chi^\varepsilon \alpha_{\theta f} + (1-\chi^\varepsilon)\alpha_{\theta s}, \quad c_p^\varepsilon = \chi^\varepsilon c_{pf} + (1-\chi^\varepsilon)c_{ps},$$
$$\varkappa^\varepsilon = \chi^\varepsilon \varkappa_f + (1-\chi^\varepsilon)\varkappa_s, \quad \Psi^\varepsilon = \chi^\varepsilon \Psi_f^\varepsilon + (1-\chi^\varepsilon)\Psi_s^\varepsilon.$$

Определение 1. Пара функций $(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ называется обобщенным решением задачи A, если она удовлетворяет условиям регулярности

$$\boldsymbol{w}^\varepsilon \in W_2^1(Q), \quad \chi^\varepsilon \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) \in L^2(Q), \quad \theta^\varepsilon \in L^2(0,T; W_2^1(\Omega)), \tag{10}$$

граничным условиям (9) и начальному условию $\boldsymbol{w}^\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0^\varepsilon$ в смысле следов и интегральным равенствам

$$\int\limits_Q \Big(\alpha_\tau \rho^\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \Big\{\chi^\varepsilon \Big[\alpha_\mu \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big) + \Big(\alpha_p \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon + \alpha_\nu \mathrm{div}_x \frac{\partial \boldsymbol{w}^\varepsilon}{\partial t}\Big)\mathbb{I}\Big] +$$
$$+ (1-\chi^\varepsilon)\Big[\alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^\varepsilon) + (\alpha_\eta \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon)\mathbb{I}\Big] - \alpha_\theta^\varepsilon \theta^\varepsilon \mathbb{I}\Big\} : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + \alpha_F \rho^\varepsilon \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi}\Big) d\boldsymbol{x}dt +$$
$$+ \int\limits_\Omega \alpha_\tau \rho^\varepsilon \boldsymbol{v}_0^\varepsilon \cdot \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x} = 0, \tag{11}$$

$$\int\limits_Q \Big(c_p^\varepsilon \theta^\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} - \varkappa^\varepsilon \nabla_x \theta^\varepsilon \cdot \nabla_x \psi + \alpha_\theta^\varepsilon (\mathrm{div}_x \boldsymbol{w}^\varepsilon) \frac{\partial \psi}{\partial t} + \Psi^\varepsilon \psi\Big) d\boldsymbol{x}dt +$$
$$+ \int\limits_\Omega \big(c_p^\varepsilon \theta_0^\varepsilon + \alpha_\theta^\varepsilon \mathrm{div}_x \boldsymbol{w}_0^\varepsilon\big)\psi(\boldsymbol{x}, 0) d\boldsymbol{x} = 0 \tag{12}$$

для любых гладких пробных вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x}, t)$ и скалярной функции $\psi(\boldsymbol{x}, t)$, обращающихся в нуль вблизи $\partial\Omega$ и в окрестности $t = T$.

Замечание 1. В силу условий регулярности (10) и известных свойств пространства Соболева $W_2^1(\Omega)$ обобщенное решение задачи A (если существует) обязательно удовлетворяет условиям (5) на Γ^ε в смысле следов. Ввиду условия (5) и формулы Грина, из интегральных равенств (11) и (12) вытекают уравнения (1) и (2) в $\Omega_f^\varepsilon \times (0, T)$ и уравнения (3) и (4) в $\Omega_s^\varepsilon \times (0, T)$, которые понимаются в смысле теории распределений, а также условия $\boldsymbol{w}_t^\varepsilon|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0^\varepsilon$ и $\theta^\varepsilon|_{t=0} = \theta_0^\varepsilon$ и условия (6) и (7) на Γ^ε, которые понимаются в смысле следов. Таким образом, понятие обобщенного решения хорошо согласовано с постановкой задачи A.

Следующее утверждение о корректности задачи А и оценках на решения доказывается классическими методами в теории обобщенных решений задач математической физики [17]. Его подробное обоснование изложено в [18].

Предложение 1. *При любом фиксированном* $\varepsilon > 0$ *для любых начальных данных* $\boldsymbol{w}_0^\varepsilon \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\boldsymbol{v}_0^\varepsilon, \theta_0^\varepsilon \in L^2(\Omega)$ *и для любых заданных* $\boldsymbol{F}, \Psi^\varepsilon \in L^2(Q)$ *задача А имеет единственное обобщенное решение* $(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ *в смысле определения 1.*

Это решение удовлетворяет энергетической оценке

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\tau]}\Big(\|\boldsymbol{w}^\varepsilon(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon(t)\|^2_{2,\Omega}\Big) + \|\chi^\varepsilon \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon)\|^2_{2,\Omega\times(0,\tau)} +$$
$$+ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,\tau]}\Big(\|\theta^\varepsilon(t)\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla_x \theta^\varepsilon(t)\|^2_{2,\Omega}\Big) \leq$$
$$\leq C_0 \cdot \big(\|\boldsymbol{F}\|^2_{2,\Omega\times(0,\tau)} + \|\Psi^\varepsilon\|^2_{2,\Omega\times(0,\tau)} + \|\boldsymbol{w}_0^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} + \|\nabla_x \boldsymbol{w}_0^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} + \|\boldsymbol{v}_0^\varepsilon\|^2_{2,\Omega} + \|\theta_0^\varepsilon\|^2_{2,\Omega}\big)$$
$$\forall\, \tau \in (0, T], \quad (13)$$

в которой $C_0 = C_0(T, \alpha_\tau, \alpha_\mu, \alpha_\lambda, \alpha_p, \alpha_\eta, \alpha_\nu, \alpha_{\theta f}, \alpha_{\theta s}, \alpha_F, \varkappa_f, \varkappa_s, \rho_f, \rho_s, c_{pf}, c_{ps})$ — *постоянная, не зависящая от* ε.

§ 2. Гомогенная макроскопическая модель линейной термовязкоупругости: формулировка основных результатов

Теоремы 1, 2 и постановка задачи Б, формулируемые ниже в § 2.1–2.2, являются основными результатами статьи. В § 2.3 непосредственно на основании утверждений теорем 1 и 2 делаются выводы о физическом смысле и математической корректности результирующей усредненной модели.

§ 2.1. *Сходимость процесса усреднения. Усредненная модель*

Теорема 1. *Пусть функции* $\boldsymbol{w}_0^\varepsilon$, $\boldsymbol{v}_0^\varepsilon$, θ_0^ε, $\boldsymbol{F}$ *и* Ψ^ε *заданы, удовлетворяют условиям предложения 1 и предельным соотношениям*

$$\boldsymbol{w}_0^\varepsilon \to \boldsymbol{w}_0^* \text{ слабо в } W_2^1(\Omega), \quad \Psi^\varepsilon \to \bar{\Psi} \text{ слабо в } L^2(Q), \quad (14)$$

$$\boldsymbol{v}_0^\varepsilon \to \boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}),\ \theta_0^\varepsilon \to \Theta_0(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \text{ в смысле двухмасштабной сходимости} \quad (15)$$

при $\varepsilon \searrow 0$ *с некоторыми функциями* $\boldsymbol{w}_0 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\bar{\Psi} \in L^2(Q)$, $\boldsymbol{V}_0, \Theta_0 \in L^2(\Omega \times \mathcal{Y})$. *Пусть пара функций* $(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ *является обобщенным решением задачи А, соответствующим заданным функциям* $\boldsymbol{w}_0^\varepsilon$, $\boldsymbol{v}_0^\varepsilon$, θ_0^ε, $\boldsymbol{F}$ *и* Ψ^ε *при произвольном фиксированном* $\varepsilon > 0$, *так, что* $\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}$. *Тогда при* $\varepsilon \searrow 0$ $(\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N})$ *последовательность* $(\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon)$ *слабо в* $W_2^1(Q) \times L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$ *сходится к паре функций* $(\boldsymbol{w}^*, \theta^*)$, *являющейся обобщенным решением нижеследующей задачи Б, в постановке которой постоянные тензоры четвертого порядка* $\mathbb{A}_0$ *и* $\mathbb{A}_1$, *постоянные* 3×3*-матрицы* $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{E}_0$ *и* $\mathbb{E}_1$, *функция* $t \mapsto \mathbb{A}_2(t)$ *со значениями в пространстве тензоров четвертого порядка и функция* $t \mapsto \mathbb{C}_1(t)$ *со значениями в пространстве* 3×3*-матриц зависят только от геометрии областей* $\mathcal{Y}_f$ *и* $\mathcal{Y}_s$ *и от величин* α_μ, α_p, α_ν, α_λ, α_η, $\alpha_{\theta f}$, $\alpha_{\theta s}$, $\varkappa_f$ *и* $\varkappa_s$ *и однозначно ими определяются из уравнений* (45),(46),(47)–(67) *(см. в* § 4*).*

Свойство двухмасштабной сходимости, потребованное в условиях теоремы в предельном соотношении (15), точно формулируется далее в § 3.

Задача Б

В пространственно-временном цилиндре $Q = \Omega \times (0, T)$, где $T = \mathrm{const} > 0$ и $\Omega = (0,1)^3$, требуется определить поле перемещений $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{x}, t)$ и распределение температур $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t)$, удовлетворяющие уравнениям

$$\alpha_\tau \bar{\rho} \frac{\partial^2 \boldsymbol{w}}{\partial t^2} - \mathrm{div}_x \Big\{ \mathbb{A}_0 : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{A}_1 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - \mathbb{C}_0 \theta + \\ + \int\limits_0^t \mathbb{A}_2(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\tau)) d\tau - \int\limits_0^t \mathbb{C}_1(t-\tau)\theta(\tau) d\tau \Big\} = \alpha_F \bar{\rho} \boldsymbol{F}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in Q, \quad (16)$$

$$\bar{c}_p \frac{\partial \theta}{\partial t} - \mathrm{div}_x \Big\{ \mathbb{E}_0 \nabla_x \theta - \mathbb{E}_1 \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \Big\} = \bar{\Psi}, \quad (\boldsymbol{x}, t) \in Q, \quad (17)$$

начальным данным

$$\boldsymbol{w}|_{t=0} = \boldsymbol{w}_0^*, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (18)$$

$$(\partial \boldsymbol{w}/\partial t)|_{t=0} = \boldsymbol{v}_0^* \overset{def}{=} (1/\bar{\rho}) \langle (\chi \rho_f + (1-\chi)\rho_s) \boldsymbol{V}_0 \rangle_{\mathcal{Y}}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (19)$$

$$\theta|_{t=0} = \theta_0^* \overset{def}{=} (1/\bar{c}_p) \langle (\chi c_{pf} + (1-\chi) c_{ps}) \Theta_0 \rangle_{\mathcal{Y}}, \qquad \boldsymbol{x} \in \Omega \quad (20)$$

и однородным граничным условиям

$$\boldsymbol{w} = 0, \quad \theta = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \quad t \geq 0. \quad (21)$$

Тензоры $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2(t)$ и матрицы $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_1(t)$, $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}_1$ в постановке задачи Б считаются заданными. Из формулировки теоремы 1 видно, что они определяются только данными микроструктуры. В (18) и далее в статье используется стандартное обозначение среднего по периоду $\mathcal{Y}$ от какой-либо 1-периодической по $\boldsymbol{y}$ суммируемой функции $\phi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$: $\langle \phi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) \rangle_{\mathcal{Y}} = \int_Y \phi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y}$. В частности, в уравнениях (16) и (17) через $\bar{\rho}$ и $\bar{c}_p$ обозначены средние по $\mathcal{Y}$ плотность и теплоемкость, соответственно: $\bar{\rho} = |\mathcal{Y}_f| \rho_f + |\mathcal{Y}_s| \rho_s$ и $\bar{c}_p = |\mathcal{Y}_f| c_{pf} + |\mathcal{Y}_s| c_{ps}$, где $|\mathcal{Y}_f| = \langle \chi \rangle_{\mathcal{Y}}$ и $|\mathcal{Y}_s| = \langle 1 - \chi \rangle_{\mathcal{Y}}$.

Как обычно, для произвольных тензора четвертого порядка $\mathbb{A}_*$ и 3×3-матриц $\mathbb{B}_*$ и $\mathbb{C}_*$ через $\mathbb{A}_* : \mathbb{B}_*$ и $(\mathbb{A}_* : \mathbb{B}_*) : \mathbb{C}_*$ в статье обозначаются тензорные произведения (свертки) со значениями в $\mathbb{R}^{3\times 3}$ и $\mathbb{R}$, соответственно: $(\mathbb{A}_* : \mathbb{B}_*)_{kl} = \sum_{i,j=1}^3 A_*^{ijkl} B_{*ij}$ $(k, l = 1, 2, 3)$, $(\mathbb{A}_* : \mathbb{B}_*) : \mathbb{C}_* = \sum_{i,j,k,l=1}^3 A_*^{ijkl} B_{*ij} C_{*kl}$.

Определение 2. Пара функций $(\boldsymbol{w}, \theta)$ называется обобщенным решением задачи Б, если она удовлетворяет условиям регулярности $\boldsymbol{w} \in W_2^1(Q)$, $\theta \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$, краевым условиям (18) и (21) в смысле следов и интегральным равенствам

$$\int\limits_Q \Big\{ \alpha_\tau \bar{\rho} \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} - \Big[\mathbb{A}_0 : \mathbb{D}\Big(x, \frac{\partial \boldsymbol{w}}{\partial t}\Big) + \mathbb{A}_1 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}) - \mathbb{C}_0 \theta + \\ + \int\limits_0^t \mathbb{A}_2(t-\tau) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}(\tau)) d\tau - \int\limits_0^t \mathbb{C}_1(t-\tau)\theta(\tau) d\tau \Big] : \nabla_x \boldsymbol{\varphi} + \alpha_F \bar{\rho} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{\varphi} \Big\} d\boldsymbol{x} dt +$$

$$+\int\limits_{\Omega}\alpha_\tau\bar{\rho}\boldsymbol{v}_0^*(\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}=0, \quad (22)$$

$$\int\limits_{Q}\Big\{\bar{c}_p\theta\frac{\partial\psi}{\partial t}-\Big[\mathbb{E}_0\nabla_x\theta-\mathbb{E}_1\frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t}\Big]\cdot\nabla_x\psi+\bar{\Psi}\psi\Big\}d\boldsymbol{x}dt+\int\limits_{\Omega}\bar{c}_p\theta_0^*(\boldsymbol{x})\psi(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}=0 \quad (23)$$

для любых гладких пробных вектор-функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x},t)$ и скалярной функции $\psi(\boldsymbol{x},t)$, обращающихся в нуль вблизи $\partial\Omega$ и в окрестности $t=T$.

§ 2.2. *Свойства эффективных коэффициентов*

Теорема 2. (1) *Тензоры $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2(t)$ и матрицы $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_1(t)$, $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}_1$ симметричны, т. е. их компоненты удовлетворяют равенствам*

$$A_r^{ijkl}=A_r^{jikl}=A_r^{jilk}=A_r^{klij}\ (r=0,1,2),\quad C_r^{ij}=C_r^{ji},\quad E_r^{ij}=E_r^{ji}\quad (r=0,1). \quad (24)$$

(2) *Тензор четвертого порядка $\mathcal{A}^\gamma\overset{def}{=}\gamma\mathbb{A}_0+\mathbb{A}_1+\hat{\mathbb{A}}_2(\gamma)$ и 3×3-матрица $\mathcal{C}^\gamma\overset{def}{=}\mathbb{C}_0+\hat{\mathbb{C}}_1(\gamma)$ строго положительно определены при $\gamma>0$.*

(3) *Если множества $\mathcal{Y}_f$ и E_f связны, то $\mathbb{A}_0$ строго положительно определен.*

(4) *Если множество $\partial\mathcal{Y}\cap\partial\mathcal{Y}_f$ пусто, иными словами, поровое пространство E_f представляет собой объединение запертых пор, то $\mathbb{A}_0$ — это нулевой тензор, а тензор $\mathbb{A}_1$ строго положительно определен.*

(5) *Матрицы $\mathbb{E}_0$, $\mathbb{E}_1$ и $\mathbb{C}_0$ строго положительно определены.*

В пункте 2 через $\hat{\mathbb{A}}_2(\gamma)$ и $\hat{\mathbb{C}}_1(\gamma)$ обозначены преобразования Лапласа тензора $\mathbb{A}_2(t)$ и матрицы $\mathbb{C}_1(t)$, соответственно. При этом предполагается, что $\mathbb{A}_2(t)=0$ и $\mathbb{C}_1(t)=0$ при $t>T$. Напомним, что преобразование Лапласа для произвольной локально интегрируемой и не быстровозрастающей на полуоси $(0,\infty)$ функции $\varphi(t)$ определяется равенством

$$\hat{\varphi}(\gamma)=\mathcal{L}[\varphi](\gamma)=\int\limits_0^\infty\varphi(t)e^{-\gamma t}dt,\quad \gamma>0.$$

§ 2.3. *О физическом смысле и математической корректности задачи Б*

Ввиду свойств симметричности и положительной определенности тензоров и матриц эффективных коэффициентов, утверждаемых теоремой 2, задача Б идентифицируется как начально-краевая задача для модели линейной термовязкоупругости с памятью формы и тепла, за исключением случая запертых пор (п. 4 теоремы 2), в котором усредненная модель принимает вид модели линейной термоупругости.

Проводя сравнение с известными постановками в линейной теории термовязкоупругости (см., например, [3, гл. 4, 9; 19, гл. 6], заключаем, что $\mathbb{A}_0$ — это тензор эффективной вязкости гомогенной среды, $\mathbb{A}_1$ — тензор эффективной упругости, $\mathbb{C}_0$ — матрица эффективного теплового расширения, $\mathbb{E}_0$ – матрица эффективной теплопроводности, $\mathbb{E}_1$ – матрица эффективных коэффициентов, характеризующих явление необратимого тепловыделения, обусловленного вязким трением, а $\mathbb{A}_2(t)$ и $\mathbb{C}_1(t)$ — функции релаксации, определяющие влияние истории термомеханического состояния среды за период $(0,t)$ на текущее состояние в момент времени t.

Следуя [20, 21], можно заметить, что в случае, когда поровое пространство связно (п. 3 теоремы 2), в усредненной модели «вязкие жидкие» слагаемые доминируют над «упругими твердыми». Такую термомеханическую систему можно сравнить с неконсолидированным насыщенным теплопроводным осадком на дне водоема. Такой осадок имеет в целом невысокую твердость. Напротив, в случае, когда все поры заперты (п. 4 теоремы 2), вязкие эффекты сублимируются, а доминируют «упругие твердые» слагаемые, и эффективное поведение сплошной среды является поведением термоупругого твердого тела.

Согласно теореме 1 задача Б разрешима в смысле определения 2 при условии, что коэффициенты уравнений (16) и (17) связаны с данными микроструктуры определенными соотношениями, поскольку некоторое решение задачи Б может быть сконструировано как предел решений задачи А при $\varepsilon \searrow 0$. Вместе с этим следует заметить, что если принять свойства коэффициентов уравнений (16) и (17), устанавливаемые в теореме 2, в качестве данных задачи Б, то вывод о корректности этой задачи можно сделать независимо от данных микроструктуры. Более точно, справедливо следующее:

Следствие 1. *Пусть тензоры и матрицы коэффициентов уравнений* (16) *и* (17) *обладают свойствами, сформулированными в пп. 1, 2 и 5 теоремы 2, и удовлетворяют включениям* A_2^{ijkl}, $C_1^{ij} \in L^2(0,T)$ $(i,j,k,l = 1,2,3)$. *При этом допускается, что они никак не связаны с данными задачи А. Тогда при любых заданных начальных распределениях* $\boldsymbol{w}_0^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\boldsymbol{v}_0^*, \theta_0^* \in L^2(\Omega)$ *и правых частях* $\boldsymbol{F}, \bar{\Psi} \in L^2(Q)$ *уравнений* (16) *и* (17) *существует единственное обобщенное решение задачи Б в смысле определения 2.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проводится стандартными рассуждениями, поэтому ограничимся изложением краткой схемы доказательства.

Применяя (формально) преобразование Лапласа к уравнениям (16) и (17), в силу известных свойств преобразования Лапласа (см., например, [22, гл. 3; 23, гл. 4]) с учетом начальных данных приходим к постановке задачи Дирихле для системы двух уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}_x\bigl\{\mathcal{A}^\gamma : \mathbb{D}(x, \hat{\boldsymbol{w}}^\gamma) - \mathcal{C}^\gamma \hat{\theta}^\gamma\bigr\} - \alpha_\tau \bar{\rho}\gamma^2 \hat{\boldsymbol{w}}^\gamma = \\ = \operatorname{div}_x\bigl\{\mathbb{A}_0 : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}_0^*)\bigr\} - \bar{\rho}(\alpha_\tau \gamma \boldsymbol{v}_0^* + \alpha_\tau \boldsymbol{w}_0^* + \alpha_F \hat{\boldsymbol{F}}^\gamma), \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \quad (25)\end{aligned}$$

$$\operatorname{div}_x\bigl\{\mathbb{E}_0 \nabla_x \hat{\theta}^\gamma - \gamma \mathbb{E}_1 \hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\bigr\} - \bar{c}_p \gamma \hat{\theta}^\gamma = -\operatorname{div}_x\bigl\{\mathbb{E}_1 \boldsymbol{w}_0^*\bigr\} - \bar{c}_p \theta_0^* - \hat{\Psi}^\gamma, \quad \boldsymbol{x} \in \Omega, \qquad (26)$$

$$\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma = 0, \quad \hat{\theta}^\gamma = 0, \quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \qquad (27)$$

Переменная $\gamma > 0$ в этой задаче является параметром.

В силу строгой положительной определенности тензора $\mathcal{A}^\gamma$ и матрицы $\mathbb{E}_0$ уравнения (25) и (26) являются равномерно эллиптическими относительно неизвестных функций $\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma$ и $\hat{\theta}^\gamma$, соответственно. Вследствие этого и строгой положительной определенности и симметричности матриц $\mathbb{E}_1$ и $\mathcal{C}^\gamma$ справедливо утверждение о том, что задача (25)–(27) имеет единственное обобщенное решение $(\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma, \hat{\theta}^\gamma) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при любых заданных $\boldsymbol{w}_0^* \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\hat{\boldsymbol{F}}^\gamma, \hat{\Psi}^\gamma, \theta_0^*, \boldsymbol{v}_0^* \in L^2(\Omega)$ при любом $\gamma > 0$, и соответствующее доказательство проводится в рамках известной теории обобщенных решений эллиптических уравнений [17, гл. 2].

Действительно, умножим уравнение (25) на $\gamma\mathbb{E}_1(\mathcal{C}^\gamma)^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma$ и уравнение (26) на $\hat{\theta}^\gamma$, проинтегрируем получившиеся равенства по $\boldsymbol{x}$ на Ω, возьмем интегралы по частям по $\boldsymbol{x}$ во всех слагаемых, содержащих оператор div_x, за исключением одного, возникающего из уравнения (25) и имеющего подынтегральное выражение $-\gamma\mathbb{E}_1(\mathcal{C}^\gamma)^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\cdot\mathrm{div}_x(\mathcal{C}^\gamma\hat{\theta}^\gamma)$, сложим результирующие соотношения и проведем ряд несложных алгебраических преобразований подынтегральных слагаемых, основываясь на том, что положительно определенные симметричные матрицы $\mathbb{E}_1$ и $\mathcal{C}^\gamma$ могут быть приведены к диагональному виду одним и тем же ортогональным преобразованием (скажем, $\mathfrak{Q}^\gamma$), и что $(\mathcal{C}^\gamma)^{-1}$, как и $\mathcal{C}^\gamma$, является симметричной матрицей и преобразованием $\mathfrak{Q}^\gamma$ приводится к диагональному виду. В результате описанных действий подынтегральное выражение $-\gamma\mathbb{E}_1(\mathcal{C}^\gamma)^{-1}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\cdot\mathrm{div}_x(\mathcal{C}^\gamma\hat{\theta}^\gamma)$ приводится к форме $-\gamma\mathbb{E}_1\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\cdot\nabla_x\hat{\theta}^\gamma$ и дает нуль в сумме с точно таким же выражением противоположного знака, возникающим из уравнения (26). В итоге приходим к энергетическому тождеству

$$
\begin{aligned}
&\|\mathbb{E}_0^{1/2}\nabla_x\hat{\theta}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+\gamma\bar{c}_p\|\hat{\theta}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+\gamma^3\alpha_\tau\bar{\rho}\|\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+\\
&\qquad+\int_\Omega\big(\mathcal{A}^\gamma:\mathbb{D}(x,\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma)\big):\mathbb{D}(x,\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma)d\boldsymbol{x}=\\
&\qquad=\int_\Omega\gamma\big(\mathbb{A}_0:\mathbb{D}(x,\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\boldsymbol{w}_0^*)\big):\mathbb{D}(x,\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma)d\boldsymbol{x}+\\
&\quad+\int_\Omega\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\cdot\big\{\bar{\rho}\mathbb{E}_1^{1/2}(\mathcal{C}^\gamma)^{-1/2}(\gamma\alpha_\tau\boldsymbol{v}_0^*+\alpha_\tau\boldsymbol{w}_0^*+\alpha_F\hat{\boldsymbol{F}}^\gamma)\big\}d\boldsymbol{x}+\\
&\qquad\qquad+\int_\Omega\big\{-(\mathbb{E}_1\boldsymbol{w}_0^*)\cdot\nabla_x\hat{\theta}^\gamma+\bar{c}_p\theta_0^*\hat{\theta}^\gamma+\hat{\Psi}^\gamma\hat{\theta}^\gamma\big\}d\boldsymbol{x},\quad\gamma>0,
\end{aligned}
$$

из которого, применяя неравенства Коши, Гельдера, Корна [24, гл. 3, § 3.2] и учитывая положительную определенность тензора $\mathcal{A}^\gamma$ и матриц $\mathbb{E}_0$, $\mathbb{E}_1$ и $(\mathcal{C}^\gamma)^{-1}$, выводим энергетическую оценку

$$
\begin{aligned}
&c_1^\gamma\|\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+c_2^\gamma\|\nabla_x\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+c_3^\gamma\|\hat{\theta}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+c_4^\gamma\|\nabla_x\hat{\theta}^\gamma\|^2_{2,\Omega}\le\\
&\qquad\le c_5^\gamma\|\boldsymbol{w}_0^*\|^2_{2,\Omega}+c_6^\gamma\|\nabla_x\boldsymbol{w}_0^*\|^2_{2,\Omega}+c_7^\gamma\|\theta_0^*\|^2_{2,\Omega}+c_8^\gamma\|\hat{\boldsymbol{F}}^\gamma\|^2_{2,\Omega}+c_9^\gamma\|\hat{\Psi}^\gamma\|^2_{2,\Omega},\quad\gamma>0,
\end{aligned}
$$

где все постоянные c_i^γ неотрицательны, причем с индексами $i=1,2,3,4$ — строго положительны. На основании этой оценки, точно так же, как и в [17, гл. 2, § 2, теорема 2.1, § 3], доказательство однозначной разрешимости задачи (25) – (27) завершается.

Наконец, применяя обратное преобразование Лапласа по γ к решению задачи (25) – (27), следуя рассуждениям из [17, гл. 3, § 4; гл. 4, § 7] или [25, гл. 16, § 5], восстанавливаем обобщенное решение задачи Б

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)&=\mathcal{L}^{-1}[\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\hat{\boldsymbol{w}}^\gamma(\boldsymbol{x})e^{\gamma t}d\gamma,\\
\theta(\boldsymbol{x},t)&=\mathcal{L}^{-1}[\hat{\theta}^\gamma]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\infty}^{\gamma_1+i\infty}\hat{\theta}^\gamma(\boldsymbol{x})e^{\gamma t}d\gamma,
\end{aligned}
$$

которое единственно в силу взаимной однозначности преобразований $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}^{-1}$.

§ 3. Доказательство теоремы 1 (начало): метод двухмасштабной сходимости, слабые и двухмасштабные пределы последовательности решений задачи A

В этом параграфе излагаются понятие и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей, а затем с их помощью предельным переходом при $\varepsilon \searrow 0$ из задачи A выводится система предельных двухмасштабных уравнений. Этот вывод является первым шагом в доказательстве теоремы 1.

Прежде всего, введем определение двухмасштабной сходимости последовательностей функций, определенных в Q, в классической форме, т. е. как в первоначальных работах [9, 10] или монографии [26, § 9.2]:

Определение 3. Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$ называется двухмасштабно сходящейся к пределу $\varphi \in L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$, если для любой 1-периодической по $\boldsymbol{y}$ и по ζ функции $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)$, $\sigma \in L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$ (уточним, что здесь $(\boldsymbol{x}, t) \in Q$, $\boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}$, $\zeta \in (0,1)$), справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_Q \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \sigma\Big(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}, \frac{t}{\varepsilon}\Big)\, d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{Q \times \mathcal{Y}} \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)\, \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dtd\zeta. \tag{28}$$

Существование и основные свойства двухмасштабно сходящихся последовательностей устанавливаются в следующей фундаментальной теореме [9, 10], [26, теоремы 9.7, 9.9]:

Теорема TS.

(1) *Всякая ограниченная в $L^2(Q)$ последовательность содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу, принадлежащему $L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$.*

(2) *Если последовательность из $L^2(Q)$ двухмасштабно сходится одновременно к двум функциям $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$, то $\varphi_1 = \varphi_2$ п.в. в $Q \times \mathcal{Y} \times (0,1)$.*

(3) *Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\partial_{x_i}\varphi^\varepsilon\}$ ограничены в $L^2(Q)$, где $i = 1, 2$ или 3. Тогда существуют функции $\varphi \in L^2(Q)$ и $\psi \in L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$, такие, что ψ 1-периодична по $\boldsymbol{y}$ и по ζ, $\partial_{y_i}\psi \in L^2(Q \times \mathcal{Y} \times (0,1))$, и $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\partial_{x_i}\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к φ и $\partial_{x_i}\varphi(\boldsymbol{x}, t) + \partial_{y_i}\psi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)$, соответственно.*

В рамках настоящей статьи свойство периодичности заданных и искомых функций возникает только по отношению к пространственным переменным. Поэтому класс пробных функций $\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)$ в предельном соотношении (28) может быть сужен: нам достаточно рассматривать функции, не зависящие от ζ, т. е. функции вида $\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$. Соответственно, мы вводим «редуцированную» версию определения двухмасштабной сходимости:

Определение 4. Последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$ называется двухмасштабно сходящейся к пределу $\tilde{\varphi} \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$, если для любой 1-периодической по $\boldsymbol{y}$ функции $\sigma = \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\sigma \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$, справедливо предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \int\limits_Q \varphi^\varepsilon(\boldsymbol{x}, t) \sigma\Big(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big)\, d\boldsymbol{x}dt = \int\limits_{Q \times \mathcal{Y}} \tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt. \tag{29}$$

Ясно, что двухмасштабные пределы φ и $\tilde{\varphi}$ в смысле определений 3 и 4 связаны соотношением

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}) = \int\limits_0^1 \varphi(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}, \zeta)\, d\zeta \quad \text{п. в. в } Q \times \mathcal{Y}.$$

Ввиду этого соотношения, для понятия двухмасштабной сходимости в смысле определения 4 справедливы все утверждения теоремы TS, с естественными модификациями:

Следствие (Теоремы TS).

(1) *Всякая ограниченная в $L^2(Q)$ последовательность содержит подпоследовательность, двухмасштабно сходящуюся к некоторому пределу, принадлежащему $L^2(Q \times \mathcal{Y})$.*

(2) *Если последовательность из $L^2(Q)$ двухмасштабно сходится одновременно к двум функциям $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2 \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$, то $\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2$ п. в. в $Q \times \mathcal{Y}$.*

(3) *Пусть последовательности $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\partial_{x_i}\varphi^\varepsilon\}$ ограничены в $L^2(Q)$, где $i = 1, 2$ или 3. Тогда существуют функции $\tilde{\varphi} \in L^2(Q)$ и $\tilde{\psi} \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$ и подпоследовательность из $\{\varphi^\varepsilon\}$, такие, что $\tilde{\psi}$ 1-периодична по $\boldsymbol{y}$, $\partial_{y_i}\tilde{\psi} \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$, и $\{\varphi^\varepsilon\}$ и $\{\partial_{x_i}\varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходятся к $\tilde{\varphi}$ и $\partial_{x_i}\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}, t) + \partial_{y_i}\tilde{\psi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, соответственно.*

Кроме этого, нам потребуется в дальнейшем следующий важный технический результат:

Замечание 2. Пусть $\sigma \in L^\infty(\mathcal{Y})$. Продолжим σ из $\mathcal{Y}$ во все пространство $\mathbb{R}^3$ периодическим повторением. Пусть $\sigma^\varepsilon(\boldsymbol{x}) = \sigma(\boldsymbol{x}/\varepsilon)$ $(\boldsymbol{x} \in \Omega)$, и последовательность $\{\varphi^\varepsilon\} \subset L^2(Q)$ двухмасштабно сходится к некоторому пределу $\tilde{\varphi} \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$. Из определения 4 и п. 2 следствия теоремы TS ясно, что последовательность $\{\sigma^\varepsilon \varphi^\varepsilon\}$ двухмасштабно сходится к пределу $\sigma(\boldsymbol{y})\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$.

В следствии теоремы TS, замечании 2 и всюду далее в статье двухмасштабная сходимость понимается в смысле определения 4. К слову, определение 4 не является новым, а многократно использовалось различными авторами при изучении нестационарных пространственно периодических задач (см., например, [13, 14, 27]).

Приступим к рассмотрению предельного перехода в уравнениях задачи A при $\varepsilon \searrow 0$ $(\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N})$. В силу предложения 1, последовательности $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\theta^\varepsilon\}$, $\{\nabla_x \theta^\varepsilon\}$, $\{\chi^\varepsilon \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon)\}$ равномерно ограничены в $L^2(Q)$. Из ограниченности последовательностей $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon\}$, $\{\theta^\varepsilon\}$ и $\{\nabla_x \theta^\varepsilon\}$ в силу свойства слабой предкомпактности ограниченных последовательностей и в силу п. 3 следствия теоремы TS вытекает, что существуют подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0 \,|\, \varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}\}$ и четверка функций $\{\boldsymbol{w}^* \in W_2^1(Q),\ \theta^* \in L^2(0, T; \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)),\ \boldsymbol{W}, \Theta \in L^2(Q \times \mathcal{Y})\}$, такие, что

$$\nabla_y \boldsymbol{W}, \nabla_y \Theta \in L^2(Q \times \mathcal{Y}); \quad \boldsymbol{W}, \Theta \quad \text{1-периодичны по } \boldsymbol{y}, \tag{30}$$

и при $\varepsilon \searrow 0$ выполняются предельные соотношения

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w}^\varepsilon &\rightarrow \boldsymbol{w}^* \text{ слабо в } W_2^1(Q), \\ \theta^\varepsilon &\rightarrow \theta^* \text{ слабо в } L^2(0, T; W_2^1(\Omega)), \end{aligned} \tag{31}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla_x \boldsymbol{w}^\varepsilon \quad &\rightarrow \quad \nabla_x \boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}),\\
\nabla_x \theta^\varepsilon \quad &\rightarrow \quad \nabla_x \theta^*(\boldsymbol{x},t) + \nabla_y \Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\\
&\qquad \text{в смысле двухмасштабной сходимости.}
\end{aligned} \tag{32}
$$

Далее, в силу равномерной ограниченности последовательности $\{\chi^\varepsilon \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon)\}_{\varepsilon\searrow 0}$ по п. 1 следствия из теоремы TS имеем, что существуют подпоследовательность $\{\varepsilon_k > 0 \,|\, \varepsilon_k^{-1} \in \mathbb{N}\}$ и функция $\mathfrak{H}$: $Q \times \mathcal{Y} \mapsto \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$, такая, что $\mathfrak{H} \in L^2(Q \times \mathcal{Y})$ и

$$
\chi^{\varepsilon_k} \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k}) \underset{k\nearrow\infty}{\longrightarrow} \mathfrak{H} \quad \text{в смысле двухмасштабной сходимости.} \tag{33}
$$

С другой стороны, во-первых, интегрируя по частям в интеграле в (29), выводим

$$
\begin{aligned}
\int\limits_Q \chi^{\varepsilon_k} \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k})\, \sigma\left(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right) d\boldsymbol{x}dt \quad &= \quad \int\limits_Q \frac{\partial}{\partial t}\left[\chi^{\varepsilon_k} \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k})\right] \sigma\left(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right) d\boldsymbol{x}dt =\\
&= \quad -\int\limits_Q \chi^{\varepsilon_k} \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k})\, \partial_t \sigma \, d\boldsymbol{x}dt
\end{aligned} \tag{34}
$$

для любой гладкой функции $\sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, такой, что $\sigma|_{t=0} = \sigma|_{t=T} = 0$, и, во-вторых, переходя к пределу при $k \nearrow \infty$, в силу первого соотношения из (32) и замечания 2, заключаем, что

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_Q \chi^{\varepsilon_k} \mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^{\varepsilon_k})\, \partial_t \sigma\left(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon_k}\right) d\boldsymbol{x}dt \underset{k\nearrow\infty}{\longrightarrow}\\
&\qquad \underset{k\nearrow\infty}{\longrightarrow} \int\limits_{Q\times\mathcal{Y}} \chi(\boldsymbol{y})\big(\mathbb{D}(x, \boldsymbol{w}^*) + \mathbb{D}(y, \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}))\big)\, \partial_t \sigma(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})\, d\boldsymbol{x}dtd\boldsymbol{y}.
\end{aligned} \tag{35}
$$

Комбинируя (33)–(35), по определению обобщенной производной (по t) получаем, что

$$
\mathfrak{H} = \chi(\boldsymbol{y})\big(\mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^*) + \mathbb{D}(y, \partial_t \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}))\big),
$$

иными словами, при подходящем выборе подпоследовательности из $\{\varepsilon > 0 \mid \varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}\}$, выполняется соотношение

$$
\begin{aligned}
\chi^\varepsilon \mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^\varepsilon) \quad \underset{\varepsilon\searrow 0}{\longrightarrow} \quad &\chi(\boldsymbol{y})\big(\mathbb{D}(x, \partial_t \boldsymbol{w}^*) + \mathbb{D}(y, \partial_t \boldsymbol{W}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y}))\big)\\
&\text{в смысле двухмасштабной сходимости.}
\end{aligned} \tag{36}
$$

Подставим в интегральные равенства (11) и (12) пробные функции вида

$$
\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon \boldsymbol{\varphi}_2\Big(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big), \quad \psi = \psi_1(\boldsymbol{x}, t) + \varepsilon \psi_2\Big(\boldsymbol{x}, t, \frac{\boldsymbol{x}}{\varepsilon}\Big),
$$

где $\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$, $\psi_1(\boldsymbol{x}, t)$ и $\psi_2(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{y})$ — произвольные гладкие функции, обращающиеся в нуль вблизи $\partial\Omega$ и в окрестности $t = T$, причем $\boldsymbol{\varphi}_2$ и ψ_2 1-периодичны по $\boldsymbol{y}$. Переходя теперь в этих интегральных равенствах к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, выбирая при необходимости подпоследовательность из $\{\varepsilon > 0,\ \varepsilon^{-1} \in \mathbb{N}\}$, в силу соотношений (14), (15), (31), (32) и (36) выводим систему, состоящую из четырех *усредненных двухмасштабных* интегральных равенств:

$$\int\limits_{Q}\Big\{\alpha_\tau\bar{\rho}\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\varphi}_1}{\partial t}-\Big[|\mathcal{Y}_f|\Big(\alpha_\mu\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\big)+\big(\alpha_p\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^*+\alpha_\nu\mathrm{div}_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}-\alpha_{\theta f}\theta^*\big)\mathbb{I}\Big)+$$
$$+|\mathcal{Y}_s|\big(\alpha_\lambda\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^*)+(\alpha_\eta\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^*-\alpha_{\theta s}\theta^*)\mathbb{I}\big)+$$
$$+\Big\langle\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_\mu\mathbb{D}\big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})}{\partial t}\big)+\big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})+\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})}{\partial t}\big)\mathbb{I}\Big)+$$
$$+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\alpha_\lambda\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))+(\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}))\mathbb{I}\big)\Big\rangle_{\mathcal{Y}}\Big]:\nabla_x\boldsymbol{\varphi}_1+\alpha_F\bar{\rho}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1\Big\}d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\alpha_\tau\big\langle(\chi(\boldsymbol{y})\rho_f+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\rho_s)\boldsymbol{V}_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\rangle_{\mathcal{Y}}\cdot\boldsymbol{\varphi}_1(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}=0,\quad(37)$$

$$\int\limits_{Q\times\mathcal{Y}}\Big\{\chi(\boldsymbol{y})\Big[\alpha_\mu\mathbb{D}\big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\big)+\alpha_\mu\mathbb{D}\big(y,\frac{\partial\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})}{\partial t}\big)+$$
$$+\big(\alpha_p\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^*+\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})+\alpha_\nu\mathrm{div}_x\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}+\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})}{\partial t}-\alpha_{\theta f}\theta^*\big)\mathbb{I}\Big]+$$
$$+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big[\alpha_\lambda(\mathbb{D}(x,\boldsymbol{w}^*)+\mathbb{D}(y,\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})))+$$
$$+(\alpha_\eta\mathrm{div}_x\boldsymbol{w}^*+\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})-\alpha_{\theta s}\theta^*)\mathbb{I}\big]\Big\}:\nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=0,\quad(38)$$

$$\int\limits_{Q}\Big\{\bar{c}_p\theta^*\frac{\partial\psi_1}{\partial t}-\Big[\big(|\mathcal{Y}_f|\varkappa_f+|\mathcal{Y}_s|\varkappa_s\big)\nabla_x\theta^*-\big(|\mathcal{Y}_f|\alpha_{\theta f}+|\mathcal{Y}_s|\alpha_{\theta s}\big)\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}+$$
$$+\big\langle(\chi(\boldsymbol{y})\varkappa_f+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_s)\nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})\big\rangle_{\mathcal{Y}}\Big]\cdot\nabla_x\psi_1+\bar{\Psi}\psi_1\Big\}d\boldsymbol{x}dt+$$
$$+\int\limits_{\Omega}\big\langle(\chi(\boldsymbol{y})c_{pf}+(1-\chi(\boldsymbol{y}))c_{ps})\Theta_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\big\rangle_{\mathcal{Y}}\psi_1(\boldsymbol{x},0)d\boldsymbol{x}=0,\quad(39)$$

$$\int\limits_{Q\times\mathcal{Y}}\Big\{\chi(\boldsymbol{y})\Big[\varkappa_f\nabla_x\theta^*+\varkappa_f\nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})-\alpha_{\theta f}\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\Big]+$$
$$+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\Big[\varkappa_s\nabla_x\theta^*+\varkappa_s\nabla_y\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})-\alpha_{\theta s}\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\Big]\Big\}\cdot\nabla_y\psi_2(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt=0.\quad(40)$$

В смысле теории распределений система (37)–(40) эквивалентна начально-краевой задаче для системы восьми скалярных уравнений для восьми функций $w_i^*(\boldsymbol{x},t)$, $W_i(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ $(i=1,2,3)$, $\theta^*(\boldsymbol{x},t)$ и $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и, следовательно, является замкнутой. Справедливо

Предложение 2. *Для любых заданных* $\boldsymbol{w}^*|_{t=0}\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, $\boldsymbol{V}_0,\Theta_0\in L^2(\Omega\times\mathcal{Y})$, $\boldsymbol{F},\bar{\Psi}\in L^2(Q)$ *система* (37)–(40) *имеет единственное решение* $\boldsymbol{w}^*\in W_2^1(Q)$, $\theta^*\in L^2(0,T;\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega))$, $\boldsymbol{W},\Theta\in L^2(Q\times\mathcal{Y})$, *удовлетворяющее условиям регулярности* (30).

Существование решений уже доказано предельным переходом при $\varepsilon\searrow 0$ в задаче А. Единственность доказывается аналогично [13, лемма 5; 20, лемма 6].

§ 4. Доказательство теоремы 1 (окончание): вывод гомогенных уравнений (16) и (17), структура эффективных коэффициентов

Разрешим уравнения (38) и (40) относительно функций $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$ и $\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y})$, считая при этом $\boldsymbol{w}^*$ и θ^* заданными. Для этого применим метод разделения переменных, более точно, будем искать $\boldsymbol{W}$ и Θ в виде

$$\boldsymbol{W}(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{3}\Big(\mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},t))\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \int_0^t \mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},\tau))\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)d\tau\Big) + \\ + \int_0^t \theta^*(\boldsymbol{x},\tau)\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau)d\tau, \quad (41)$$

$$\Theta(\boldsymbol{x},t,\boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial\theta^*}{\partial x_i}g_1^i(\boldsymbol{y}) + \frac{\partial w_i^*}{\partial t}g_2^i(\boldsymbol{y})\Big), \quad (42)$$

где вектор-функции $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$ и $\boldsymbol{Z}_3$ и скалярные функции g_1^i и g_2^i подлежат определению. Подставляя (41) в (38) и (42) в (40), после несложных технических преобразований приходим к следующим интегральным равенствам:

$$\int\limits_{Q\times\mathcal{Y}_f}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}_{ij}\Big(x,\frac{\partial\boldsymbol{w}^*}{\partial t}\Big)\big[\alpha_\mu\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\nu\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\mu\mathbb{J}^{ij} + \alpha_\nu\delta_{ij}\mathbb{I}\big] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 + \\ + \sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},t))\big[\alpha_\mu\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)) + (\alpha_\nu\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))\mathbb{I} + \\ + \alpha_p\big(\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \delta_{ij}\big)\mathbb{I}\big] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 - \Bigg[\int_0^t\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},\tau))\Big[\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)}{\partial\tau}\Big) - \\ - \big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)\big)\mathbb{I} + \Big(\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)}{\partial\tau}\Big)\mathbb{I}\Big]d\tau\Bigg] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 + \\ + \theta^*(\boldsymbol{x},t)\big[\alpha_\mu\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0)) + \big(\alpha_\nu\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0)\big)\mathbb{I} - \alpha_{\theta f}\mathbb{I}\big] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 - \\ - \Bigg[\int_0^t\theta^*(\boldsymbol{x},\tau)\Big[\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau)}{\partial\tau}\Big) - \big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau)\big)\mathbb{I} + \\ + \Big(\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau)}{\partial\tau}\Big)\mathbb{I}\Big]d\tau\Bigg] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2\Bigg\}d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{y}dt + \\ + \int\limits_{Q\times\mathcal{Y}_s}\Bigg\{\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*)\big[\alpha_\lambda\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}) + \big(\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}\big)\mathbb{I} + \alpha_\lambda\mathbb{J}^{ij} + \alpha_\eta\delta_{ij}\mathbb{I}\big] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 + \\ + \Bigg[\int_0^t\sum_{i,j=1}^{3}\mathbb{D}_{ij}(x,\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},\tau))\big[\alpha_\lambda\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)) + \big(\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t-\tau)\big)\mathbb{I}\big]d\tau\Bigg] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 + \\ + \Bigg[\int_0^t\theta^*(\boldsymbol{x},\tau)\big[\alpha_\lambda\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau)) + (\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t-\tau))\mathbb{I}\big]d\tau\Bigg] : \nabla_y\boldsymbol{\varphi}_2 -$$

$$- \theta^*(\alpha_{\theta s}\mathrm{div}_y \boldsymbol{\varphi}_2)\Big\} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} dt = 0, \quad (43)$$

$$\int\limits_{Q\times\mathcal{Y}_f} \Big\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j} (\varkappa_f \nabla_y g_1^j + \varkappa_f \boldsymbol{e}^j) \cdot \nabla_y \psi_2 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_j^*}{\partial t} (\varkappa_f \nabla_y g_2^j - \alpha_{\theta f} \boldsymbol{e}^j) \cdot \nabla_y \psi_2 \Big\} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} dt +$$
$$+ \int\limits_{Q\times\mathcal{Y}_s} \Big\{ \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \theta^*}{\partial x_j} (\varkappa_s \nabla_y g_1^j + \varkappa_s \boldsymbol{e}^j) \cdot \nabla_y \psi_2 + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial w_j^*}{\partial t} (\varkappa_s \nabla_y g_2^j - \alpha_{\theta s} \boldsymbol{e}^j) \cdot \nabla_y \psi_2 \Big\} d\boldsymbol{x} d\boldsymbol{y} dt = 0. \quad (44)$$

В (43) и (44) через $\boldsymbol{e}^j$ обозначаются вектора стандартного декартова базиса в $\mathbb{R}^3$; $\mathbb{J}^{ij} \stackrel{def}{=} (1/2)(\boldsymbol{e}^i \otimes \boldsymbol{e}^j + \boldsymbol{e}^j \otimes \boldsymbol{e}^i)$ — 3×3-матрица, в представлении которой $\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l$ — это диада двух базисных векторов, определяемая для любого $\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^3$ по закону $(\boldsymbol{e}^k \otimes \boldsymbol{e}^l)\boldsymbol{a} = a_l \boldsymbol{e}^k$.

Из структуры интегральных равенств (43) и (44) заметно, что для того, чтобы эти равенства выполнялись тождественно при всевозможных $\boldsymbol{w}^*$ и θ^* и независимо от выбора пробных функций $\boldsymbol{\varphi}_2$ и ψ_2, достаточно потребовать, чтобы функции $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_3$, g_1^i и g_2^i служили решениями краевых задач на шаблонной ячейке $\mathcal{Y}$, формулируемых ниже в терминах интегральных равенств (аналогично, например, [6, 13]).

Вектор-функция $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$ $(i,j=1,2,3)$ находится из системы

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f} \big(\alpha_\mu \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\mu \mathbb{J}^{ij} + \alpha_\nu \delta_{ij}\mathbb{I}\big) : \nabla_y \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} = 0 \quad (45)$$

$\forall\, \boldsymbol{\varphi} \in W_2^1(\mathcal{Y})$ ($\boldsymbol{\varphi}$ — 1-периодическая),

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_s} \big(\alpha_\lambda \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\eta \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\lambda \mathbb{J}^{ij} + \alpha_\eta \delta_{ij}\mathbb{I}\big) : \nabla_y \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} =$$
$$= \int\limits_{\partial\mathcal{Y}_s \setminus \partial\mathcal{Y}} \big(\alpha_\lambda \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\eta \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\lambda \mathbb{J}^{ij} + \alpha_\eta \delta_{ij}\mathbb{I}\big)\boldsymbol{n}(\sigma_y) \cdot \boldsymbol{\beta}(\sigma_y) d\sigma_y \quad (46)$$

$\forall\, \boldsymbol{\beta} \in W_2^1(\mathcal{Y})$ ($\boldsymbol{\beta}$ — 1-периодическая),

$$\boldsymbol{Z}_1^{ij} \in W_2^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R}, \quad (\partial \boldsymbol{Z}_1^{ij}/\partial t) \in W_2^1(\mathcal{Y}_f)/\mathbb{R}, \quad \boldsymbol{Z}_1^{ij} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \text{ — 1-периодическая.} \quad (47)$$

Здесь через $\boldsymbol{n}$ обозначается единичная нормаль к $\partial\mathcal{Y}_s$, направленная внутрь $\mathcal{Y}_f$.

После этого определяется начальное значение ядра $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$ $(i,j=1,2,3)$, как решение задачи

$$\int\limits_{Y_f} \big(\alpha_\mu \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)) + (\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))\mathbb{I} + (\alpha_p \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}))\mathbb{I} + \alpha_p \delta_{ij}\mathbb{I}\big) : \nabla_y \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) d\boldsymbol{y} =$$
$$= - \int\limits_{\partial\mathcal{Y}_s \setminus \partial\mathcal{Y}} \big(\alpha_\lambda \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\eta \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\lambda \mathbb{J}^{ij} + \alpha_\eta \delta_{ij}\mathbb{I}\big)\boldsymbol{n}(\sigma_y) \cdot \boldsymbol{\varphi}(\sigma_y) d\sigma_y \quad (48)$$

$\forall\, \boldsymbol{\varphi} \in W_2^1(\mathcal{Y}_f)$ ($\boldsymbol{\varphi}$ – 1-периодическая),

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\cdot,0) \in W_2^1(\mathcal{Y}_f)/\mathbb{R}, \quad \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\cdot,0) : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \text{ — 1-периодическая по } \boldsymbol{y}, \quad (49)$$

в постановке которой вектор-функция $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$ считается заданной. Затем значение ядра $\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)$ $(i,j=1,2,3)$ задается в $\mathcal{Y}\times(0,T)$ посредством решения системы

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\Big\{\alpha_\mu\mathbb{D}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)+(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))\mathbb{I}+\Big(\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)\mathbb{I}\Big\}:\nabla_y\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}+$$

$$+\int\limits_{\mathcal{Y}_s}\big\{\alpha_\lambda\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))+(\alpha_\eta\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))\mathbb{I}\big\}:\nabla_y\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0 \quad (50)$$

$\forall\,\boldsymbol{\varphi}\in W_2^1(\mathcal{Y})$ ($\boldsymbol{\varphi}$ – 1-периодическая),

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\ \text{задана в}\ \mathcal{Y}_f,\ \text{как решение системы (48),(49),} \quad (51)$$

$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}\in L^\infty(0,T;W_2^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R}),\quad (\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}/\partial t)\in L^2(0,T;W_2^1(\mathcal{Y}_f)),$$
$$\boldsymbol{Z}_2^{ij}:\mathbb{R}^3\times(0,T)\mapsto\mathbb{R}^3\ \text{— 1-периодическая по}\ \boldsymbol{y}. \quad (52)$$

Аналогично конструируются задачи для определения $\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0)$ и $\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)$:

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\big\{\alpha_\mu\mathbb{D}(y,\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0))+(\alpha_\nu\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0))\mathbb{I}-\alpha_{\theta f}\mathbb{I}\big\}:\nabla_y\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}-\int\limits_{\mathcal{Y}_s}\alpha_{\theta s}\mathrm{div}_y\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0 \quad (53)$$

$\forall\,\boldsymbol{\varphi}\in W_2^1(\mathcal{Y})$ ($\boldsymbol{\varphi}$ — 1-периодическая),

$$\boldsymbol{Z}_3(\cdot,0)\in W_2^1(\mathcal{Y}_f)/\mathbb{R},\quad \boldsymbol{Z}_3(\cdot,0):\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3\ \text{— 1-периодическая по}\ \boldsymbol{y}, \quad (54)$$

и, соответственно,

$$\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)\ \text{удовлетворяет системе (50), (52),} \quad (55)$$

$$\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0)\ \text{задана в}\ \mathcal{Y}_f\ \text{решением системы (53), (54).} \quad (56)$$

Наконец, функции $g_1^j(\boldsymbol{y})$ и $g_2^j(\boldsymbol{y})$ находятся как решения задач

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\varkappa_f\big(\nabla_y g_1^j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{e}^j\big)\cdot\nabla_y\psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}+\int\limits_{\mathcal{Y}_s}\varkappa_s\big(\nabla_y g_1^j(\boldsymbol{y})+\boldsymbol{e}^j\big)\cdot\nabla_y\psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0 \quad (57)$$

$\forall\,\psi\in W_2^1(\mathcal{Y})$ (ψ — 1-периодическая),

$$g_1^j\in W_2^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R},\quad g_1^j:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}\ \text{— 1-периодическая,} \quad (58)$$

и

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\big(\varkappa_f\nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y})-\alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^j\big)\cdot\nabla_y\psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}+\int\limits_{\mathcal{Y}_s}\big(\varkappa_s\nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y})-\alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j\big)\cdot\nabla_y\psi(\boldsymbol{y})d\boldsymbol{y}=0 \quad (59)$$

$\forall\,\psi\in W_2^1(\mathcal{Y})$, ($\psi$ — 1-периодическая),

$$g_2^j\in W_2^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R},\quad g_2^j:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}\ \text{— 1-периодическая.} \quad (60)$$

Следующее утверждение констатирует, что требование о том, чтобы $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$, $\boldsymbol{Z}_3$, g_1^i и g_2^i служили решениями вышепоставленных задач, корректно, а значит, двухмасштабные предельные функции $\boldsymbol{W}$ и Θ действительно имеют представления (41) и (42). Более того, эти представления однозначны.

Предложение 3. *Пусть геометрия множеств $\mathcal{Y}_f$ и $\mathcal{Y}_s$ и коэффициенты α_μ, α_p, α_ν, α_λ, α_η, $\alpha_{\theta f}$, $\alpha_{\theta s}$, $\varkappa_f$ и $\varkappa_s$ заданы. Тогда каждая из задач* (45),(46),(47), (59), (60) *имеет единственное решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция задач (45), (46), (47), (55), (56) является естественной модификацией постановок задач на шаблонной ячейке из работы [13, п. 2.4]. Поэтому доказательства корректности задач (45), (46), (47), (55), (56) проводятся аналогично доказательствам корректности соответствующих задач из [13, п. 2.4, см. леммы 6, 7, 9, 10] на основании хорошо известных фактов и методов теории линейных уравнений в частных производных (леммы Лакса–Мильграма, неравенств Корна и Пуанкаре, метода Галеркина и т. д.). Задачи (57), (58), (59), (59) являются частными случаями хорошо изученной простейшей периодической задачи для уравнения эллиптического типа, обоснование корректности которой изложено, например, в [8, гл. 1, с. 18]. □

Подставляя (41) в (37) и (42) в (39), немедленно получаем интегральные равенства (22) и (23), в которых $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{w}^*(\boldsymbol{x},t)$, $\theta(\boldsymbol{x},t)=\theta^*(\boldsymbol{x},t)$ и компоненты тензоров $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2(t)$ и матриц $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_1(t)$, $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}_1$ определены следующим образом:

$$A_0^{ijkl}=|\mathcal{Y}_f|(\alpha_\mu\delta_{il}\delta_{jk}+\alpha_\nu\delta_{ij}\delta_{kl})+\alpha_\mu\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{kl}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}))\big\rangle_{\mathcal{Y}}+\alpha_\nu\delta_{kl}\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\big\rangle_{\mathcal{Y}}, \quad (61)$$

$$\begin{aligned}A_1^{ijkl}={}&|\mathcal{Y}_f|\alpha_p\delta_{ij}\delta_{kl}+|\mathcal{Y}_s|(\alpha_\lambda\delta_{il}\delta_{kj}+\alpha_\eta\delta_{ij}\delta_{kl})+\\&+\delta_{kl}\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})+\alpha_\nu\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0)\big)\big\rangle_{\mathcal{Y}}+\\&+\alpha_\mu\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{kl}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},0))\big\rangle_{\mathcal{Y}}+\alpha_\eta\delta_{kl}\big\langle(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})\big\rangle+\\&+\alpha_\lambda\big\langle(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathbb{D}_{kl}(y,\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}))\big\rangle_{\mathcal{Y}},\end{aligned}\quad (62)$$

$$\begin{aligned}A_2^{ijkl}(t)={}&\delta_{kl}\left\langle\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)+\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)\right\rangle_{\mathcal{Y}}+\\&+\alpha_\mu\left\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{kl}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)\right\rangle_{\mathcal{Y}}+\alpha_\eta\delta_{kl}\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t)\big\rangle_{\mathcal{Y}}+\\&+\alpha_\lambda\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{kl}(y,\boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y},t))\big\rangle_{\mathcal{Y}},\end{aligned}\quad (63)$$

$$C_0^{ij}=|\mathcal{Y}_f|\alpha_{\theta f}\delta_{ij}+|\mathcal{Y}_s|\alpha_{\theta s}\delta_{ij}-\big\langle\chi(\boldsymbol{y})\big(\alpha_\nu\delta_{ij}\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0)+\alpha_\mu\mathbb{D}_{ij}(y,\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},0))\big)\big\rangle_{\mathcal{Y}}, \quad (64)$$

$$\begin{aligned}C_1^{ij}(t)={}&-\delta_{ij}\left\langle\chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_p\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)+\alpha_\nu\mathrm{div}_y\frac{\partial\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)\right\rangle_{\mathcal{Y}}-\\&-\alpha_\mu\left\langle\chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{ij}\Big(y,\frac{\partial\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)}{\partial t}\Big)\right\rangle_{\mathcal{Y}}-\\&-\alpha_\eta\delta_{ij}\big\langle(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathrm{div}_y\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t)\big\rangle_{\mathcal{Y}}-\alpha_\lambda\big\langle(1-\chi(\boldsymbol{y}))\mathbb{D}_{ij}(y,\boldsymbol{Z}_3(\boldsymbol{y},t))\big\rangle_{\mathcal{Y}},\end{aligned}\quad (65)$$

$$E_0^{ij}=|\mathcal{Y}_f|\varkappa_f\delta_{ij}+|\mathcal{Y}_s|\varkappa_s\delta_{ij}+\left\langle\big(\chi(\boldsymbol{y})\varkappa_f+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_s\big)\frac{\partial g_1^j(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\right\rangle_{\mathcal{Y}}, \quad (66)$$

$$E_1^{ij}=|\mathcal{Y}_f|\alpha_{\theta f}\delta_{ij}+|\mathcal{Y}_s|\alpha_{\theta s}\delta_{ij}-\left\langle\big(\chi(\boldsymbol{y})\varkappa_f+(1-\chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_s\big)\frac{\partial g_2^j(\boldsymbol{y})}{\partial y_i}\right\rangle_{\mathcal{Y}}, \quad (67)$$

$i, j, k, l = 1, 2, 3.$

Так как вектор-функции $\boldsymbol{Z}_2^{ij}$ и $\boldsymbol{Z}_3$ удовлетворяют условиям регулярности (52), то имеют место включения $A_2^{ijkl}, C_1^{ij} \in L^2(0,T)$. В силу этого и свойств регулярности функций $\boldsymbol{w}^*$ и θ^*, установленных в п. 3, все интегралы в (22) и (23) корректно определены. Еще заметим, что вследствие утверждения единственности в предложении 2 все сходящиеся подпоследовательности из $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon\}$ $(\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N})$ имеют один и тот же предел $\{\boldsymbol{w}^*, \theta^*\}$, а значит и вся последовательность $\{\boldsymbol{w}^\varepsilon, \theta^\varepsilon\}$ $(\varepsilon^{-1} \in \mathbb{N})$ является сходящейся. Теорема 1 доказана. □

§ 5. Доказательство теоремы 2

1. Обоснуем утверждение п. 1 теоремы для тензора $\mathbb{A}_0$. Для $\mathbb{A}_1$, $\mathbb{A}_2$, $\mathbb{C}_0$, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{E}_0$ и $\mathbb{E}_1$ доказательства симметричности проводятся аналогичными рассуждениями.

Подставляя в интегральное равенство (45) в качестве пробной функции $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Z}_1^{qr}(\boldsymbol{y})$, что законно, получаем тождество

$$A_{01}^{ijqr} \stackrel{def}{=} \big\langle \chi(\boldsymbol{y})\big[\alpha_\mu \mathbb{D}_{ij}(y, \boldsymbol{Z}_1^{qr}(\boldsymbol{y})) + \alpha_\nu \delta_{ij} \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{qr}(\boldsymbol{y})\big]\big\rangle_{\mathcal{Y}} =$$
$$= -\big\langle \chi(\boldsymbol{y})\big[\alpha_\mu \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y})) : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{qr}(\boldsymbol{y})) + \alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) \cdot \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{qr}(\boldsymbol{y})\big]\big\rangle_{\mathcal{Y}}$$

$(i, j, k, l = 1, 2, 3)$. В нем правая часть очевидно остается неизменной, если поменять местами пары индексов (i, j) и (q, r), а левая часть — если поменять местами i и j. Комбинируя эти свойства, заключаем, что тензор $\mathbb{A}_{01} = \{A_{01}^{ijkl}\}$ является симметричным в смысле (24). В свою очередь, в силу (61) имеем, что $A_0^{ijkl} = |\mathcal{Y}_f|(\alpha_\mu \delta_{il}\delta_{jk} + \alpha_\nu \delta_{ij}\delta_{kl}) + A_{01}^{klij}$, откуда немедленно вытекает симметричность $\mathbb{A}_0$.

2. Изложим подробно обоснование утверждения п. 2 только для тензора $\mathcal{A}^\gamma$, а для матрицы $\mathcal{C}^\gamma$ опустим, поскольку оно проводится совершенно аналогично.

Введем в рассмотрение стационарную задачу, ассоциированную с эволюционной задачей (50), (51),(52), возникающую в результате применения преобразования Лапласа по t к интегральному равенству (50) (считая при этом, что зависящие от t функции продолжены нулем вправо за пределы интервала $(0,T)$): при $i, j = 1, 2, 3$ найти вектор-функцию $\boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij} = \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})$, удовлетворяющую системе

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f} \Big\{ \gamma\alpha_\mu \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})\big) - \alpha_\mu \mathbb{D}\big(y, \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y}, 0)\big) + (\alpha_p \mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y}))\mathbb{I} +$$
$$+ \gamma\big(\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})\big)\mathbb{I} - (\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_2^{ij}(\boldsymbol{y}, 0)) \Big\} : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y} +$$
$$+ \int\limits_{\mathcal{Y}_s} \big\{ \alpha_\lambda \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})) + (\alpha_\eta \mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y}))\mathbb{I}\big\} : \mathbb{D}(y, \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y} = 0$$
$$\forall\, \boldsymbol{\varphi} \in W_2^1(\mathcal{Y}), \quad \boldsymbol{\varphi} \text{ — 1-периодическая}, \tag{68}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij} \in W_2^1(\mathcal{Y})/\mathbb{R}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3 \text{ — 1-периодическая}. \tag{69}$$

Число $\gamma > 0$ является в этой задаче параметром.

Как в доказательстве предложения 3 замечаем, что эта задача является частным случаем простейшей периодической эллиптической задачи и при всех $\gamma > 0$ имеет единственное решение [8, гл. 1, с. 18]. Очевидно $\boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})$ — это преобразование Лапласа по t вектор-функции $\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},t)$. Таким образом компоненты тензора $\hat{\mathbb{A}}_2(\gamma)$ могут быть записаны в виде

$$\hat{A}^{ijkl}_2(\gamma) = \delta_{kl}\Big\langle \chi(\boldsymbol{y})\Big(\alpha_p \mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y}) + \gamma\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y}) - \alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)\Big\rangle_{\mathcal{Y}} + \\ + \alpha_\mu\Big\langle \chi(\boldsymbol{y})\big[\gamma\mathbb{D}_{kl}\big(y,\boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big) - \mathbb{D}_{kl}\big(y,\boldsymbol{Z}^{ij}_2(\boldsymbol{y},0)\big)\big]\Big\rangle_{\mathcal{Y}} + \\ + \alpha_\eta\delta_{kl}\big\langle \chi(\boldsymbol{y})\mathrm{div}_y \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big\rangle_{\mathcal{Y}} + \alpha_\lambda\big\langle \chi(\boldsymbol{y})\mathbb{D}_{kl}(y,\boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y}))\big\rangle_{\mathcal{Y}}. \quad (70)$$

Пусть $\mathbb{X} = (X_{ij})$ — произвольная постоянная симметричная 3×3-матрица. Домножим интегральные равенства (46), (48) и (68) на X_{ij} и интегральное равенство (45) на γX_{ij}, сложим получившиеся равенства, считая в них пробные вектор-функции одинаковыми (в частности, $\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y})$), и просуммируем по i и по j. В результате получим

$$\int\limits_{\mathcal{Y}_f}\Big\{\gamma\alpha_\mu\Big[\mathbb{D}\Big(y,\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathbb{X}\Big] + \\ + (\gamma\alpha_\nu + \alpha_p)\Big[\mathrm{div}_y\Big(\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathrm{tr}\,\mathbb{X}\Big]\mathbb{I}\Big\} : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y} + \\ + \int\limits_{\mathcal{Y}_s}\Big\{\alpha_\lambda\Big[\mathbb{D}\Big(y,\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathbb{X}\Big] + \\ + \alpha_\eta\Big[\mathrm{div}_y\Big(\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathrm{tr}\,\mathbb{X}\Big]\mathbb{I}\Big\} : \mathbb{D}(y,\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}))d\boldsymbol{y} = 0, \quad (71)$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in W^1_2(\mathcal{Y})$ — произвольная 1-периодическая функция.

Также введем в рассмотрение квадратичную форму

$$I_*(\mathbb{X},\mathbb{X}) \stackrel{def}{=} \int\limits_{\mathcal{Y}}\big(\gamma\alpha_\mu\chi(\boldsymbol{y}) + \alpha_\lambda(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big)\Big|\mathbb{D}\Big(y,\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathbb{X}\Big|^2 d\boldsymbol{y} + \\ + \int\limits_{\mathcal{Y}}\big((\alpha_p + \gamma\alpha_\nu)\chi(\boldsymbol{y}) + \alpha_\eta(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big)\Big|\mathrm{div}_y\Big(\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathrm{tr}\,\mathbb{X}\Big|^2 d\boldsymbol{y}, \quad (72)$$

которая очевидно является неотрицательной. Подставляя в интегральное равенство (71) пробную функцию $\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{y}) = \sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)$, что законно, и затем комбинируя получающееся выражение с (72), выводим равенство

$$I_*(\mathbb{X},\mathbb{X}) = \int\limits_{\mathcal{Y}}\Big\{\big(\gamma\alpha_\mu\chi(\boldsymbol{y}) + \alpha_\lambda(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big)\Big[\mathbb{D}\Big(y,\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathbb{X}\Big] + \\ + \big((\alpha_p + \gamma\alpha_\nu)\chi(\boldsymbol{y}) + \alpha_\eta(1-\chi(\boldsymbol{y}))\big)\Big[\mathrm{div}_y\Big(\sum_{i,j=1}^{3}X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}^{ij}_1(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}^{ij}_\gamma(\boldsymbol{y})\big)\Big) + \mathrm{tr}\,\mathbb{X}\Big]\mathbb{I}\Big\} : \mathbb{X}\,d\boldsymbol{y}. \quad (73)$$

В силу представлений (61), (62) и (70) правая часть равенства (73) в точности совпадает с квадратичной формой $(\mathcal{A}^\gamma : \mathbb{X}) : \mathbb{X}$. Следовательно, $(\mathcal{A}^\gamma : \mathbb{X}) : \mathbb{X} \geq 0$ для любой симметричной матрицы $\mathbb{X}$ при любом значении $\gamma > 0$. В свою очередь, в этом неравенстве от требования симметричности для матрицы $\mathbb{X}$ можно легко избавиться в силу свойств симметричности тензоров $\mathbb{A}_0$, $\mathbb{A}_1$ и $\mathbb{A}_2(t)$ (а значит и $\hat{\mathbb{A}}_2(\gamma)$) из пункта 1 теоремы. Таким образом, неотрицательность тензора $\mathcal{A}^\gamma$ доказана.

Строгая положительная определенность $\mathcal{A}^\gamma$ доказывается, следуя рассуждениям из [13, лемма 8], методом от противного. Предположим, что для некоторой нетривиальной матрицы $\mathbb{X}$, т. е. для такой, что $\mathbb{X} \neq 0$, имеет место равенство $(\mathcal{A}^\gamma : \mathbb{X}) : \mathbb{X} = 0$, а значит, и $I_*(\mathbb{X}, \mathbb{X}) = 0$. Тогда в силу (72) имеет место равенство

$$\mathbb{D}\Big(y, \sum_{i,j=1}^{3} X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})\big)\Big) = -\mathbb{X}, \quad \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}. \tag{74}$$

Из этого равенства немедленно вытекает, что сумма $\sum_{i,j=1}^{3} X_{ij}\big(\boldsymbol{Z}_1^{ij}(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}(\boldsymbol{y})\big)$ линейна, т. е. имеет вид $\boldsymbol{c}_0 + \sum_{k=1}^{3} \boldsymbol{c}_k y_k$, где $\boldsymbol{c}_k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$ — некоторые постоянные векторы. Однако в силу 1-периодичности $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$ и $\boldsymbol{\Lambda}_\gamma^{ij}$ такое возможно только если $\boldsymbol{c}_k = 0$ при $k = 1, 2, 3$. В силу этого и равенства (74) имеет место тождество $\mathbb{X} = 0$, что противоречит предположению о нетривиальности $\mathbb{X}$. Следовательно, существует постоянная $c(\gamma) > 0$, такая что $(\mathcal{A}^\gamma : \mathbb{X}) : \mathbb{X} \geq c(\gamma)|\mathbb{X}|^2$ для всевозможных 3×3-матриц $\mathbb{X}$. Строгая положительная определенность тензора $\mathcal{A}^\gamma$ при $\gamma > 0$ доказана.

3. Доказательство проводится аналогично только что приведенному выше доказательству п. 2. При этом условие связности множеств $\mathcal{Y}_f$ и E_f используется для обоснования строгой положительной определенности тензора $\mathbb{A}_0$ (методом от противного) после того, как установлена его неотрицательность.

4. Непосредственной подстановкой проверяем, что в случае $\partial\mathcal{Y} \cap \partial\mathcal{Y}_f = \emptyset$ решения $\boldsymbol{Z}_1^{ij}$ задач (45),(46),(47) линейны в $\mathcal{Y}_f$ и удовлетворяют равенствам

$$\alpha_\mu \mathbb{D}(y, \boldsymbol{Z}_1^{ij}) + (\alpha_\nu \mathrm{div}_y \boldsymbol{Z}_1^{ij})\mathbb{I} + \alpha_\mu \mathbb{J}^{ij} + \alpha_\nu \delta_{ij}\mathbb{I} = 0, \quad \boldsymbol{y} \in \mathcal{Y}_f \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Комбинируя эти равенства с (61), немедленно устанавливаем, что $\mathbb{A}_0 = 0$.

Доказательство строгой положительной определенности тензора $\mathbb{A}_1$ проводится аналогично обоснованиям пп. 2 и 3.

5. Рассмотрим

$$I_0 \overset{def}{=} \sum_{i,j=1}^{3} \big\langle \big(\chi(\boldsymbol{y})\varkappa_f + (1 - \chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_s\big)(\nabla_y g_1^j(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{e}^j)\xi_j (\nabla_y g_1^i(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{e}^i)\xi_i \big\rangle_{\mathcal{Y}} =$$

$$= \left\langle \big(\chi(\boldsymbol{y})\varkappa_f + (1 - \chi(\boldsymbol{y}))\varkappa_s\big)\Big(\sum_{i=1}^{3} (\nabla_y g_1^i(\boldsymbol{y}) + \boldsymbol{e}^i)\xi_i\Big)^2 \right\rangle_{\mathcal{Y}} \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3. \tag{75}$$

Подставляя в (57) пробную функцию $\psi = g_1^i(\boldsymbol{y})\xi_i\xi_j$, что законно, и суммируя по i и по j, ввиду представления (66) приходим к равенству $I_0 = \mathbb{E}_0\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi}$. Комбинируя это равенство с оценкой (75), заключаем, что матрица $\mathbb{E}_0$ неотрицательно определена. Строгая положительная определенность $\mathbb{E}_0$ следует в силу связности множества E_s из рассуждений, аналогичных проведенным при обосновании п. 2.

Далее рассмотрим

$$
\begin{aligned}
I_1^{ij} &\overset{def}{=} \Big\langle \big\{\chi(\boldsymbol{y})\big[\varkappa_f \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^j\big] + \\
&+ (1-\chi(\boldsymbol{y}))\big[\varkappa_s \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j\big]\big\} \cdot \big(\varkappa_f \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^i + \varkappa_s \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^i\big)\Big\rangle_{\mathcal{Y}} = \\
&= -\Big\langle \big\{\chi(\boldsymbol{y})\big(\varkappa_f \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^j\big) + (1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\varkappa_s \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j\big)\big\} \cdot (\alpha_{\theta f} + \alpha_{\theta s})\boldsymbol{e}^i\Big\rangle_{\mathcal{Y}} = \\
&= (\alpha_{\theta f} + \alpha_{\theta s}) E_1^{ij} \quad (i,j = 1,2,3). \qquad (76)
\end{aligned}
$$

В этой цепочке равенств первое справедливо в силу (59), а второе — в силу (67). С другой стороны,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{3} I_1^{ij}\xi_i\xi_j &= \sum_{i,j=1}^{3} \Big\langle \chi(\boldsymbol{y})\big(\varkappa_f \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^j\big)\xi_j \cdot (\varkappa_f \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^i)\xi_i\Big\rangle_{\mathcal{Y}} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{3} \Big\langle (1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\varkappa_s \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j\big)\xi_j \cdot \big(\varkappa_s \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^i\big)\xi_i\Big\rangle_{\mathcal{Y}} + \\
&+ \sum_{i,j=1}^{3} \Big\langle \chi(\boldsymbol{y})\big(\varkappa_f \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^j\big)\xi_j \cdot \big(\varkappa_s \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^i\big)\xi_i\Big\rangle_{\mathcal{Y}} \\
&+ \sum_{i,j=1}^{3} \Big\langle (1-\chi(\boldsymbol{y}))\big(\varkappa_s \nabla_y g_2^j(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j\big)\xi_j \cdot \big(\varkappa_f \nabla_y g_2^i(\boldsymbol{y}) - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^i\big)\xi_i\Big\rangle_{\mathcal{Y}} \overset{def}{=} \\
&\overset{def}{=} I_2 + I_3 + I_4 + I_5 \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3. \qquad (77)
\end{aligned}
$$

Здесь очевидно $I_2 + I_3 \geq 0$ и, после перестановки местами индексов i и j в I_4, также имеем

$$
\begin{aligned}
I_4 + I_5 &= \sum_{i,j=1}^{3} \Big\langle (\varkappa_f \nabla_y g_2^i - \alpha_{\theta f}\boldsymbol{e}^i) \cdot (\varkappa_s \nabla_y g_2^j - \alpha_{\theta s}\boldsymbol{e}^j)\xi_i\xi_j\Big\rangle_{\mathcal{Y}} = \\
&= \sum_{i,j=1}^{3} \varkappa_f\varkappa_s \Big\langle \nabla_y g_2^i\xi_i \cdot \nabla_y g_2^j\xi_j\Big\rangle_{\mathcal{Y}} + \alpha_{\theta s}\alpha_{\theta s}|\boldsymbol{\xi}|^2 - \\
&- \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{\theta s}\varkappa_f\xi_i\xi_j \left\langle \frac{\partial g_2^i}{\partial y_j}\right\rangle_{\mathcal{Y}} - \sum_{i,j=1}^{3} \alpha_{\theta f}\varkappa_s\xi_i\xi_j \left\langle \frac{\partial g_2^j}{\partial y_i}\right\rangle_{\mathcal{Y}} \overset{def}{=} \\
&\overset{def}{=} I_6 + \alpha_{\theta s}\alpha_{\theta s}|\boldsymbol{\xi}|^2 - I_7 - I_8. \qquad (78)
\end{aligned}
$$

Очевидно, что $I_6 \geq 0$ и что $I_7 = I_8 = 0$ вследствие 1-периодичности $g_2^i(\boldsymbol{y})$ и формулы Грина. В силу этого замечания, комбинируя выражения (76)–(78), выводим оценку

$$
\mathbb{E}_1\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\xi} \geq \frac{\alpha_{\theta f}\alpha_{\theta s}}{\alpha_{\theta f} + \alpha_{\theta s}}|\boldsymbol{\xi}|^2, \quad \forall\, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^3
$$

и тем самым устанавливаем, что $\mathbb{E}_1$ строго положительно определена.

Строгая положительная определенность матрицы $\mathbb{C}_0$ доказывается аналогично.

Теорема 2 доказана. □

Список литературы

1. *Развитие* исследований по теории фильтрации в СССР (1917–1967) / Под ред. П. Я. Полубариновой-Кочиной, С. Н. Нумерова, И. А. Чарного и др. М.: Наука, 1969.

2. *Burridge R., Keller J. B.* Poroelasticity Equations Derived from Microstructure // J. Acoust. Soc. Am. 1981. Vol. 70. No. 4. P. 1140–1146.

3. *Coussy O.* Poromechanics. Chichester: John Wiley & Sons, 2004.

4. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. М.: Наука, 1984.

5. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G.* Asymptotic Analysis for Periodic Structure. Amsterdam, North Holland, 1978.

6. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. М.: Мир, 1984.

7. *Tartar L.* The Compensated Compactness Method Applied to System of Conservation Laws, in Systems of Nonlinear PDEs // NATO ASI Series C111. Dordrecht; Boston: Reidel Publ. Comp., 1983. P. 263–285.

8. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. М.: Физматлит, 1993.

9. *Nguetseng G.* A General Convergence Result for a Functional Related to the Theory of Homogenization // SIAM J. Math. Anal. 1989. Vol. 20. P. 608–623.

10. *Allaire G.* Homogenization and Two-scale Convergence // SIAM J. Math. Anal. 1992. Vol. 23. P. 1482–1518.

11. *Homogenization* and Porous Media / Ed. by U. Hornung. N.Y.: Springer-Verlag, 1997.

12. *Lukkassen D., Nguetseng G., Wall P.* Two-scale Convergence // Int. J. Pure Appl. Math. 2002. Vol. 2. No. 1. P. 35–86.

13. *Gilbert R. P., Mikelić A.* Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed: Part I // Nonlinear Anal. 2002. Vol. 40. P. 185–212.

14. *Мейрманов А. М.* Закон Дарси в неизотермических пористых средах // Сибирские электронные мат. известия. 2007. Т. 4. С. 141–154.

15. *Temam R. M., Miranville A. M.* Mathematical Modelling in Continuum Mechanics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2005.

16. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. М.: Высш. шк., 1983.

17. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973.

18. *Meirmanov A. M., Sazhenkov S. A.* Generalized Solutions to Linearized Equations of Thermoelastic Solid and Viscous Thermofluid // Electronic J. Diff. Equat. 2007. Vol. 2007. No. 41. P. 1–29.

19. *Зарубин В. С., Кувыркин Г. Н.* Математические модели термомеханики. М.: Физматлит, 2002.

20. *Clopeau T., Ferrin J. L., Gilbert R. P. et al.* Homogenizing the Acoustic Properties of the Seabed: Part II // Math. Comp. Modelling. 2001. Vol. 33. P. 821–841.

21. *Buckingham M. J.* Seismic Wave Propagation in Rocks and Marine Sediments: a New Theoretical Approach // Underwater Acoustics / Eds. E. A. Alippi, G. B. Cannelli. CNR-IDAC, Rome, 1998. Vol. 1. P. 299–300.

22. *O'Neil P. V.* Advanced Engineering Mathematics. Pacific Grove, USA, Brooks/Cole

Publl. Co., 1995.

23. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. М.: Наука, 1968.

24. *Решетняк Ю. Г.* Теоремы устойчивости в геометрии и анализе. Новосибирск: Наука, 1982.

25. *Dautray R., Lions J.-L.* Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology. Berlin: Springer, 2000. Vol. 5: Evolution problems I.

26. *Cioranescu D., Donato P.* An Introduction to Homogenization. Oxford: Oxford Univ. Press, 1999.

27. *Weinan E.* Homogenization of Linear and Nonlinear Transport Equations // Comm. Pure Appl. Math. 1992. Vol. 45. P. 301–326.

Материал поступил в редколлегию 17.11.2006

Адрес автора

САЖЕНКОВ Сергей Александрович
РОССИЯ, 630090, Новосибирск
ул. Пирогова, 2, Новосибирский
государственный университет
e-mail: sazhenkovs@yahoo.com