УДК 517.911

В. Г. Демиденко

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОДНОРОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ ГЕННЫХ СЕТЕЙ

В работе исследуется задача восстановления параметров линейных моделей, возникающих при дискретном моделировании динамики генных сетей. Решение задачи проводится на основе известной модификации метода обратной итерации. Доказывается сходимость и устанавливается оценка скорости сходимости метода.

В работе рассматривается задача восстановления параметров для линейных моделей, возникающих при дискретном моделировании динамики генных сетей. Изучение дискретных моделей обусловлено природой входных экспериментальных данных, которые характеризуются малым числом измерений по времени большого набора генов (см., например, [1–3]). Эти модели описываются системами линейных разностных уравнений с неизвестными параметрами, характеризующими взаимодействия между генами и внешние воздействия. Такие системы имеют вид

$$G_i(k+1) = \sum_{j=1}^{N} w_{ij}(k) G_j(k) + w_{0i}(k),$$
$$i = 1, 2, \ldots, N, \quad k = 1, 2, \ldots, M-1,$$

где $G_i(k)$ — уровень экспрессии i-го гена [4], $w_{ij}(k)$ — вес связи[1] j-го гена с i-м и $w_{0i}(k)$ — свободный коэффициент, характеризующий внешнее воздействие, в момент времени k.

Задача заключается в нахождении весовых коэффициентов $w_{ij}(k)$ и свободных коэффициентов $w_{0i}(k)$ по имеющимся данным об уровне экспрессии рассматриваемого набора генов.

Данная задача принадлежит классу обратных задач, которые традиционно являются трудно решаемыми, так как их решение часто сводится к минимизации функционалов сложного вида, и даже в стационарном случае при отсутствии внешних воздействий ($w_{ij}(k) = w_{ij}$, $w_{0i}(k) = 0$) возникают серьезные трудности восстановления модели (см., например, [5; 6]).

Иногда в литературе такой класс задач называется задачей идентификации динамических систем. Задачи такого типа возникают при цифровой обработке сигналов, в теории оптимального управления, при построении нейронных сетей и регрессионных моделей, а также в задачах о подборе уравнений, решения которых точно описывают или аппроксимируют предъявленные наборы экспериментальных данных (см., например, [7–10]).

В настоящей работе проводится исследование стационарной линейной модели при отсутствии внешних воздействий: описывается итерационный процесс решения задачи,

[1] Коэффициент взаимодействия между генами [1].

ISSN 1818-7897. Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8, вып. 3. С. 51–59

доказывается его сходимость и устанавливается оценка скорости сходимости. Полученные результаты кратко анонсированы в [11].

§ 1. Постановка задачи

Дадим строгую математическую постановку задачи.

Запишем систему разностных уравнений в векторном виде

$$\mathbf{G}(k+1) = W\mathbf{G}(k), \quad k = 1, \dots, M-1, \tag{1}$$

где

$$\mathbf{G}(k) = \begin{pmatrix} G_1(k) \\ \vdots \\ G_N(k) \end{pmatrix},$$

$W = (w_{ij})$ — числовая матрица размера $N \times N$.

Пусть даны соответствующие векторы «наблюдений»:

$$\mathbf{y}(k) = \begin{pmatrix} y_1(k) \\ \vdots \\ y_N(k) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, M. \tag{2}$$

Требуется найти W так, чтобы решения системы (1) наиболее точно аппроксимировали наблюдения (2), т. е. требуется решить задачу минимизации функционала

$$\sum_{k=1}^{M} \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{G}(k)\|^2 \to \min_{W, \mathbf{G}}, \tag{3}$$

где векторы $\mathbf{G}(k)$, $k = 1, \dots, M$, удовлетворяют системе (1).

§ 2. Схема решения

Перепишем систему разностных уравнений (1) в виде:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \tag{4}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} W & -I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & W & -I & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & W & -I \end{pmatrix} \text{ – матрица размера } (M-1)N \times MN,$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} G(1) \\ \vdots \\ G(M) \end{pmatrix} \text{ – вектор размера } MN.$$

Тогда задача (3) перепишется в виде: найти матрицу W, решающую задачу минимизации

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|^2 \to \min_{W,\, \mathbf{x} | A\mathbf{x} = \mathbf{0}}, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(M) \end{pmatrix}$$

— вектор размера MN определяется векторами «наблюдений» (2).

Многие задачи оптимизации с ограничениями можно свести к решению задач без таковых. Решение задачи (5) проведем в два этапа, сводя ее к задаче минимизации без ограничений.

В начале пусть матрица W фиксирована. Найдем вектор $\hat{\mathbf{x}}$ такой, что

$$\|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}}\|^2 = \inf_{\mathbf{x}|A\mathbf{x}=\mathbf{0}} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 . \tag{6}$$

Обозначим $P_A = A^T\left(AA^T\right)^{-1}A$. Как известно [6; 8; 10], P_A — ортогональный проектор, при этом $\ker P_A = \ker A$ и $(I-P_A)$ является ортогональным проектором на подпространство $\ker A$. Следовательно, решение $\hat{\mathbf{x}}$ задачи (6) имеет вид $\hat{\mathbf{x}} = (I-P_A)\mathbf{y}$ и

$$\|\mathbf{y}-\hat{\mathbf{x}}\|^2 = \min_{\mathbf{x}|A\mathbf{x}=\mathbf{0}} \|\mathbf{y}-\mathbf{x}\|^2 = \|P_A\mathbf{y}\|^2 . \tag{7}$$

С использованием (7) исходная задача (5) сводится к следующей задаче минимизации:

$$\|P_A\mathbf{y}\|^2 \to \min_W . \tag{8}$$

Одним из распространенных способов решения задачи (8) является применение градиентных методов минимизации функционалов. Наиболее распространенными методами такого типа являются метод наискорейшего спуска, метод Ньютона и их модификации. Однако использование градиентных методов может оказаться неэффективным ввиду высокой «овражности» функционалов. В частности, при численной минимизации [5] функционала (8) уже в случае $N=3$ возникают значительные трудности, поскольку матрица Гессе в окрестности точки минимума имеет очень высокую обусловленность.

Существуют альтернативные подходы к решению задачи (8) (см., например, [7–10]). Мы будем использовать подход, предложенный А. О. Егоршиным [9; 10] при решении обратной задачи для однородных разностных уравнений.

Обозначим минимизируемый функционал

$$\rho^2 = \rho^2(W) = \|P_A\mathbf{y}\|^2 .$$

Для дальнейшего численного решения задачи перепишем данный функционал в следующем виде:

$$\rho^2 = \|P_A\mathbf{y}\|^2 = \langle P_A\mathbf{y}, P_A\mathbf{y}\rangle = \left\langle A\mathbf{y}, (AA^T)^{-1}A\mathbf{y}\right\rangle .$$

Заметим, что $A\mathbf{y} = Y\mathbf{v}$, где

$$Y = \begin{pmatrix}
\mathbf{y}^T(1) & & 0 & -y_1(2) & & 0 \\
 & \ddots & & & \ddots & \\
0 & & \mathbf{y}^T(1) & 0 & & -y_N(2) \\
\mathbf{y}^T(2) & & 0 & -y_1(3) & & 0 \\
 & \ddots & & & \ddots & \\
0 & & \mathbf{y}^T(2) & 0 & & -y_N(3) \\
 & \vdots & & & \vdots & \\
\mathbf{y}^T(M-1) & & 0 & -y_1(M) & & 0 \\
 & \ddots & & & \ddots & \\
0 & & \mathbf{y}^T(M-1) & 0 & & -y_N(M)
\end{pmatrix}$$

— матрица размера $(M-1)N \times (N^2+N)$,

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^{1T} \\ \vdots \\ \mathbf{w}^{NT} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

— вектор размера N^2+N, $\mathbf{w}^j$ — j -я строка матрицы W.

Поэтому минимизируемый функционал принимает вид

$$\rho^2 = \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle\,, \tag{9}$$

где

$$B = B(W, \mathbf{y}) = Y^T \left(AA^T\right)^{-1} Y \ \text{ – матрица размера } (N^2+N) \times (N^2+N),$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}(W) \ \text{ – вектор размера } N^2+N.$$

Таким образом, решение исходной задачи (5) свелось к решению задачи минимизации:

$$\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle \to \min_{W}\,. \tag{10}$$

Поскольку функционал ρ^2 можно записать как

$$\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle = \|\mathbf{z}\|^2 \left\langle \frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|}, B\frac{\mathbf{z}}{\|\mathbf{z}\|} \right\rangle,$$

то решение задачи минимизации (10) можно проводить на единичной сфере $\|\mathbf{z}\| = 1$.

Для численного решения задачи (10) по аналогии с [9; 10] мы используем *модификацию метода обратной итерации* [12]. Суть этого метода заключается в построении последовательности $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$ такой, что $\mathbf{z}^k \to \mathbf{z}^*$ при $k \to \infty$, при этом

$$\langle \mathbf{z}^*, B\mathbf{z}^* \rangle = \min_{W,\ \|\mathbf{z}\|=1} \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z} \rangle\,.$$

Алгоритм построения последовательности $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$:

0. Взять $\mathbf{z}^0$ такой, что $\left\|\mathbf{z}^0\right\| = 1$.

Для $k = 1, 2, 3, \ldots$

1. Найти $\mathbf{z}^k$ такой, что $B\mathbf{z}^k = \mathbf{z}^{k-1}$.
2. Нормировать $\mathbf{z}^k := \frac{\mathbf{z}^k}{\left\|\mathbf{z}^k\right\|}$.
3. Пересчитать матрицу W и $B = B(W, \mathbf{y})$.
4. Подвергнуть $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$ тесту на сходимость.

Если итерационный процесс сходится, то мы получим последовательность приближенных решений исходной задачи (3).

Численные расчеты показали высокую скорость сходимости итерационного процесса, однако теоретического обоснования сходимости ранее доказано не было. Ниже мы докажем сходимость для некоторого характерного класса наблюдений, возникающих на практике.

§ 3. Сходимость метода

Хорошо известно, что классический метод обратной итерации для минимизации неотрицательно определенных квадратичных форм $\langle \mathbf{x}, C\mathbf{x}\rangle \geq 0$ сходится при почти всех начальных приближениях. При этом если минимальное собственное значение λ_1 матрицы C имеет кратность 1, то скорость сходимости при $k \to \infty$ имеет порядок $\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^k$ [12].

Пусть $\lambda_j(B)$, $j = 1, \ldots, n$, $n = N^2 + N$ — собственные значения матрицы $B = B(W, \mathbf{y})$. При этом $\lambda_j(B) \geq 0$ в силу симметричности и неотрицательной определенности матрицы B. Упорядочим их в порядке возрастания:

$$0 \leq \lambda_1(B) \leq \lambda_2(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B).$$

Предположение. Мы будем считать, что вектор наблюдений $\mathbf{y}$ такой, что минимальное собственное значение $\lambda_1(B)$ — простое, при этом $\lambda_1(B)$ и соответствующий ему собственный вектор $\mathbf{v}_1(B)$ не зависят от W:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1(B) \equiv \lambda_1(\mathbf{y}) = \lambda_1,\\
&\mathbf{v}_1(B) \equiv \mathbf{v}_1(\mathbf{y}) = \mathbf{v}_1,\\
&\lambda_1 < \lambda_2(B) \leq \cdots \leq \lambda_n(B).
\end{aligned}$$

В дальнейшем если $\lambda_1(B) = 0$, то вместо минимизации

$$\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle \to \min_{W,\ \|\mathbf{z}\|=1}$$

будем минимизировать функционал

$$\langle \mathbf{z}, \tilde{B}\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle + \delta,$$

где $\tilde{B} = B + \delta I$, $\delta > 0$ — некоторая константа, и в этом случае $\lambda_1(\tilde{B}) = \delta$. Ясно, что при такой замене функционалов изменений в алгоритме минимизации не происходит, но матрица $\tilde{B}$ будет невырожденной. Итак, без ограничения общности можно считать, что $\lambda_1 > 0$.

Теорема 1. *Пусть выполнено Предположение. Если начальное приближение $\mathbf{z}^0$ не ортогонально собственному вектору $\mathbf{v}_1$, тогда итерационный процесс сходится:*

$$\mathbf{z}^k \to \mathbf{z}^* = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} \quad \textit{при} \quad k \to \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Следуя алгоритму, решаем систему

$$B_0\mathbf{z} = \mathbf{z}^0, \quad B_0 = B(W_0, \mathbf{y}),$$

получаем $\mathbf{z}^1 = B_0^{-1}\mathbf{z}^0$ и нормируем $\mathbf{z}^1 := \frac{\mathbf{z}^1}{\|\mathbf{z}^1\|}$. Пусть вектор $\mathbf{u}^1$, $\left\|\mathbf{u}^1\right\| = 1$, принадлежит плоскости, определенной векторами $\mathbf{z}^*$ и $\mathbf{z}^1$ и ортогонален $\mathbf{z}^*$. Тогда $\mathbf{z}^1$ можно представить в виде

$$\mathbf{z}^1 = \cos\theta_1 \cdot \mathbf{z}^* + \sin\theta_1 \cdot \mathbf{u}^1. \tag{11}$$

Решаем систему

$$B_1\mathbf{z} = \mathbf{z}^1, \quad B_1 = B(W_1, \mathbf{y}),$$

получаем $\mathbf{z}^2 = B_1^{-1}\mathbf{z}^1$ и нормируем $\mathbf{z}^2 := \frac{\mathbf{z}^2}{\|\mathbf{z}^2\|}$. Учитывая (11), имеем

$$\mathbf{z}^2 = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}B_1^{-1}\mathbf{z}^1 = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}B_1^{-1}\left(\cos\theta_1\cdot\mathbf{z}^* + \sin\theta_1\cdot\mathbf{u}^1\right) =$$
$$= \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}\left(\cos\theta_1\cdot B_1^{-1}\mathbf{z}^* + \sin\theta_1\cdot B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right) =$$
$$= \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}\left(\frac{\cos\theta_1}{\lambda_1}\mathbf{z}^* + \sin\theta_1\cdot\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|\mathbf{u}^2\right),$$

где $\mathbf{u}^2 = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|}B_1^{-1}\mathbf{u}^1$.

Отметим, что вектор $\mathbf{u}^2$ ортогонален $\mathbf{z}^*$. Действительно, в силу $\left\langle\mathbf{u}^1,\mathbf{z}^*\right\rangle = 0$ и $B_1 = B_1^{\mathrm{T}}$, имеем

$$\left\langle\mathbf{u}^2,\mathbf{z}^*\right\rangle = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|}\left\langle B_1^{-1}\mathbf{u}^1,\mathbf{z}^*\right\rangle = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|}\left\langle\mathbf{u}^1,B_1^{-1}\mathbf{z}^*\right\rangle = \frac{1}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|}\left\langle\mathbf{u}^1,\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{z}^*\right\rangle = 0.$$

Следовательно, аналогично (11), $\mathbf{z}^2$ можно представить

$$\mathbf{z}^2 = \cos\theta_2\cdot\mathbf{z}^* + \sin\theta_2\cdot\mathbf{u}^2, \tag{12}$$

при этом

$$\cos\theta_2 = \frac{1}{\lambda_1\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}\cos\theta_1, \sin\theta_2 = \frac{\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|}{\left\|B_1^{-1}\mathbf{z}^1\right\|}\sin\theta_1.$$

Покажем следующее неравенство:

$$\operatorname{tg}\theta_2 \le q\operatorname{tg}\theta_1, \tag{13}$$

где

$$q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \in (0,1), \quad \lambda_2 = \min_W \lambda_2(B).$$

Имеем

$$\operatorname{tg}\theta_2 = \frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = \lambda_1\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \lambda_1\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\|\operatorname{tg}\theta_1.$$

Поэтому для доказательства (13) нужно установить оценку

$$\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\| \le \frac{1}{\lambda_2(B_1)}\left\|\mathbf{u}^1\right\|. \tag{14}$$

Матрица B_1 является симметричной, следовательно, B_1^{-1} можно представить в виде $B_1^{-1} = SDS^{\mathrm{T}}$, где

$$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2(B_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n(B_1)} \end{pmatrix},$$

S — ортогональная матрица, и поскольку $\mathbf{z}^*$ — собственный вектор матрицы B_1, соответствующий собственному значению λ_1, то S имеет вид $S = (\mathbf{z}^*\,|\,R)$. Учитывая, что вектор $\mathbf{u}^1$ ортогонален $\mathbf{z}^*$, имеем следующую цепочку равенств:

$$\left\|B_1^{-1}\mathbf{u}^1\right\| = \left\|SDS^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1\right\| = \left\|DS^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1\right\| =$$
$$= \left\|\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2(B_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n(B_1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ R^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1 \end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2(B_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n(B_1)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ R^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1 \end{pmatrix}\right\| =$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2(B_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n(B_1)} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1 \right\| = \left\| S \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & \frac{1}{\lambda_2(B_1)} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \frac{1}{\lambda_n(B_1)} \end{pmatrix} S^{\mathrm{T}}\mathbf{u}^1 \right\| = \left\| P\mathbf{u}^1 \right\|.$$

Матрица P является симметричной, поэтому $\left\|P\mathbf{u}^1\right\| \le \lambda_{\max}(P)\left\|\mathbf{u}^1\right\|$. Отметим, что спектр матрицы B_1^{-1}: $\frac{1}{\lambda_n(B_1)} \le \ldots \le \frac{1}{\lambda_2(B_1)} < \frac{1}{\lambda_1}$, следовательно $\lambda_{\max}(P) = \frac{1}{\lambda_2(B_1)}$. Таким образом, оценка установлена.

Учитывая строгую монотонность функции $\operatorname{tg}\theta$ на интервале $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, из оценки (13) следует, что в формулах (11) и (12) $\theta_2 < \theta_1$, т. е. проекция вектора $\mathbf{z}^2$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{z}^*$, строго больше проекции вектора $\mathbf{z}^1$ на это направление. Проводя аналогичные рассуждения, получим последовательность $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$

$$\mathbf{z}^k = \cos\theta_k \cdot \mathbf{z}^* + \sin\theta_k \cdot \mathbf{u}^k, \tag{15}$$

при этом

$$\operatorname{tg}\theta_k \le q^{k-1}\operatorname{tg}\theta_1, \qquad q = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} < 1. \tag{16}$$

В силу строгой монотонности функции $\operatorname{tg}\theta$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, проекции векторов $\mathbf{z}^k$ на направление, определяемое вектором $\mathbf{z}^*$, монотонно возрастают при $k \to \infty$. Более того, поскольку $\theta_k \to 0$, $k \to \infty$, то из формулы (15) получаем сходимость последовательности $\left\{\mathbf{z}^k\right\}$:

$$\mathbf{z}^k \to \mathbf{z}^* \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

и, следовательно,

$$\langle \mathbf{z}^k, B_k\mathbf{z}^k \rangle \to \lambda_1 \quad \text{при} \quad k \to \infty, \quad B_k = B(W_k, \mathbf{y}).$$

Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда имеет место следующая оценка скорости сходимости итерационного процесса:*

$$\|\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^*\| \le c(\mathbf{z}^0)\Big(\frac{\lambda_1}{\min\limits_W \lambda_2(B)}\Big)^{k-1}, \quad k \gg 1. \tag{17}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Перепишем представление (15) в виде

$$\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^* = (\cos\theta_k - 1)\mathbf{z}^* + \operatorname{tg}\theta_k \cos\theta_k \cdot \mathbf{u}^k.$$

Тогда, используя формулу

$$1 - \cos\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{2}\frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

а также учитывая, что $\|\mathbf{z}^*\| = \left\|\mathbf{u}^k\right\| = 1$, получим оценку

$$\left\|\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^*\right\| \le \frac{\operatorname{tg}^2\theta_k}{2}\frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta_k}{2}\right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta_k}{2}} + \operatorname{tg}\theta_k.$$

В силу (16) существует k_0 такое, что при $k > k_0$ имеет место

$$\operatorname{tg}\theta_k\frac{\left(1 - \operatorname{tg}^2\frac{\theta_k}{2}\right)^2}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\theta_k}{2}} \le 1.$$

Следовательно, при $k > k_0$

$$\left\|\mathbf{z}^k - \mathbf{z}^*\right\| \le \frac{3}{2}\operatorname{tg}\theta_k \le \frac{3}{2}q^{k-1}\operatorname{tg}\theta_1.$$

Оценка (17) доказана.

Замечание 1. При наших предположениях

$$\min_{\|\mathbf{z}\|=1} \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle = \lambda_1.$$

Действительно, пусть $\mathbf{z}$ фиксировано, найдем ортогональную матрицу U такую, что

$$UBU^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} \lambda_n(B) & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \lambda_2(B) & \\ 0 & & & \lambda_1 \end{pmatrix} =: \Lambda.$$

Обозначим $\mathbf{v} := U\mathbf{z}$. Тогда поскольку $\|\mathbf{v}\| = \|U\mathbf{z}\| = \|\mathbf{z}\| = 1$, то

$$\langle \mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle = \langle U\mathbf{z}, \Lambda U\mathbf{z}\rangle = \langle \mathbf{v}, \Lambda\mathbf{v}\rangle = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(B)v_j^2 \ge \lambda_1$$

для любого $\mathbf{z}$. С другой стороны,

$$\langle \mathbf{z}^*, B\mathbf{z}^*\rangle = \langle \mathbf{z}^*, \lambda_1\mathbf{z}^*\rangle = \lambda_1.$$

Следовательно, $\min\limits_{\|\mathbf{z}\|=1} \langle \mathbf{z}, B\mathbf{z}\rangle = \lambda_1$.

Автор выражает благодарность научным руководителям чл.-корр. РАН А. М. Федотову и канд. техн. наук Н. Л. Подколодному за полезные обсуждения работы.

Список литературы

1. *D'Haeseleer P. et al.* Linear Modeling of mRNA Expression Levels During CNS Development an Injury // Pacific Symp. Biocomput. 1999. Vol. 4. P. 41–52.

2. *Weaver D. C. et al.* Modeling Regulatory Networks with Weight Matrices // Pacific Symp. Biocomput. 1999. Vol. 4. P. 112–123.

3. *Vohradsky J.* Neural Network Model of Gene Expression // The FASEB Journal. 2001. Vol. 15. P. 846–854.

4. *Stekel D.* Microarray Bioinformatics. Cambridge University Press, USA, 2003. 263 p.

5. *Хайкин С.* Нейронные сети: полный курс: 2-е изд. М.: Вильямс, 2006. 1104 с.

6. *Костин В. И.* О точках экстремума одной функции // Управляемые системы. Новосибирск: ИМ СО АН СССР. 1984. Вып. 24. С. 35–42.

7. *Aoki M., Yue P. C.* On a Priory Error Estimates of Some Identification Methods // IEEE Trans. Automat. Control. 1970. Vol. AC-15. No. 5. P. 541–548.

8. *Аоки М.* Введение в методы оптимизации. М.: Наука, 1977. 344 с.

9. *Егоршин А. О.* Вычислительные замкнутые методы идентификации линейных объектов // Оптимальные и самонастраивающиеся системы. Новосибирск: ИАиЭ СО АН СССР, 1971. С. 40–53.

10. *Егоршин А. О.* Об одном способе оценки коэффициентов моделирующих уравнений для последовательностей // Сиб. журн. индустр. мат. 2000. Т 3, № 2. С. 78–96.

11. *Демиденко В. Г.* Линейное моделирование динамики генных сетей // Материалы XLV Междунар. научн. студ. конф. «Студент и научно-технический прогресс»: Труды / Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск, 2007. С. 19–25.

12. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. М.: Мир, 1983. 384 с.

Материал поступил в редколлегию 07.02.2008

Адрес автора

ДЕМИДЕНКО Владимир Геннадьевич

РОССИЯ, 630090, Новосибирск

ИВТ СО РАН

пр. Акад. Лаврентьева, 6

e-mail: demidenko.v@gmail.com